4. Πυκνότητα Ρητών και Άρρητων Αριθμών

Τι σημαίνει η φράση « Οι ρητοί αριθμοί είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}$ »

Με απλά λόγια, θα λέγαμε ότι οι ρητοί αριθμοί είναι παντού, όπου και αν κοιτάξουμε την ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Θα αποδείξουμε όμως την παρακάτω πρόταση

Σε κάθε διάστημα πραγματικών αριθμών $(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{R}$ (όσο μικρό και αν είναι αυτό!!!), υπάρχει ένας τουλάχιστον ρητός αριθμός

Απόδειξη

Έστω ότι με $\frac{\kappa}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\kappa \in \mathbb{Z}$, παριστάνουμε τους άπειρους ρητούς αριθμούς πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Η απόσταση δύο τέτοιων αριθμών είναι σταθερή και ίση με $\frac{1}{\nu}$.

$$\kappa - \tfrac{1}{\nu} \; \underbrace{\longrightarrow}_{1/\nu} \; \frac{\kappa}{\nu} \; \underbrace{\longrightarrow}_{1/\nu} \; \frac{\kappa+1}{\nu} \; \underbrace{\longrightarrow}_{1/\nu} \; \frac{\kappa+2}{\nu}$$

Έστω τώρα το διάστημα $(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{R}$. Το μήκος του διαστήματος αυτού είναι $\beta-\alpha$.

Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός μέσα στο (α,β) αρκεί να επιλέξουμε τον φυσικό αριθμό ν ώστε το βήμα $\frac{1}{\nu}$ να είναι μικρότερο του $\beta-\alpha$.

Δηλαδή να ισχύει $\frac{1}{\nu} < \beta-\alpha \Rightarrow \nu > \frac{1}{\beta-\alpha}$.

Η τελευταία ανίσωση είναι σωστή γιατί οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμος και αν ειναι το $\frac{1}{β-α}$, θα υπάρχει πάντα ενας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος από αυτόν.

Επομένως με παρόμοιο συλλογισμό υπαρχει και ενας τουλαχιστον ρητός σε καθενα από τα διαστηματα $(α, \frac{α+β}{2})$ και $(\frac{α+β}{2}, β)$.

Αν συνεχίσουμε επ' απειρον την διαδικασία καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

Σε καθε διάστημα $(α, β) \subseteq \mathbb{R}$ υπάρχουν άπειροι στο πληθος ρητοί αριθμοί

Με παρόμοια διαδικασία, αποδεικνύουμε ότι:

Σε καθε διάστημα $(α, β) \subseteq \mathbb{R}$ υπάρχουν άπειροι στο πλήθος άρρητοι αριθμοί