

## Φυλλάδιο 6 - Προτεινόμενες Ασκήσεις

### Παράγραφος 1.4: Συντεταγμένες Διανύσματος

#### Άσκηση 1

Βρείτε τις συντεταγμένες των παρακάτω διανυσμάτων

α)  $\overrightarrow{OA}$ , όταν Ο η αρχή των αξόνων και  $A(-4,2)$

β)  $\overrightarrow{BO}$ , όταν Ο η αρχή των αξόνων και  $B(2,-3)$

γ)  $\vec{\alpha} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$

δ)  $\vec{\beta} = 2015\vec{j}$

ε)  $\vec{\gamma} = 2(4\vec{i} - 5\vec{j}) - 3(3\vec{i} - \vec{j})$

στ)  $\overrightarrow{AB}$ , όταν  $A(5,-1)$  και  $B(-2,4)$

#### Άσκηση 2 - άσκηση του συναδέλφου Σίσκα Χρήστου

Δίνεται το σημείο  $A(\lambda^2 - 5\lambda + 6, \lambda^2 - \lambda - 6)$ . Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε

α) Το A να είναι σημείο του  $x'x$

β) Το A να είναι σημείο μόνο του  $y'y$

γ) Το A να μην ανήκει σε κανένα άξονα

δ) Το A να βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο

#### Άσκηση 3

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (3, -2)$  και  $\vec{\beta} = (-2, 1)$ .

α) Να βρείτε τα διανύσματα  $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$  και  $\vec{\delta} = -\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

β) Γράψτε το διάνυσμα  $\vec{u} = (10, 1)$  ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων  $\vec{\gamma}$  και  $\vec{\delta}$  που βρήκατε παραπάνω.

#### Άσκηση 4 - Του συναδέλφου Μίλτου Παπαγρηγοράκη

Έστω το σημείο  $A(-1, 2)$ . Να βρείτε

α) Το διάνυσμα  $\overrightarrow{AB}$ , όταν  $B(-3, 0)$

β) Το σημείο Γ όταν  $\overrightarrow{AG} = (-3, -5)$

γ) Το σημείο Δ, όταν  $2\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{DE}$  και  $E(3, -1)$

### Άσκηση 5

Βρείτε τα  $x, y$  ώστε τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (x^2 + 2xy, x + y)$  και  $\vec{\beta} = (-8, 1)$  να είναι αντίθετα.

### Άσκηση 6

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (-1, 4)$  και  $\vec{\beta} = (-3, 1)$ . Βρείτε το διάνυσμα  $\vec{u} = (x, y)$ , ώστε να ισχύει :

α)  $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

β)  $\vec{u} + 3\vec{\alpha} = -2\vec{\beta}$

γ)  $\vec{\alpha} - 2\vec{u} = \kappa\vec{\beta}$

### Άσκηση 7

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (\lambda - 1, 1)$  και  $\vec{\beta} = (-3, 3 - 2\lambda)$ . Βρείτε το  $\lambda$  ώστε τα διανύσματα να είναι:

α) παράλληλα

β) ομόρροπα

γ) αντίρροπα

### Άσκηση 8

Οι τετμημένες των σημείων A και B είναι οι ρίζες της παρακάτω εξίσωσης.

$$x^2 - (\lambda^2 - 3\lambda + 6)x + 5 = 0$$

Βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ , ώστε το μέσο του διανύσματος  $\overline{AB}$ , να έχει τετμημένη ίση με 2.

### Άσκηση 9 - Του συναδέλφου Μίλτου Παπαρηγοράκη

Δίνονται τα σημεία A(2,9), B(3,4) και Γ(5,7).

α) Βρείτε τα διανύσματα  $\overline{AB}$ ,  $\overline{B\Gamma}$  και  $\overline{A\Gamma}$

β) Βρείτε τα  $\kappa, \lambda$  ώστε το διάνυσμα  $\vec{\chi} = (\kappa - 2, \lambda - 5)$  να είναι ίσο με το  $\overline{B\Gamma} - 2\overline{AB}$ .

γ) Βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\overline{B\Gamma} - 2\overline{AB}$ .

δ) Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο Γ.

### Άσκηση 10

Υπολογίστε την γωνία που σχηματίζουν τα παρακάτω διανύσματα με τον άξονα  $x\chi'$ .

$$\vec{a} = (5,5) \quad \vec{a} = (0,5) \quad \vec{a} = (-2,0) \quad \vec{a} = (\sqrt{3},1) \quad \vec{a} = (-1,\sqrt{3})$$

### Άσκηση 11

Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{a} = (|\vec{a}| - 3, 9)$ .

### Άσκηση 12

Βρείτε τις τιμές του  $\mu$  ώστε τα σημεία  $A(1,0)$ ,  $B(-\mu^2, 3)$  και  $\Gamma(-5\mu, 9)$  να είναι συνευθειακά.

### Άσκηση 13

Έστω τα σημεία  $A(3,1)$  και  $B(-2,4)$ .

α) Βρείτε το σημείο  $M$  το οποίο ανήκει στην ευθεία  $y=x+2$ , ώστε  $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$ .

β) Βρείτε το σημείο  $\Lambda$  του  $γγ'$ , ώστε το τρίγωνο  $\Lambda AB$  να είναι ορθογώνιο στο  $\Lambda$ .

### Άσκηση 14

Βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{a}$ , το οποίο είναι ομόρροπο με την διάμεσο του τριγώνου  $AB\Gamma$ , όπου  $A(1,2)$ ,  $B(1,3)$  και  $\Gamma(3,3)$ .

### Άσκηση 15

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (\chi + 3, 5)$  και  $\vec{\beta} = (2\chi, 5\chi + 1)$  με  $\chi \in R$ .

α) Δείξτε ότι τα παραπάνω διανύσματα δεν μπορεί να είναι συγγραμμικά για καμία τιμή του πραγματικού αριθμού  $\chi$ .

β) Αν  $\chi = -3$ , βρείτε την γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{a}$  με τον οριζόντιο άξονα.

γ) Αν  $\chi = -1$ , γράψτε το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = 2\vec{a} - 3\vec{\beta}$ , ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ .

δ) Αν  $\chi = 5$  βρείτε ένα διάνυσμα που να είναι αντίρροπο του  $\frac{2\vec{a} - \vec{\beta}}{2}$  και να έχει μέτρο ίσο με  $\sqrt{2}$ .

### Άσκηση 16

Δείξτε ότι το διάνυσμα  $\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} + \frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$  είναι παράλληλο στην διχοτόμο της γωνίας των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

### Άσκηση 17

Δίνονται τα σημεία  $A(3,4), B(1,2), \Gamma(-2,-2)$  και  $\Delta(\frac{3}{2}, 5)$ . Αποδείξτε ότι το μέσον του  $A\Gamma$  ανήκει στην ευθεία  $B\Delta$ .

### Άσκηση 18

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(1,2), B(3,-4), \Gamma(-1,-2)$

Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες της διαμέσου  $AM$

β) Τις συντεταγμένες του  $P$  αν  $\vec{AP} = \vec{B\Gamma}$

γ) Τις συντεταγμένες του κέντρου  $K$  του παραλληλογράμμου  $AP\Gamma B$

### Άσκηση 19

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (\kappa - \lambda, \kappa + 2), \vec{\beta} = (2\kappa - \lambda, \lambda + 1), \vec{\gamma} = (1, 5)$  και  $\vec{\delta} = (-2, 1)$ . Βρείτε τα  $\kappa$  και  $\lambda$  ώστε τα διανύσματα  $\vec{\xi} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  και  $\vec{\zeta} = -\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  να είναι αντιστοίχως παράλληλα με τα διανύσματα  $\vec{\gamma}$  και  $\vec{\delta}$ .

### Άσκηση 20

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{OA} = (\chi + 1, -\chi), \vec{OB} = (\chi - 1, 1)$  και  $\vec{OG} = (\chi, -1)$ .

α) Βρείτε για ποια τιμή του  $\chi$  τα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$  να μην αποτελούν κορυφές τριγώνου.

β) Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $M$  αν ισχύει η σχέση  $2\vec{AM} - \vec{AB} = 3\vec{BM}$ .

γ) Βρείτε το συμμετρικό του σημείο  $A$  ως προς το σημείο  $M$ .

δ) Βρείτε ένα σημείο  $\Lambda$  του  $\chi\chi'$ , ώστε η παράσταση  $|\vec{\Lambda A}|^2 + |\vec{\Lambda B} - 2\vec{\Lambda \Gamma}|^2$  να παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

### Άσκηση 21

Αν  $\vec{\alpha} = (-1,2)$  και  $\vec{\beta} = (2, -3)$ , υπολογίστε το μέτρο ενός διανύσματος  $\vec{\gamma}$  για το οποίο ισχύει  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + |\vec{\gamma}|\vec{\beta}$ .

### Άσκηση 22

Έστω τα σημεία  $A(2,\kappa\mu)$  και  $B(3,2\mu-1)$

α) Αν  $\kappa=2$  βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος  $\overline{AB}$ , και την γωνία που σχηματίζει αυτό με τον άξονα  $\chi\chi'$ .

β) Αν  $\kappa=1$  βρείτε το  $\mu$ , ώστε το διάνυσμα  $\overline{AB}$ , να σχηματίζει με τον άξονα  $\chi\chi'$  γωνία ίση με  $\frac{7\pi}{3}$ .

### Άσκηση 23

Αν  $\overline{AB} = (5, -2)$  και  $\overline{AG} = (-1,3)$ , βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\overline{BG}$

### Άσκηση 24 - του συναδέλφου Μπάργλα Αναστάσιου

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(2,1)$ ,  $B(-2,0)$ ,  $\Gamma(-4,4)$  και το σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $A\Gamma$ , ώστε  $\Delta A=2\Delta\Gamma$ . Να αναλύσετε το διάνυσμα  $\overline{B\Delta}$  σε δύο συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις των  $\overline{B\Gamma}$  και  $\overline{BA}$ .

### Άσκηση 25

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(-2,1)$ ,  $B(4,1)$ ,  $\Gamma(0,-2)$ . Βρείτε την απόσταση των σημείων  $A$  και  $B$  καθώς και το μέτρο της διαμέσου  $\Gamma\Delta$  του τριγώνου.

### Άσκηση 26

Δίνεται παραλληλόγραμμο με  $A(2,3)$ ,  $B(-1,2)$ ,  $\Gamma(-2,3)$ . Βρείτε το μήκος της διαγωνίου  $B\Delta$ .

### Άσκηση 28

Αν τα σημεία  $A,B,\Gamma$  έχουν διανύσματα θέσης ως προς την αρχή των αξόνων τα  $\vec{\alpha} = (-1,2)$ ,  $\vec{\beta} = (3,0)$  και  $\vec{\gamma} = (1,1)$ , τότε:

α) Βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overline{AB}$  και  $\overline{A\Gamma}$ .

β) αποδείξτε ότι τα  $A,B,\Gamma$  είναι συνευθειακά

γ) Βρείτε την σχετική θέση των  $A,B,\Gamma$ .

### Άσκηση 29

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \left(\frac{1}{2}, -4\right)$  και  $\vec{\beta} = (8,6)$  καθώς και τα  $\vec{x}, \vec{y}$ , ώστε να ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{x} - 3\vec{y} = \vec{\alpha}$$

$$2\vec{x} + \vec{y} = \vec{\beta}$$

α) Βρείτε τα διανύσματα  $\vec{x}$  και  $\vec{y}$ .

β) Να αναλύσετε το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = (4, -2)$  σε δύο συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις των  $\vec{x}$  και  $\vec{y}$

### Άσκηση 30

Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Α(-1,2) και Δ(2,3). Αν το σημείο Β ανήκει στην ευθεία  $y=x$  και το κέντρο του παραλληλογράμμου Κ ανήκει στον άξονα  $yy'$ , βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β,Κ,Γ.

### Άσκηση 31

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (2,2)$  και  $\vec{\beta} = (1, -\sqrt{3})$

Βρείτε την γωνία των δύο διανυσμάτων.

### Άσκηση 32 του συναδέλφου Μπάρλα Αναστάσιου

Έστω ότι τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ , έχουν συντελεστές διεύθυνσης τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 2(\lambda - 1)x - \lambda + 1$$

Βρείτε το  $\lambda$  ώστε τα διανύσματα να είναι συγγραμμικά

### Άσκηση 33

Έστω ότι τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (-2, -1)$  και  $\vec{\beta} = (7,2)$

α) Βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\chi} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

β) Βρείτε την γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  με τον άξονα  $xx'$

γ) Αναλύστε το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = (0,2)$  σε δύο συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$

δ) Βρείτε το διάνυσμα που είναι αντίρροπο με το  $\vec{\alpha}$  και έχει μέτρο διπλάσιο του μέτρου του  $\vec{\alpha}$