

Ασκήσεις στο Εσωτερικό Γινόμενο

① Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} και \vec{b} για τα οποία ισχύει $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ και $(\vec{a}, \vec{b})=60^\circ$

Υπολογίστε τα γινόμενα

α) $(2\vec{a}+4\vec{b})(3\vec{a}-2\vec{b})$

β) $(\vec{a}-3\vec{b})^2$

② Δίνονται δύο κάθετα διανύσματα \vec{a} και \vec{b} με $|\vec{a}|=\sqrt{6}$ και $|\vec{b}|=1$.

Αποδείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}$ και $\vec{v}=\vec{a}-3\vec{b}$ είναι μεταξύ τους κάθετα

③ Δίνονται δύο διανύσματα \vec{a}, \vec{b} με $\vec{a} \cdot \vec{b}=1$ και $|2\vec{a}-\vec{b}|=|2\vec{a}|$. Να βρείτε

i) Το $|\vec{b}|$

ii) Για ποιες τιμές του λ ισχύει η σχέση $|\vec{a}+\lambda\vec{b}|=|\vec{a}-2\lambda\vec{b}|$

④ (των συναδέλφων Καροχάση Βασιλείου)

Δίνονται τα διανύσματα \vec{a}, \vec{b} με $|\vec{a}|=4$ και $(\vec{a}, \vec{b})=\frac{\pi}{3}$. Αν ισχύει $\vec{a} \cdot (\vec{a}+2\vec{b})=28$

βρείτε

α) Το $\vec{a} \cdot \vec{b}$

β) Το $|\vec{b}|$

γ) Το γινόμενο $(\vec{a}-2\vec{b}) \cdot (2\vec{a}+\vec{b})$

⑤ Δίνεται τρίγωνο ABC με $A(2,3)$, $B(x,2-x)$ και $C(1,4)$. Αν ισχύει $|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|=5$

α) Βρείτε το x

β) Αν M, N τα μέσα των AB, AC αντίστοιχα

Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{GM} \cdot \vec{BN}$

⑥ Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, \lambda - 2)$ και $\vec{b} = (3, \lambda + 1)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Αν ισχύει $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (9\vec{a} + 10\vec{b})$

α) Βρείτε τον αριθμό λ

β) Για ποια τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ είναι κάθετο με το $\vec{\delta} = (\mu, \mu - 1)$

⑦ (των συναδέλφων Βασίλη Παπαδάκη)

Δίνονται τα διανύσματα \vec{a}, \vec{b} για τα οποία ισχύουν:

$$\vec{a} \perp \vec{b}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - 4\vec{b}) \quad \text{και} \quad |9\vec{a} + 3\vec{b}| = 5$$

α) Δείξτε ότι $|\vec{a}| = 2$ και $|\vec{b}| = 1$

β) Βρείτε το $|3\vec{a} + 8\vec{b}|$

⑧ Δίνονται τα διανύσματα \vec{a}, \vec{b} με $|\vec{a}| = 2$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\vec{r}_A = \vec{a} - \vec{b}$ και $\vec{r}_B = 3\vec{a} - 5\vec{b}$ και $|\vec{AB}| = \sqrt{48}$

α) Δείξτε ότι $|\vec{b}| = 2$

β) Βρείτε το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου $AB\Gamma$

⑨ Αν $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2}$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$ υπολογίστε την παράσταση

$$A = 2\vec{a}^2 - \vec{a}(\vec{a} + 2\vec{b}) + 4\vec{b} \cdot \vec{a}$$

10. Αν $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ δείξτε ότι $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = 0$

11. Αν $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ δείξτε ότι $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3} |\vec{a}|$

12. (των αδελφών Θόδωρου Παζώνη)

Βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = (1 - \kappa + 2\lambda, 1)$ και $\vec{v} = (2, \kappa^2 + 4\lambda^2)$ να είναι κάθετα.

13. Αν $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{\gamma}| = 2$ και $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{\gamma} = 8$ δείξτε ότι $\vec{a} = \vec{b} = \vec{\gamma}$

14. Αν $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ βρείτε την παράσταση $(\vec{a} + \vec{b})^3 \cdot \vec{a}$

15. Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} και \vec{b} με $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 5$, $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 1$ και $(\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Υπολογίστε τα μέτρα $|\vec{a}|$ και $|\vec{b}|$

16. Αν για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{a} + \vec{b} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{a}|}{2} = \frac{|\vec{b}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{5}$ δείξτε ότι $\vec{a} \perp \vec{b}$ και $\vec{b} \perp \vec{\gamma}$

17. Δείξτε ότι $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

18. (των αδελφών Θόδωρου Παζώνη)

Αν για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ τα $\vec{u} = \alpha + \lambda \vec{b}$ και $\vec{v} = \lambda \vec{a} - \vec{b}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και έχουμε $|\vec{a}| = 1$ δείξτε:

i) $\vec{a} \perp \vec{b}$ ii) $|\vec{b}| = 1$ iii) $|3\vec{a} + 4\vec{b}| = 5$

19 Δείξτε ότι

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{|\vec{a} + \vec{b}|^2 - a^2 - b^2}{2}$$

20 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων K του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$$\vec{AB} \cdot \vec{AK} + \vec{A\Gamma} \cdot \vec{AK} = 0$$

(ως συναρτήσεις ζώνων Λυγώτικα)

21. Εξετάστε αν τα διανύσματα \vec{u}, \vec{v} είναι κάθετα μεταξύ τους όταν

α) $\vec{u} = (\vec{b} \cdot \vec{a}) \vec{\gamma} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{\gamma}$ και $\vec{v} = \vec{a}$

β) $\vec{u} = \vec{b} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a}}{a^2}$ και $\vec{v} = \vec{a}$

22 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, M μέσο της $B\Gamma$ και AD το ύψος του.

Δείξτε ότι $\vec{AB}^2 - \vec{A\Gamma}^2 = 2 \vec{DM} \cdot \vec{B\Gamma}$

23 (ως συναρτήσεις ζώνων Λυγώτικα)

Έστω $\vec{a} = (1, 2)$ $\vec{b} = (3, 4)$ βρείτε τα διανύσματα \vec{p}, \vec{q} αν ισχύουν τα παρακάτω:

α) $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$

β) $\vec{p} \parallel \vec{b}$

γ) $\vec{q} \perp \vec{b}$

24 Αν $\vec{a} = (-3, 4)$ βρείτε το διάνυσμα \vec{b} αν $|\vec{b}| = 2$ και $\vec{b} \perp \vec{a}$

25 Αν για τα διανύσματα \vec{a}, \vec{b} ισχύει ότι $2|\vec{a}| = |\vec{b}|$ και $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}|$ τότε αποδείξτε ότι τα διανύσματα \vec{a}, \vec{b} είναι αντιστροφή.

26 (των συναρτησών ζώνων Αχρόωικε)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1,0)$ $B(5,2)$ και $\Gamma(1,2)$ Αν για δύο σημεία K, Λ ισχύει:

$$\vec{AK} = -4\vec{K\Gamma} \quad \text{και} \quad \vec{B\Lambda} = -4\vec{\Lambda\Gamma}$$

εξετάστε

α) αν το $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο

β) το είδος του τετραγώνου $AB\epsilon\Lambda$

γ) $\vec{A\eta} = \vec{AK} - \frac{1}{3}\vec{AB}$

27 (των συναρτησών Βροίτη Νουαδάν)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{\gamma}| = 3$ και $(\vec{b}, \vec{\gamma}) = 60^\circ$ και

$$3\vec{a} - \vec{b} + |\vec{b}| \cdot \vec{\gamma} = \vec{0}$$

α) Δείξτε ότι $|\vec{b}| = 6$

β) Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$ και $\vec{a} \cdot \vec{\gamma}$

γ) Βρείτε το $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{\gamma}|$

28 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1,2)$, $B(-1,1)$ και $\Gamma(3,5)$

α) Εξετάστε αν η γωνία \hat{A} είναι οξεία ή αμβλεία

β) Βρείτε το $\sin B$

29 Για τα διανύσματα \vec{a}, \vec{b} δίνεται ότι $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Δίνονται τα $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ και $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b}$

Υπολογίστε τα παρακάτω

- α) Το $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- β) Το $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ και
- γ) Το $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- δ) Το $\sigma_{\omega}(\vec{u}, \vec{v})$

30. Δίνονται τα διανύσματα \vec{a}, \vec{b} με $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$
 $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ και $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$.

- α) Βρείτε τα $|\vec{a}|$ και $|\vec{b}|$
- β) Έστω τα \vec{u}, \vec{v} με

$$\vec{u} + 2\vec{v} = 5\vec{a} + \vec{b} \quad \text{και} \quad 4\vec{v} - \vec{u} = \vec{a} + 5\vec{b}$$

- i) Γράψτε τα \vec{u}, \vec{v} ως γραμμικό συνδυασμό των \vec{a}, \vec{b}
- ii) Βρείτε το $\sigma_{\omega}(\vec{u}, \vec{v})$

31. (ως Βασική Παράδοση.)

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα \vec{a} και \vec{b}
 με $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Έστω περίκω ΑΒΓΔ με

$$\vec{AB} = 4\vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{AD} = 2\vec{a} - \vec{b}$$

Η διαγώνιος ΑΓ έχει μήκος 6 και ισχύει
 $\vec{AG} \cdot \vec{DB} = 36$

- α) Αποδείξτε ότι $|\vec{a}| = 1$ και $|\vec{b}| = 4$
- β) Βρείτε το μήκος της ΔΒ
- γ) Βρείτε την περίμετρο του ΑΒΓΔ
- δ) Βρείτε την γωνία Α του ΑΒΓΔ

32) Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1,2)$ $B(1+5, -1)$
 και $\Gamma(3, -1)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$
 Αν $\vec{AB} \cdot \vec{B\Gamma} = 3$ βρείτε

α) τον αριθμό λ

β) την προβολή του \vec{AB} πάνω στο $\vec{A\Gamma}$

33) Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $|\vec{AB}|=2$, $|\vec{A\Gamma}|=6$ και
 $(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = \frac{\pi}{3}$. Αν M το μέσο της $B\Gamma$ τότε

α) υπολογίστε το $|\vec{AM}|$

β) Δείξτε ότι $\text{προβ}_{\vec{AM}} \vec{AB} = \frac{5}{26} \cdot \vec{AM}$

34. Έστω τα \vec{a}, \vec{b} με $|\vec{b}|=4$ $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ και

$\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{1}{6} \vec{a}$ βρείτε

α) το $|\vec{a}|$

β) την $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{a}$ συντεταγμένη του \vec{b}

γ) το $|\vec{2a} - 5\vec{b}|$

35. Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB με $|\vec{AB}| = \sqrt{5}$
 Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M
 για τα οποία ισχύει

$$|\vec{BM}|^2 = 31 - 2 \vec{BM} \cdot \vec{AB}$$

36 Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB . Βρείτε τον γε
 των σημείων M για τα οποία ισχύει

$$|3\vec{MA} + 4\vec{MB}| = |3\vec{MA} - 4\vec{MB}|$$

37) Για τα \vec{a}, \vec{b} ισχύουν οι σχέσεις
 $2\vec{a} + 3\vec{b} = (4, -2)$ και $\vec{a} - 3\vec{b} = (-7, 8)$

α) Αποδείξτε ότι $\vec{a} = (-1, 2)$ και $\vec{b} = (2, -2)$

β) Βρείτε τον $k \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $k\vec{a} + \vec{b}$ και $2\vec{a} + 3\vec{b}$ να είναι κάθετα

γ) Αναλύστε το $\vec{\gamma} = (3, -1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο \vec{a}

38) Αν $P\vec{A} + P\vec{B} - 2P\vec{\Gamma} = \vec{0}$ και $|P\vec{A}| = 6$
 και $|P\vec{B}| = |P\vec{\Gamma}| = 2\sqrt{3}$ αποδείξτε ότι:

α) τα A, B, Γ είναι συνευθειακά

β) το Γ είναι ανάμεσα στα A και B

γ) $\widehat{APB} = 90^\circ$

δ) το $\vec{v} = P\vec{B} + P\vec{\Gamma}$ είναι κάθετο στο $A\vec{\Gamma}$

39) (ως συνθετική Βρείτε Παρασκευή)

Δίνονται τα \vec{a}, \vec{b} με $|\vec{a}| = 1$ και $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$
 θεωρούμε το διάνυσμα \vec{v} με
 $(\vec{a} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} = 8 \text{ προβ}_\vec{v} \vec{v} + 4\vec{b}$

α) Δείξτε ότι $\vec{a} \cdot \vec{v} = 4$

β) Γράψτε το \vec{v} ως γραμμικό συνδυασμό των \vec{a}, \vec{b}

γ) Αν επιλέξω ως χύμα $\vec{v}(\vec{a} - \vec{b}) = -28$
 βρείτε τον γωνία (\vec{a}, \vec{b})

(40)

Δίνονται τα \vec{a}, \vec{b} με $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ για τα οποία ισχύει

$$\vec{a}(\vec{a} + 3\vec{b}) = -26 \quad \text{και} \quad \vec{a}(3\vec{a} + \vec{b}) = 38$$

να βρείτε:

α) τα $|\vec{a}|$ και $|\vec{b}|$

β) το γινόμενο $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$

γ) το $|\vec{a} + 3\vec{b}|$

δ) Για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{v} = \lambda\vec{a} + \vec{b}$ και $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ είναι κοίτα;

(41)

Εστω \vec{a}, \vec{b} με $|\vec{a}| = 1$ και $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (4\vec{a} - \vec{b})$
και $(\vec{a} + 2\vec{b}) \perp (2\vec{a} - \vec{b})$

α) Αποδείξτε ότι $\vec{a} \perp \vec{b}$ και βρείτε το $|\vec{b}|$

β) Εστω το $\vec{\gamma} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ και $\vec{\delta} = 6\vec{a} - \vec{b}$

i) Δείξτε ότι $|\vec{\gamma}| = 5$

ii) Γράψτε τον προσγ $\vec{\delta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\gamma}$ και \vec{b}