Συντεταγμένες στο Επίπεδο

1 Δύο σωματίδια κινούνται έτσι ώστε να έχουν διανύσματα θέσεως $\vec{r} = (3t+2t^2)\vec{i} + (4+4t^2)\vec{j}$ και $\vec{s} = (20-t-t^2)\vec{i} + (10+9t-2t^2)\vec{j}$, όπου το t παριστάνει χρόνο σε s, ενώ οι αποστάσεις μετρούνται σε μέτρα.

α) Ποια η θέση των δύο σωματιδίων όταν t = 0s;

β) Να αποδειχθεί ότι τα δύο σωματίδια θα συγκρουσθούν, πότε θα συμβεί αυτό;

γ) Να βρεθεί η απόστασή τους από την αρχή των αξόνων την στιγμή της συγκρούσεως.

2 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{r} = 4\alpha\vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{s} = (2\beta-2-\beta^2)\vec{i} + (\alpha-1)\vec{j}$ με α, β∈**R**. Να βρεθούν τα α, β έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{r}, \vec{s}$ να είναι συγγραμμικά.

3 Σ' ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ, δίνονται τα σημεία Ε, Ζ τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB}$ και $\overrightarrow{\Delta Z} = 2\overrightarrow{Z\Gamma}$. Δείξτε ότι τα μέσα των ΑΔ, ΕΖ και ΒΓ είναι συνευθειακά.

4 Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 8cm, ΑΔ = 3cm και σημείο Ε τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{A\Gamma}$. Έστω Ζ το σημείο τομής των ΑΒ και ΔΕ και Θ το σημείο τομής της ΑΔ με την παράλληλη προς την ΒΔ που διέρχεται από το Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα αξόνων με αρχή το Α και μοναδιαία διανύσματα $\vec{i} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ και $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Delta}$ είναι ορθοκανονικό.

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Β, Γ, Δ, Ε, Ζ και Θ ως προς το παραπάνω σύστημα.

γ) Να δειχθεί ότι τα σημεία Β, Ε και Θ είναι συνευθειακά.

5 Δείξτε ότι κάθε διάνυσμα του επιπέδου μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων (2, 1) και (3, 1).

6 Για ποιες τιμές του λ τα διανύσματα (λ+3, λ+1), (-3, λ-1) είναι μη συγγραμμικά; Για τις ευρεθείσες τιμές του λ ν' αποδειχθεί ότι κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των ανωτέρω διανυσμάτων.

7 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(3, -2) $\vec{\beta}$=(2λ-μ, λ+2μ-4) και $\vec{\gamma}$=(λ-3μ+2, -3λ+3μ-2). Να βρεθεί η σχέση των λ, μ έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ και (-3, 4) να είναι συγγραμμικά. (μ-6λ=-4)

8 Δίνονται τα σημεία Α(-1,2), Β(3,-1) και Γ(5,1) και ζητούνται οι συντεταγμένες της κορυφής Δ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. (1,4)

9 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(συν3φ, ημφ) $\vec{\beta}$=(συνφ, ημφ), όπου ημφ·συνφ≠0, όπου φ∈**R**. Να δειχθεί ότι:

α) Αν $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=0$ τότε λ=μ=0.

β) Αν $\vec{\gamma}$=(συν2φ, ημ2φ) τότε το $\vec{\gamma}$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

10 α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(-1, 1/2), $\vec{\beta}=(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Δείξτε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma}$=(-2, 1) μπορεί να γραφεί με άπειρους τρόπους σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$= (-3, 4), $\vec{\beta}$= (-5,3). Δείξτε ότι κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

11 Δίνονται τα σημεία Α(α,0), $B(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha\sqrt{3}}{2})$, όπου α>0.

α) Να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο.

β) Αν Ρ είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου, τέτοιο ώστε ΡΟ=3, ΡΒ=4, ΡΑ=5, να υπολογισθεί το α (25+12√3)