Διανύσματα-Πράξεις

1 Στις πλευρές του τριγώνου ABC, κατασκευάζουμε εξωτερικά τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα ABML, BCPN, ACQR. Δείξτε ότι: α) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RL}=\vec{0}$ β) τα ευθύγραμμα τμήματα, RL, MN, PQ είναι δυνατόν να είναι πλευρές τριγώνου;

2 Δίνεται τρίγωνο ABC στο οποίο $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{q}$. Εκφράσατε τα διανύσματα $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{CM}$, όπου K, L, M τα μέσα των πλευρών BC, AC, AB αντίστοιχα, συναρτήσει των $\vec{p}$, $\vec{q}$.

3 Στο παραλληλεπίπεδο ABCDA′B′C′D′, $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{q}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{r}$. Να υπολογίσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{D'B'}$, $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{D'B}$, $\overrightarrow{DB'}$, συναρτήσει των $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

4 Να δειχθεί ότι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι τα διανύσματα $\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{p}-\vec{q}$ συγγραμμικά., είναι τα $\vec{p}$, $\vec{q}$, να είναι συγγραμμικά.

5 Στο παραλληλόγραμμο ABCD, O είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του και M αυθαίρετο σημείο διαφορετικό του O. Να βρεθεί αν υπάρχει $\lambda\in\mathbf{R}$, τέτοιο ώστε $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\lambda\overrightarrow{MO}$. (λ=4)

6 Δείξτε ότι αν τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{p}$, $\vec{q}$, είναι μη συγγραμμικά και ισχύει $\chi\vec{p}+\psi\vec{q}=\vec{0}$, τότε $\chi=\psi=0$. ($\chi,\psi\in\mathbf{R}$)

7 Να βρεθεί το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ στο οποίο ισχύει $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{A\Gamma}$

8 Αν κ, λ, μ, ν $\in\mathbf{R}$, $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά, μη συγγραμμικά διανύσματα και $\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=\mu\vec{\alpha}+\nu\vec{\beta}$ τότε $\kappa=\mu$ και $\lambda=\nu$.

9 Δίνονται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί σημείο Μ του επιπέδου του τέτοιο ώστε:

α) $2\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}=\vec{0}$, β) $\vec{MA}=9\vec{MB}-6\vec{M\Gamma}$.

10 Αν για τα σημεία Α, Β, Γ, Μ ισχύει $\vec{AM}=\mu\vec{AB}+(1-\mu)\vec{A\Gamma}$ όπου $\mu\in\mathbf{R}$. Να δειχθεί ότι τα Β, Γ, Μ είναι συνευθειακά.

11 Αν για τα σημεία Α, Β, Γ, Ρ ισχύει: $3\vec{PA}-\vec{PB}-2\vec{P\Gamma}=\vec{0}$ να δειχθεί ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

12 Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Δ της ΒΓ. Αν για το σημείο Ε του επιπέδου είναι $\vec{\Delta E}=\vec{A\Delta}+\vec{\Delta B}+\vec{\Delta\Gamma}$, να δειχθεί ότι το ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.

13 Αν για τα σημεία Α, Β, Γ, Δ ισχύει $\vec{A\Gamma}+\vec{\Delta B}=\vec{A\Delta}+\vec{\Gamma B}$, να δειχθεί ότι τα τέσσερα αυτά σημεία δεν είναι διακεκριμένα.

14 Δίνεται τρίγωνο ΑΟΒ με $\vec{OA}=6\vec{\alpha}$, $\vec{OB}=6\vec{\beta}$, $\vec{OM}=3\vec{\alpha}$, $\vec{A\Delta}=\frac{2}{3}\vec{AB}$ και $\vec{OE}=\vec{A\Delta}$.

α) Να εκφρασθούν τα $\vec{AB}$, $\vec{O\Delta}$ και $\vec{ME}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

β) Να δειχθεί ότι αν $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=\vec{0}$ τότε λ=μ=0.

γ) Αν η ΑΕ τέμνει την ΟΒ στο Γ και ισχύει $\vec{O\Gamma}=\nu\vec{\beta}$, να υπολογισθεί το ν. (ν=12/5)

15 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ,Ε,Ζ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\vec{A\Delta}=\kappa\vec{AB}$, $\vec{BE}=\lambda\vec{B\Gamma}$, $\vec{\Gamma Z}=\mu\vec{\Gamma A}$, όπου $\kappa,\lambda,\mu\in\mathbf{R}$.

α) Ν' αποδειχθεί ότι $\vec{A\Delta}+\vec{BE}+\vec{\Gamma Z}=\vec{0}$ αν και μόνο αν κ=λ=μ.

β) Να δειχθεί ότι αν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα και ισχύει $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=\vec{0}$ τότε λ=μ=0.

γ) Έστω Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{K\Gamma}=\vec{0}$. Αν $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma Z}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\Gamma A}$, να δειχθεί ότι και $\overrightarrow{K\Delta}+\overrightarrow{KZ}+\overrightarrow{KE}=\vec{0}$.

16 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΓ και ΒΓ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\Gamma A}$ και $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{E\Gamma}$. Αν $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Gamma E}=\vec{\beta}$,

α) Να εκφρασθούν τα $\overrightarrow{\Delta B}$ $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{\Delta E}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Αν $\overrightarrow{\Delta M}=\lambda\overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{EM}=\mu\overrightarrow{EA}$, να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\lambda(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})+\mu(3\vec{\alpha}-\vec{\beta})$. Στην συνέχεια να υπολογισθούν τα λ,μ καθώς και ο λόγος $\frac{EM}{MA}$. (λ=2/5, μ=1/5, 1/4)

17 Δίνονται δύο διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ μη συγγραμμικά. Αν τα διάφορα μεταξύ τους διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, με $\vec{x}=(\lambda+2)\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$ και $\vec{y}=\vec{\alpha}+(\lambda-3)\vec{\beta}$ είναι παράλληλα να υπολογισθεί το λ. (λ=2)

18 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α και σημείο Μ με την ιδιότητα $\left|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}\right|=2\alpha$. Να δειχθεί ότι το Μ βρίσκεται σε κύκλο ο οποίος να προσδιορισθεί. ((Κ, $\frac{2\alpha}{3}$), $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A\Delta}$)