Π Α Ρ Α Γ Ω Γ Ο Ι

§ 5.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ-ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

- Δίνεται μιά συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Αν υπάρχει στο **R**, τό $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ τότε αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με **f ΄(x_0)** ή $\dfrac{\mathbf{df(x_0)}}{\mathbf{dx}}$ ή $\dfrac{\mathbf{df(x)}}{\mathbf{dx}}\Big|_{\mathbf{x=x_0}}$.

Παραδείγματα:

α) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}3x^2, & x\le 0\\ 3x+1, & x>0\end{cases}$, τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3x+1}{x}=+\infty\notin\mathbf{R}$, άρα δεν υπάρχει η f ΄(0).

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}3x^2, & x\le 0\\ 6x, & x>0\end{cases}$, τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{6x}{x}=6$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3x^2}{x}=0$, επομένως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$, άρα δεν υπάρχει η f ΄(0).

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}3x^2, & x\le 0\\ 0, & x>0\end{cases}$, τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{0}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3x^2}{x}=0$, επομένως υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ και ισούται με 0. Άρα f ΄(0)=0.

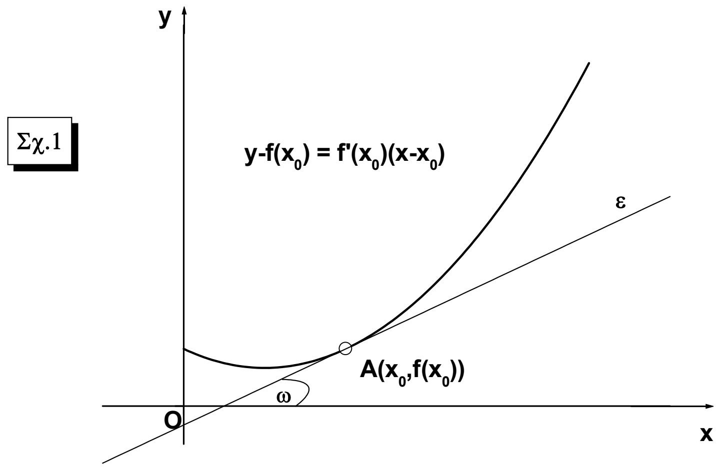
- ***Ισοδύναμος ορισμός της παραγώγου***

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- ***Εφαρμογή της παραγώγου στή φυσική***

Ένα κινητό που κινείται κατά μήκος ενός άξονα, την χρονική στιγμή t βρίσκεται στη θέση με τετμημένη s(t). Τότε η στιγμιαία ταχύτητα $\upsilon(t_0)$ του κινητού την χρονική στιγμή t_0, ισούται μέ $s'(t_0)$, δηλαδή $\upsilon(t_0)=s'(t_0)$.

- ***Γεωμετρική Σημασία της παραγώγου***



Όταν υπάρχει η παράγωγος μιας συναρτήσεως f στη θέση x_0, τότε η ευθεία ε (βλ. Σχ.1), με εξίσωση:

$$\mathbf{y-f(x_0)=f\,'(x_0)(x-x_0)}$$

είναι η εφαπτομένη της C_f, στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$. Ο συντελεστής διευθύνσεως της ε, ισούται με: $\lambda_\varepsilon=\varepsilon\varphi\omega=f\,'(x_0)$.

Προσοχή

Όταν το κινητό κινείται πάνω στον άξονα προς τα δεξιά, τότε αν $t>t_0$ προφανώς και $s(t)>s(t_0)$ άρα $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}>0$, επομένως $\lim\limits_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\upsilon(t_0)\geq 0$.

Ανάλογα όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά τότε $\upsilon(t_0)\leq 0$.

Θεώρημα: Μια συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο x_0 είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Προσοχή

α) Μια συνεχής συνάρτηση στο x_0, δεν είναι οπωσδήποτε και παραγωγίσιμη στο x_0, (βλ. Παραδείγματα το β)).

β) Μια μη συνεχής συνάρτηση στο x_0, δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, γιατί αλλιώς η παραγωγισιμότητα θα συνεπάγετο την συνέχεια πράγμα άτοπο.

- Αν μία συνάρτηση f έχει παράγωγο για κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της A, θα λέγεται **παραγωγίσιμη** στο A. Ορίζεται έτσι μια καινούργια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A, η οποία κάθε $x \in A$, το αντιστοιχεί στο $f'(x)$. Είναι προφανές αν η f παραγωγίζεται σ' ένα σύνολο $A' \subseteq A$ τότε η f' ορίζεται στο A'.

  Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται η **δεύτερη παράγωγος** της f η f'' και ούτω καθ' εξής. Γενικότερα η $f^{(\nu)}(x)$, δηλαδή **η νιοστή παράγωγος της f** ορίζεται ως εξής:

  $$\mathbf{f^{(\nu)}(x)=(f^{(\nu-1)}(x))'}, \text{ για κάθε } \nu>2.$$

Λυμένες Ασκήσεις

$\boxed{1}$ **Δίνεται η συνάρτηση** $\mathbf{f(x)=\begin{cases} x^2 & x \le k \\ 2kx-k^2 & x>k \end{cases}}$**. Να δειχτεί ότι υπάρχει η** $\mathbf{f'(k)}$**, για κάθε** $\mathbf{k \in R}$**.**

Λύση:

Ισχύει $\lim\limits_{x\to k^+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=\lim\limits_{x\to k^+}\frac{2kx-k^2-k^2}{x-k}=\lim\limits_{x\to k^+}\frac{2k(x-k)}{x-k}=\lim\limits_{x\to k^+}2k=2k$. Επίσης $\lim\limits_{x\to k^-}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=$ $\lim\limits_{x\to k^-}\frac{x^2-k^2}{x-k}=\lim\limits_{x\to k^-}(x+k)=2k$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to k}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}=2k$, δηλαδή $f'(k)=2k$, $k \in \mathbf{R}$.

$\boxed{2}$ **Να εξεταστεί αν η συνάρτηση** $\mathbf{f(x)=\begin{cases} 3x^2+1 & x \ge 1 \\ \eta\mu x & x<1 \end{cases}}$ **είναι παραγωγίσιμη στη θέση** $\mathbf{x_0=1}$**.**

Λύση:

Α^{ος} τρόπος: Παρατηρώ ότι $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=4$, ενώ $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\eta\mu 1\neq 4$, επομένως η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$,επομένως δεν είναι και παραγωγίσιμη στο 1.

$B^{ος}$ *τρόπος:* $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{ημx-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(ημx-4)\cdot\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}$ =(ημ1-4)(-∞)=+∞, αφού ημ1-4<0, επομένως δεν υπάρχει η $f\,'(1)$.

$\boxed{3}$ **Να βρεθεί η παράγωγος της συναρτήσεως f(x)=** $\begin{cases} \mathbf{x^6 συν\frac{1}{x}+5} & \mathbf{x\neq 0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{x=0} \end{cases}$ **στο x_0=0.**

Λύση:

Ισχύει διαδοχικά $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^6συν\frac{1}{x}+5-5}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^5συν\frac{1}{x})$.

Όμως $|x^5συν\frac{1}{x}|=|x^5|\cdot|συν\frac{1}{x}|\leq|x|^5$, εφόσον $|συν\frac{1}{x}|\leq 1$.

Άρα $-|x|^5\leq x^4συν\frac{1}{x}\leq|x|^5$. Όμως $\lim\limits_{x\to 0}(|x|^5)$ =0 και από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνω ότι $\lim\limits_{x\to 0}(x^5συν\frac{1}{x})$ =0, επομένως f ΄(0)=0.

Προσοχή

Όταν ζητάμε το όριο μιας συναρτήσεως που περιέχει ημίτονο ή συνημίτονο, η αντιμετώπιση συνήθως γίνεται:

α) Με τη βοήθεια των ανισοτήτων $|ημx|\leq 1$, $|συνx|\leq 1$ και του κριτηρίου παρεμβολής.

β) Με τη βοήθεια των τύπων $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημx}{x}=1$ ή $\lim\limits_{x\to 0}\frac{συνx-1}{x}=0$.

$\boxed{4}$ **Υπάρχει η παράγωγος της συναρτήσεως f:R→R με f(x)=$|x^2+x-2|$, στη θέση x_0=-2;**

Λύση:

Το τριώνυμο x^2+x-2 έχει ρίζες τους αριθμούς -2 και 1, γίνεται δε θετικό (ομόσημο του α=1), για τιμές του x εκτός του διαστήματος των ριζών, δηλαδή όταν x∈(-∞,-2)∪(1, +∞).

Επομένως η συνάρτηση γράφεται $f(x)=\begin{cases} x^2+x-2 & x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty) \\ -x^2-x+2 & x\in[-2,1] \end{cases}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{-x^2-x+2}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{-(x-1)(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^+}\left[-(x-1)\right]=3$, και με όμοιο τρόπο $\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x+2}=-3$. Άρα αφού τα δύο πλευρικά όρια δεν συμπίπτουν, δεν υπάρχει η $f'(-2)$.

Προσοχή

Όταν η συνάρτηση έχει απόλυτα για να βρούμε την παράγωγο πρέπει να απαλλαγούμε κατάλληλα από τα απόλυτα.

$\boxed{5}$ Δίνεται η συνάρτηση f(x) για την οποία ισχύει: $x-x^2\le f(x)\le x+x^2$ (1) για κάθε $x\in R$. Να βρεθεί το $f'(0)$.

Λύση:

Για x=0 η ανισοτική σχέση (1) γράφεται $0\le f(0)\le 0$, επομένως $f(0)=0$.

Επίσης (1) $\Leftrightarrow x-x^2\le f(x)-f(0)\le x+x^2 \Leftrightarrow x(1-x)\le f(x)-f(0)\le x(1+x)$ (2).

Για x>0, η (2) είναι ισοδύναμη με την $1-x\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le 1+x$, επομένως, αφού $\lim\limits_{x\to0^+}(1-x)=\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)=1$, από το κριτήριο παρεμβολής, θα ισχύει $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$.

Αντίστοιχα για x<0 ισχύει $1-x\ge\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\ge 1+x$, οπότε όπως προηγουμένως $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$, επομένως $f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$.

Προσοχή

Όταν για μια συνάρτηση έχουμε μια διπλή ανισοτική σχέση και ζητείται η συνέχεια σ' ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, ή η παράγωγος σ' αυτό το σημείο, τότε χρησιμοποιούμε το κριτήριο παρεμβολής.

$\boxed{6}$ **Σε ποια σημεία της γραφικής παραστάσεως της $f(x)=x^3$ η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τη χορδή που έχει άκρα τα σημεία (0,0), (1,1); Να βρεθούν οι γωνίες που σχηματίζουν οι παραπάνω εφαπτομένες με τον οριζόντιο άξονα.**

Λύση:

Η χορδή με άκρα τα σημεία (0,0) και (1,1), έχει συντελεστή διευθύνσεως $\lambda=\frac{1-0}{1-0}=1$. Τον ίδιο συντελεστή πρέπει να έχουν και οι εφαπτόμενες, δηλαδή πρέπει $f'(x_0)=1$. Όμως $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(x^2+xx_0+x_0^2\right)=3x_0^2$. Άρα $x_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Επομένως τα ζητούμενα σημεία είναι τα $(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{9})$. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες με τον οριζόντιο άξονα τότε $εφω = f'(\pm\frac{\sqrt{3}}{3})=1$, επομένως $ω=45^0$.

$\boxed{7}$ **Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$.**

Λύση:

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το **R**. Ισχύει $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}-\frac{x_0^2}{x_0^2+1}}{x-x_0}$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{x^2\left(x_0^2+1\right)-x_0^2\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x_0^2+1\right)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2\left(x_0^2+1\right)-x_0^2\left(x^2+1\right)}{\left(x-x_0\right)\left(x^2+1\right)\left(x_0^2+1\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{\left(x-x_0\right)\left(x^2+1\right)\left(x_0^2+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{x+x_0}{\left(x^2+1\right)\left(x_0^2+1\right)}=\frac{2x_0}{\left(x_0^2+1\right)^2}.$$

Άρα $f'(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in$**R**.

$\boxed{8}$ Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(3+h)=h+2+\sqrt{9+h}$ (1) για κάθε h≥-9,

α) Να βρεθεί το f(3)

β) Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=3$ και να βρεθεί το f΄(3).

Λύση:

α) Για h=0 η (1) γράφεται $f(3)=2+\sqrt{9}=5$.

β) $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+2+\sqrt{9+h}-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-3+\sqrt{9+h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h-3+\sqrt{9+h})(h-3-\sqrt{9+h})}{h(h-3-\sqrt{9+h})}=$

$\lim_{h\to 0}\frac{(h-3)^2-9-h}{h(h-3-\sqrt{9+h})}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-7h}{h(h-3-\sqrt{9+h})}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h-7)}{h(h-3-\sqrt{9+h})}=\lim_{h\to 0}\frac{h-7}{h-3-\sqrt{9+h}}=\frac{7}{6}$. Άρα f΄(3)= $\frac{7}{6}$.

$\boxed{9}$ Για τη συνάρτηση g ισχύει για κάθε $x\in R$ $|g(x)-\alpha|\le(x-\alpha)^2$ (1). Να δειχθεί ότι:

α) g(α)=α και g′(α)=0.

β) η ευθεία y=α εφάπτεται της γραφικής παραστάσεως της g στο A(α,g(α)).

Λύση:

α) Θέτοντας στην (1) x=α, έχω τη σχέση $|g(\alpha)-\alpha|\le(\alpha-\alpha)^2 \Leftrightarrow |g(\alpha)-\alpha|\le 0$, όμως $|g(\alpha)-\alpha|\ge 0$, άρα $g(\alpha)-\alpha=0 \Leftrightarrow g(\alpha)=\alpha$.

Η (1) είναι ισοδύναμη με την $-(x-\alpha)^2\le g(x)-\alpha\le(x-\alpha)^2 \Leftrightarrow -(x-\alpha)^2\le g(x)-g(\alpha)\le(x-\alpha)^2$ (2).

Έστω x>α, διαιρώντας την (2) με x-α παίρνω τη σχέση $-(x-\alpha)\le\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}\le x-\alpha$ και επειδή $\lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)=0$, από το θεώρημα παρεμβολής, συμπεραίνω πως $\lim_{x\to\alpha^+}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}=0$.

Αν x<α και διαιρέσω την (2) με x-α παίρνω τη σχέση $-(x-\alpha)\ge\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}\ge x-\alpha$ και όπως προηγουμένως συμπεραίνω πως $\lim_{x\to\alpha^-}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}=0$, επομένως g΄(α)=0.

β) Η εφαπτομένη της C_g στο A(α,g(α)) έχει εξίσωση $y-g(\alpha)=g'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y-\alpha=0$.

$\boxed{10}$ Δίνεται η συνάρτηση f(x), με πεδίο ορισμού το A. Αν υπάρχει η $f'(a)$ όπου $a\in A$, να δειχθεί ότι: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a)$.

Λύση:

Εφόσον υπάρχει η $f'(a)$, υπάρχει και το όριο $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Όμως $\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}=\dfrac{xf(a)-af(x)+af(a)-af(a)}{x-a}=\dfrac{f(a)(x-a)-a(f(x)-f(a))}{x-a}=\dfrac{f(a)(x-a)}{x-a}-\dfrac{a(f(x)-f(a))}{x-a}=f(a)-\dfrac{a(f(x)-f(a))}{x-a}$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a(f(x)-f(a))}{x-a}=f(a)-a\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f(a)-af'(a)$.

$\boxed{11}$ Αν η f είναι συνεχής στο R και ισχύει: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+x^2+3x}{x-2}=5$,

α) Να βρεθεί το f(2).

β) Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ και να βρεθεί το $f'(2)$.

Λύση:

α) Θέτω $g(x)=\dfrac{f(x)+x^2+3x}{x-2}$ για $x\neq 2$, τότε $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=5$ και $(x-2)g(x)=f(x)+x^2+3x \Leftrightarrow$ $f(x)=(x-2)g(x)-x^2-3x$, επομένως $f(2)=-2^2-3\cdot 2=-10$.

β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)g(x)-x^2-3x+10}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}g(x)-\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}=5-\lim\limits_{x\to 2}(x+5)=5-7=-2$.

$\boxed{12}$ Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο R. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ και $g(x)=|x^2-x|\cdot f(x)$. Δείξτε ότι αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, θα είναι $f(1)=0$.

Λύση:

Εφόσον η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$ (1).

Η g(x) όμως παραγωγίζεται στο $x_0=1$, επομένως το $\alpha=g'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}\in\mathbf{R}$. Όμως

$$\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\frac{|x^2-x|f(x)-0}{x-1}=\frac{|x(x-1)|f(x)}{x-1}=\frac{x(x-1)f(x)}{x-1}=xf(x) \text{ για } x>1.$$

Επομένως $\alpha=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(xf(x)\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}x\cdot\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1\cdot f(1)=f(1)$, επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Αν τώρα $x\in(0,1)$ οπότε $x(x-1)<0$, τότε $\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\dfrac{|x(x-1)|f(x)}{x-1}=-\dfrac{x(x-1)f(x)}{x-1}=-xf(x)$.

Όμως τότε $\alpha=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(-xf(x)\right)=-f(1)$. Επειδή όμως υπάρχει το $g'(1)$, θα πρέπει $f(1)=-f(1)\Leftrightarrow f(1)=0$.

$\boxed{13}$ **Αν** $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx & x\le 1\\ \sqrt{x+3} & x>1\end{cases}$ **να βρεθούν τα a, b έτσι ώστε να υπάρχει το** $f'(1)$**.**

Λύση:

Αναγκαία συνθήκη για να είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση στο 1, είναι να είναι συνεχής στο 1. Άρα πρέπει $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)\Leftrightarrow 2=\alpha+\beta$.

Ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\dfrac{1}{4}$.

Αλλά θα πρέπει και $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{1}{4}$.Όμως $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\alpha x^2+(2-\alpha)x-2}{x-1}$, αφού $f(1)=2$. Άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(\alpha x+2)(x-1)}{x-1}=\alpha+2$. Επομένως πρέπει $\alpha+2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\alpha=-\dfrac{7}{4}$,

οπότε $\beta=2-(-\dfrac{7}{4})=\dfrac{15}{4}$.

$\boxed{14}$ Οι συναρτήσεις f, g ορίζονται στο A=(-π/8, π/8) και είναι παραγωγίσιμες στο x_0=0. Αν για κάθε x∈A ισχύει $[f(x)]^2+[g(x)]^2$ = xημ4x, να δειχθεί ότι f(0)=g(0)=0 και $[f'(0)]^2+[g'(0)]^2=4$.

Λύση:

Εφόσον $[f(x)]^2+[g(x)]^2$=xημ4x (1), για x=0 έχω $[f(0)]^2+[g(0)]^2=0 \Leftrightarrow$ f(0)=g(0)=0. (βλ. τη σημείωση: *«Προσοχή»* της ασκ.13, σελ.)

Σύμφωνα με την υπόθεση οι f,g είναι παραγωγίσιμες στο 0,επομένως ισχύει

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ και $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}$. Διαιρώ και τα δύο μέλη της (1) με το x^2, τότε $\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2=\frac{ημ4x}{x}$, επομένως $\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right)^2+\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\right)^2=$

$4\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημ4x}{4x}\Leftrightarrow[f'(0)]^2+[g'(0)]^2=4$.

$\boxed{15}$ Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R για την οποία ισχύει ότι $|f(x)-α| \le (x-α)^2$ για κάθε α∈R. Δείξτε ότι η ευθεία y=α είναι εφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως της f στο σημείο x_0=α.

Λύση:

Εφαρμόζω την ανισοτική σχέση $|f(x)-α|\le(x-α)^2$ για x=α. Τότε $|f(α)-α|\le(α-α)^2 \Leftrightarrow |f(α)-α|\le 0$, άρα $|f(α)-α|=0 \Leftrightarrow f(α)=α$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παραστάσεως της f στο (α,α) έχει εξίσωση $y-f(α)=f'(α)(x-α)$ (1). Θα υπολογίσουμε την $f'(α)$.

$f'(α)=\lim\limits_{x\to α}\frac{f(x)-f(α)}{x-α}=\lim\limits_{x\to α}\frac{f(x)-α}{x-α}$. Όμως $-(x-α)^2\le f(x)-α\le(x-α)^2$. Αν x>α τότε $-(x-α)\le\frac{f(x)-α}{x-α}\le(x-α)$ και μιας και $\lim\limits_{x\to α}(x-α)=0$, από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι

$\lim\limits_{x\to α^+}\frac{f(x)-α}{x-α}=0$. Ομοίως όταν x<α, επομένως $f'(α)=0$.

Τότε η (1) γράφεται $y-α=0(x-α) \Leftrightarrow y=α$.

$\boxed{16}$ Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο R για την οποία ισχύει f(2)=f(3) και ότι υπάρχουν οι παράγωγοι $f'(2)$ και $f'(3)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση g με g(x)=$\begin{cases} f(3x-1) & x \le \frac{4}{3} \\ f(3x-2) & x > \frac{4}{3} \end{cases}$. Να δειχθεί ότι η g παραγωγίζεται στο $\frac{4}{3}$ αν και μόνο αν $f'(2)=f'(3)$.

Λύση:

Ισχύει: $l_1=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{g\left(h+\frac{4}{3}\right)-g\left(\frac{4}{3}\right)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(3h+2)-f(3)}{h}$, θέτω $t=3h\to 0^+$, επομένως $l_1=3\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t+2)-f(3)}{t}$.

Επίσης $l_2=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{g\left(h+\frac{4}{3}\right)-g\left(\frac{4}{3}\right)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(3h+3)-f(3)}{h}=3\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{f(t+2)-f(3)}{t}$.

Όμως υπάρχει η $f'(2)$ επομένως ισχύει $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h+2)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h+2)-f(3)}{h}$

ενώ $f'(3)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h+3)-f(3)}{h}$.

Κατόπιν όλων αυτών έχουμε τις ισοδυναμίες:

$l_1=l_2 \Leftrightarrow 3\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t+2)-f(3)}{t}=3\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{f(t+2)-f(3)}{t} \Leftrightarrow f'(2)=f'(3)$.