β') Ἐάν, τέλος, ἡ $|\sigma(x)|$ δύναται νὰ λάβῃ τιμάς, ὅσον μεγάλας θέλομεν, ἀρκεῖ νὰ δόσωμεν εἰς τὸν x τιμὰς *ἀρκετὰ μεγάλας* κατ' ἀπόλυτον τιμήν, τότε λέγομεν ὅτι ἡ $\sigma(x)$ τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, τοῦ x τείνοντος πρὸς τὸ ∞.

ΜΙΧΑΗΛ ΜΑΝΩΛΟΠΟΥΛΟΣ

«Λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις σ(x) ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον, τοῦ x τείνοντος πρὸς τὸ ἄπειρον, ἐάν, ὅσον μεγάλος καὶ ἂν εἶναι ὁ θετικὸς ἀριθμὸς M, ὑπάρχει πάντοτε μία ἀντίστοιχος περιοχὴ τοῦ ἀπείρου, ἐντὸς τῆς ὁποίας ἡ συνάρτησις λαμβάνει τιμάς, ὅλας, ἀπολύτως μεγαλυτέρας τοῦ M».

Τὸ γεγονὸς τοῦτο συμβολίζομεν: $\underset{x \to \infty}{\text{op}}\ \sigma(x) = \infty$.

Δηλαδή, ἂν δοθέντος οἱουδήποτε $M > 0$, ὑπάρχῃ ἕνας ἀντίστοιχος ἀριθμὸς $A > 0$ τοιοῦτος, ὥστε:

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

ἡ $\sigma(x)$ νὰ πληροῖ τὴν ἀνισότητα $|\sigma(x)| > M$,

ὅταν τὸ x πληροῖ τὴν ἀνισότητα $|x| > A$,

Προσεγγίσεις – Εννοιών - Δυσκολίες

τότε: $\underset{x \to \infty}{\text{op}}\ \sigma(x) = \infty$

$$(\forall M > 0,\ \exists A > 0 : |x| > A \Longrightarrow |\sigma(x)| > M).$$

Ασκήσεις

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἡ συνάρτησις $\sigma(x) = x^\nu$ $(\nu \in \Phi)$ τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, ὅταν τὸ x τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον. Διότι, δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ M ὁσονδήποτε μεγάλου, εὑρίσκεται ἕνας θετικὸς A τοιοῦτος, ὥστε:

$$|x| > A \Longrightarrow |x^\nu| > M.$$

Ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ $A = \sqrt[\nu]{M}$.

§ 71. Θεωρήματα διὰ συναρτήσεις τεινούσας πρὸς τὸ ἄπειρον. Ἂς θεωρήσωμεν δύο συναρτήσεις $\sigma(x)$ καὶ $f(x)$ καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ ὅρια *ἀμφοτέρων* λαμβάνονται ὅταν ***τὸ x τείνει πρὸς τὸ α.*** Τόσον τὸ α ὅσον καὶ τὸ ὅριον ἑκάστης συναρτήσεως, δύνανται νὰ εἶναι τὸ ἄπειρον. Ἰσχύουν τότε τὰ θεωρήματα:

ΑΘΗΝΑ

VII. **Ἐὰν ἡ $\sigma(x)$ καὶ ἡ $f(x)$ τείνουν πρὸς τὸ ἄπειρον, τὸ γινόμενον $\sigma(x) \times f(x)$ τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον.**

2011

VIII. **Ἐὰν κλάσματος $\frac{c}{f(x)}$ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι σταθερός, ὁ δὲ παρονομαστὴς τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον, τότε τὸ κλάσμα τείνει πρὸς τὸ μηδέν.**

IX. **Ἐὰν κλάσματος $\frac{\sigma(x)}{f(x)}$ ὁ μὲν ἀριθμητὴς τείνει πρὸς**

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή…….....1

Δυσκολίες κατανόησης ……..……..……..4

Προτάσεις για τη διδασκαλία του ορίου……..……..……..…….…8

Ασκήσεις…….…….……....13

Βιβλιογραφία…….....75

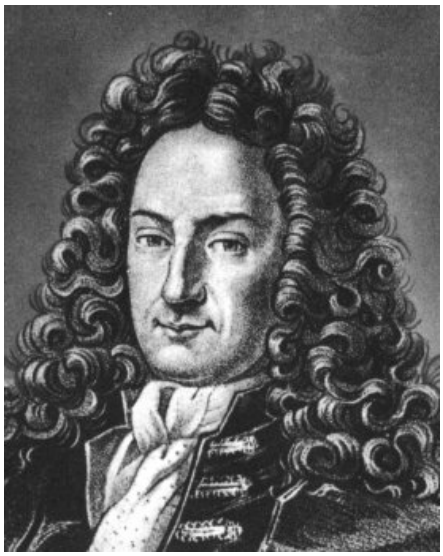
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια του ορίου είναι μια από τις δυσκολότερες έννοιες των μαθηματικών και ο μαθητής και ο σπουδαστής πρέπει να έρθει σύντομα σε επαφή μαζί της γιατί είναι απαραίτητη και για άλλες έννοιες του απειροστικού λογισμού όπως είναι η συνέχεια η παράγωγος και το ολοκλήρωμα. Η νοητική της κατάκτηση θεωρείται απαραίτητη προϋπόθεση για την κατανόηση των προαναφερθεισών εννοιών. Η κατανόηση και η εμβάθυνση της έννοιας του ορίου απαιτεί επίσης άνεση στη διαχείριση ετέρων εννοιών όπως εκείνη του συνόλου των πραγματικών αριθμών και των ιδιοτήτων του, της απόλυτης τιμής και της συναρτήσεως.

Η σύγχρονη εμφάνιση της έννοιας του ορίου στα σημερινά βιβλία είναι αποτέλεσμα προσπαθειών από την αρχαιότητα. Στην μακρόχρονη αυτή πορεία εκτός από τις γόνιμες ιδέες και τις προόδους που επετεύχθησαν υπήρξαν και πολλά λάθη καθώς και οπισθοδρομήσεις ακόμα και από μεγάλους μαθηματικούς.

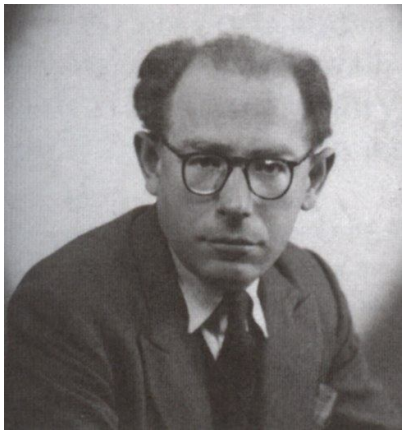
Στοιχεία μεθόδων και εργαλείων του απειροστικού λογισμού σχετικά με την έννοια του ορίου συναντάμε στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς από την εποχή του Ευδόξου (περ. 408-355 π.Χ.) και του Αρχιμήδη (287-212 π.Χ.). Στην Επιτομή Φυσικής ή Περί φυσικής ακροάσεως (P.G. 142, 1023-1302) ο Νικηφόρος Βλεμμύδης ασχολείται, σε 31 κεφάλαια, με θέματα φυσικής, μαθηματικών, αστρονομίας και μετεωρολογίας, γράφοντας τα σχετικά θέματα με ιδιαίτερα αναλυτικό τρόπο. Μεταξύ των άλλων αναφέρεται στις μεταβολές απείρως μικρών και μεγάλων ποσών, δηλαδή με στοιχεία απειροστικού λογισμού (Θεοδοσίου και Δανέζης 2010).

Προσπάθειες για να αποσαφηνιστεί η έννοια του ορίου συναντάμε το $16^{ο}$ αιώνα από τον Ιταλό Luca Valerio και τον Φλαμανδό Simm Stevin. Η θεμελίωση όμως του Απειροστικού Λογισμού επιτυγχάνεται το τελευταίο τέταρτο του $17^{ου}$ αιώνα από τον Isaac Newton και τον Gottfried Wilhelm Leibniz, οι οποίοι, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, επινόησαν ταυτόχρονα το Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό (Αγγελίδη 2005).



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Karl Weierstrass (1815-1897)



Abraham Robinson (1918-1974)

Και οι δύο επιστήμονες χρησιμοποίησαν για τη θεωρία τους τα απειροστά, δηλαδή απειροελάχιστα μικρές ποσότητες οι οποίες μπορούν να παραλειφθούν όταν είναι «συγκριτικά» μικρές. Και οι δύο αγνόησαν την έννοια του ορίου στην γεωμετρία και στην άλγεβρα. Η σύγχυση και η διαμάχη για τη φύση και το ρόλο των απειροστών μεγεθών γέννησε έναν πλούσιο προβληματισμό γύρω από την ακριβή έννοια του ορίου.

Το 18^{ο} αιώνα γίνονται προσπάθειες για μια αυστηρή θεμελίωση της έννοιας του ορίου. Η οριστική θεμελίωση έρχεται το 19^{ο} αιώνα κυρίως από τους Cauchy και Weierstrass. Ο σύγχρονος ορισμός του ορίου συνάρτησης δόθηκε κατ' αρχήν από τον Weierstrass και στην τελική του μορφή από το μαθητή του Heine.

Τη δεκαετία του 1960 ο λογικολόγος Abraham Robinson (1918-1974) επανέφερε τα απειροστά με τη θεωρία της Μη Κανονικής Ανάλυσης (Non-standard Analysis). Τοιουτοτρόπως μέθοδοι με τα απειροστά που χρησιμοποιήθηκαν κατά την αρχαιότητα επανέρχονται και πάλι στο προσκήνιο των μαθηματικών, απαλλαγμένες από ασάφειες του παρελθόντος (Robinson 1966).

Στην παρούσα μελέτη θα αναδειχθούν κάποια από τα προβλήματα διδασκαλίας των ορίων όπως τα έχει καταγράψει η διεθνής αλλά και η ελληνική έρευνα. Αυτά που ακολουθούν απέχουν πολύ από το να εξαντλούν το αντικείμενο όμως αποτελούν έναυσμα για

περαιτέρω μελέτη του θέματος, βοηθούσης και της πλούσιας βιβλιογραφίας που παρατίθεται. Στο τέλος υπάρχουν λυμένες ασκήσεις υποδειγματικά με σκοπό να βοηθήσουν τον διδάσκοντα, κυρίως τον καθηγητή μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου να ανταπεξέλθει στις απαιτήσεις του περί ου ο λόγος κεφαλαίου.

2 ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Η διαδικασία της μάθησης είναι ένας δρόμος μετ' εμποδίων και καθήκον του διδάσκοντος είναι να τα ανακαλύψει και να βοηθήσει το μαθητή να τα υπερπηδήσει.

Η μαθηματική σκέψη όπως καταγράφεται στα διάφορα κείμενα χαρακτηρίζεται από δύο σημαντικά συστατικά: α) τους ακριβείς μαθηματικούς ορισμούς που περιλαμβάνουν και την αξιωματική θεμελίωση και β) τη λογική επαγωγή των θεωρημάτων βασισμένη στα προηγούμενα. Το τελικό αυτό αποτέλεσμα δεν είναι παρά η κορυφή του παγόβουνου αφού δεν εμφανίζονται συνήθως η όλη δημιουργική μαθηματική διεργασία, η έμπνευση αλλά και οι οπισθοχωρήσεις που και αυτές παίζουν το ρόλο τους για την ολοκλήρωση της προσπάθειας. Τα δύο προαναφερθέντα στοιχεία θα συναντήσουμε άλλοτε λιγότερο και άλλοτε περισσότερο και στα διδακτικά εγχειρίδια των μαθηματικών, είτε αυτό απευθύνεται σε μαθητές λυκείου είτε σε φοιτητές.

Στην ανέλιξη της μαθηματικής σκέψεως υπάρχει μια δύσκολη εν γένει μετάβαση, μια ανακατασκευή, από το μέρος που οι έννοιες έχουν μια διαισθητική μορφή προς εκείνο που παίρνουν πλέον μια τυπική αυστηρή μορφή εκείνη του μαθηματικού ορισμού. Τη διαδικασία αυτή τη συναντάμε και στη Γ΄ Λυκείου ιδίως στο μάθημα της Ανάλυσης. Κατά τη διάρκεια της μεταβάσεως, με την ανάπτυξη της γνώσης συνυπάρχει και η προϋπάρχουσα γνώση διαισθητικής μορφής η οποία είναι πιθανόν να παράγει ένα φάσμα, ενίοτε ευρύ όπως δείχνουν οι έρευνες, γνωστικών συγκρούσεων που έχουν ως αποτέλεσμα να παρουσιάζονται εμπόδια στη γνώση.

Τα μαθηματικά χαρακτηρίζονται από μεγάλη ακρίβεια στους ορισμούς και στη διατύπωση. Όμως πολλές μαθηματικές έννοιες πριν τις γνωρίσουμε στα μαθηματικά τις συναντάμε στην καθημερινή ζωή. Κάποιες τις χρησιμοποιούμε στην τάξη χωρίς να έχουμε δώσει κάποιον αυστηρό ορισμό. Το αποτέλεσμα στο ανθρώπινο μυαλό είναι να υπάρχει μια διανοητική εικόνα διαφορετική όμως στον καθένα για τις εν λόγω έννοιες.

Μελετώντας οι Vinner και Hershkowitz την πρόσληψη των διαφόρων εννοιών από τους μαθητές ή φοιτητές εισήγαγαν τους όρους ***έννοια μέσω εικόνας*** (concept image) και ***έννοια μέσω ορισμού*** (concept defition) (Vinner & Hershkowitz 1980).

Έννοια μέσω εικόνας (Concept Image)

Είναι η όλη γνωστική δομή που προσεταιρίζεται στην έννοια, η οποία περιλαμβάνει διανοητικές εικόνες, ιδιότητες και διαδικασίες που έχουν να κάνουν με αυτήν την έννοια. Αναδιαμορφώνεται με την πάροδο του χρόνου. Υπάρχουν όμως πάντα τα σπέρματα μιας παρανόησης και σύγκρουσης (Tall 1992, Tall και Vinner 1981).

Έννοια μέσω ορισμού (Concept Defition)

Είναι το σύνολο των λέξεων που χρειάζεται να καθορίσουν την έννοια.

Η έννοια μέσω εικόνας επηρεάζεται από την έννοια μέσω ορισμού.

Μια έννοια εισάγεται με παραδείγματα και στο τέλος έχουμε τον τυπικό ορισμό. Τότε υπάρχει ο κίνδυνος δημιουργίας συγκρούσεων και παρανοήσεων αφού θα δημιουργηθεί μια έννοια μέσω εικόνας πριν την έννοια μέσω ορισμού.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι αυτό της έννοιας της συναρτήσεως από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β. Στην ερώτηση τι καλούμε συνάρτηση, ενώ δίνεται ως απάντηση ο αυστηρός ορισμός (κάθε τιμή x του συνόλου Α αντιστοιχεί σε μία ακριβώς τιμή y του συνόλου Β), υπάρχουν και απαντήσεις που έχουν να κάνουν με την έννοια μέσω εικόνας που έχει σχηματίσει ο μαθητής ή ο φοιτητής: Συνάρτηση είναι α) μια αντιστοιχία μεταξύ δύο μεταβλητών, β) ένας κανόνας αντιστοιχίας, γ) μια κατεργασία σε ένα αριθμό για να πάρουμε κάποιον άλλο, δ) ένας τύπος, ε) μια εξίσωση, ς) μια γραφική παράσταση, ζ) ένας πίνακας τιμών κλπ (Tall 1992).

Η κατάσταση γίνεται ακόμη δυσκολότερη με την έννοια του ορίου, όπου η πρώτη συνάντηση μαζί της συνήθως δεν συνοδεύεται από τον ορισμό, ο οποίος θεωρείται όχι αβάσιμα από τους δυσκολότερους στην ανάλυση. Και ενώ ένας καλός ορισμός είναι απαραίτητος στην επιστημονική εξέταση ενός θέματος, στην εκπαίδευση το πρώτιστο είναι να είναι κατανοητός από τους μαθητές ή σπουδαστές[1].

Στην ελληνική λυκειακή πραγματικότητα η έννοια του ορίου εισάγεται διαισθητικά. Από εκεί ξεκινούν και τα προβλήματα.

Η λέξη όριο έχει πολλές εννοιολογικές αποχρώσεις στην καθημερινή ζωή, οι οποίες είναι σε διάσταση με το μαθηματικό περιεχόμενο της έννοιας. Για παράδειγμα

[1] Στην εκπαίδευση καλός ορισμός είναι εκείνος που είναι κατανοητός από τους μαθητές. (Poincaré 1908)

το όριο μπορεί να σημαίνει κάτι το οποίο δεν πρέπει να ξεπεραστεί (το όριο ταχύτητος στους δρόμους). Η φρασεολογία που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά για το όριο και τις διαδικασίες του περιέχει φράσεις όπως «τείνει», «πλησιάζει», «πλησιάζει κοντά», οι οποίες στην καθημερινή ζωή χρησιμοποιούνται όχι ακριβώς με το ίδιο περιεχόμενο όπως στα μαθηματικά. Έτσι όταν για μια ακολουθία χρησιμοποιούμε την έκφραση ότι οι όροι της πλησιάζουν για παράδειγμα το μηδέν, η αντίστοιχη καθημερινή έκφραση εμπεριέχει και την έννοια ότι οι όροι δεν μπορούν να είναι ίσοι με το μηδέν (Schwarzenberger & Tall, 1977).

Ο Corny (1981) αναφέρει τα παρακάτω εμπόδια για την δυσκολία κατανόησης της έννοιας του ορίου: α) «μεταφυσική» άποψη της έννοιας του ορίου, β) οι απείρως μικρές και οι απείρως μεγάλες ποσότητες, γ) η δυνατότητα να φθάσουμε στο όριο.

Αντί του αυστηρού ορισμού του ορίου θα δοθεί μέσα στην τάξη μια περιγραφή που μαζί με παραδείγματα και ασκήσεις θα δημιουργήσει μια αίσθηση ασφάλειας στο μαθητή. Όλα όμως τα προηγούμενα σε όλα συνδυασμό με αυτά που έχουν ακούσει οι μαθητές για το όριο σε άλλες τάξεις κατασκευάζουν μια έννοια μέσω εικόνας με κίνδυνο να εμφανισθούν παρανοήσεις.

Σε ευρεία χρήση είναι ο διαισθητικός *κινητικός ορισμός* του ορίου:

«Το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ σημαίνει ότι:

Οι τιμές της συναρτήσεως όλο και πλησιάζουν το ℓ καθώς το x πλησιάζει το x_0.»

Στην δυναμική αυτή προσέγγιση του ορίου προκύπτουν οι εξής παρανοήσεις:

α) Η συνάρτηση f δεν παίρνει τη τιμή ℓ.

β) Το όριο δρα σαν φράγμα (σαν τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο).

Στον Szydlik (2000) βρίσκουμε σχηματοποιημένες τις λανθασμένες αντιλήψεις για το όριο συναρτήσεως (φοιτητής Α) και τις ορθές (φοιτητής Β):

Φοιτητής Α

Το όριο μιας συναρτήσεως είναι ένας αριθμός προς τον οποίο η συνάρτηση όλο και πλησιάζει χωρίς ποτέ να τον φθάνει. Αν πάρουμε το όριο της f(x) καθώς το $x \to x_0$, το x δεν είναι ποτέ πραγματικά ίσο με το x_0, συνέχεια το πλησιάζει. Το ίδιο με την f(x), η f(x) ποτέ πραγματικά δεν ισούται με το όριό της, αλλά όλο το πλησιάζει. Στην πραγματικότητα μπορείς να έχεις την f(x) όσο κοντά θέλεις στο όριο της, αλλά όταν η f(x) γίνει ίση με το όριό της, τότε δεν έχουμε όριο.

Για παράδειγμα αν $f(x)=2x+3$ και πάρουμε το όριο καθώς το $x \to 1$, κάθε αριθμός κοντά στο 1, αλλά όχι ίσος με το 1 θα δίνει μια τιμή για την $f(x)$ κοντά στο 5, αλλά όχι ίση με 5. Η συνάρτηση δεν φθάνει την τιμή 5 εκτός και αν το x γίνει ίσο με 1, όμως αυτό ποτέ δεν συμβαίνει στα όρια.

Φοιτητής Β

Δεν είναι σωστό να λέμε ότι η συνάρτηση ποτέ δεν παίρνει τιμή ίση με το όριό της. Αυτό που εννοούμε είναι ότι όταν μιλάμε για το όριο μιας συναρτήσεως όταν το $x \to x_0$, αναφερόμαστε σε αριθμούς κοντά στο x_0 και δεν ενδιαφερόμαστε εάν το x ισούται με το x_0. Βεβαίως η f μπορεί να ισούται με το όριό της. Αν η f είναι μια σταθερή συνάρτηση, για παράδειγμα αν $f(x)=7$, το όριο καθώς το $x \to x_0$ ισούται με 7 και προφανώς η $f(x)$ παίρνει την τιμή 7 για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Δεν υποστηρίζω ότι μπορούμε πάντα να παίρνουμε το όριο βάζοντας την τιμή x_0 στη θέση του x. Δεν μας ενδιαφέρει αν η f μπορεί να «φθάνει» το όριο της ή να μην το «φθάνει». Υπάρχουν συναρτήσεις που παίρνουν την τιμή του ορίου άπειρες φορές. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι τι συμβαίνει με την $f(x)$ **κοντά στο x_0**.

Τέλος μια άλλη δυσκολία στην κατανόηση του ορίου είναι το ερώτημα πως διαδικασίες που περιέχουν άπειρα βήματα μπορούν να έχουν ένα πεπερασμένο αποτέλεσμα (βλ. άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου).

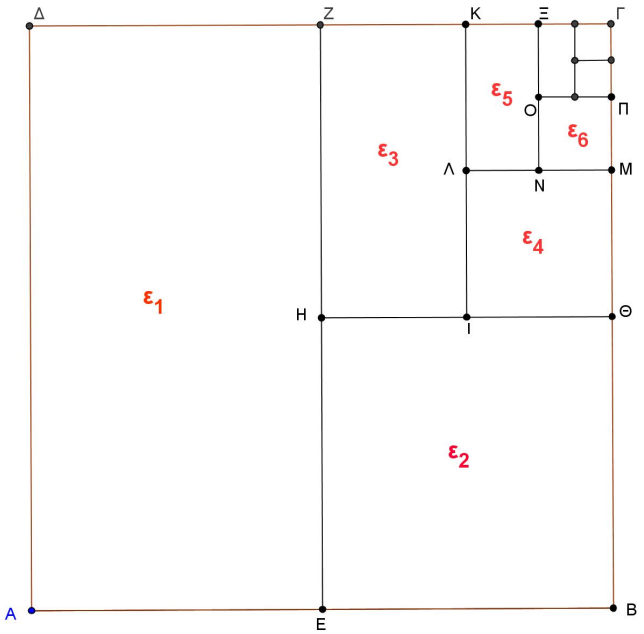
3 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

Στο παρόν κεφάλαιο δεν θα δοθούν συγκεκριμένα σχέδια μαθήματος αλλά προτάσεις για καλλίτερη και αποτελεσματικότερη διδασκαλία. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει ένα σχέδιο μαθήματος στο Δημαράκης Ι., (2004).

Μιας και η έννοια του ορίου έχει αναφερθεί και σε παλαιότερες τάξεις, πριν από την Γ΄ Λυκείου όπου εκεί εξετάζεται διεξοδικά, κρίνεται απαραίτητο να γίνει υπενθύμιση των αναφορών αυτών.

Στην Άλγεβρα της Α΄ λυκείου υπάρχει η συμπεριφορά συναρτήσεων για «μεγάλες» τιμές του x καθώς και για «μικρές» τιμές του x, χωρίς να εισάγεται ο συμβολισμός για παράδειγμα $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (Ανδρεαδάκης κ.α. 2010).

Στην Β΄ Λυκείου συναντάμε την έννοια του ορίου και στην Άλγεβρα και στην Γεωμετρία. Στην παράγραφο 3.5 του σχολικού βιβλίου (Ανδρεαδάκης κ.α. 2009), το άθροισμα των απείρων όρων δεν είναι τίποτε άλλο παρά το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας. Εδώ διαπιστώνει και ο μαθητής ότι μια διαδικασία με άπειρα βήματα έχει ένα πεπερασμένο αποτέλεσμα. Στο επόμενο σχήμα (Σχ.1) ξεκινάμε με ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά μήκους 1.



Σχήμα 1.

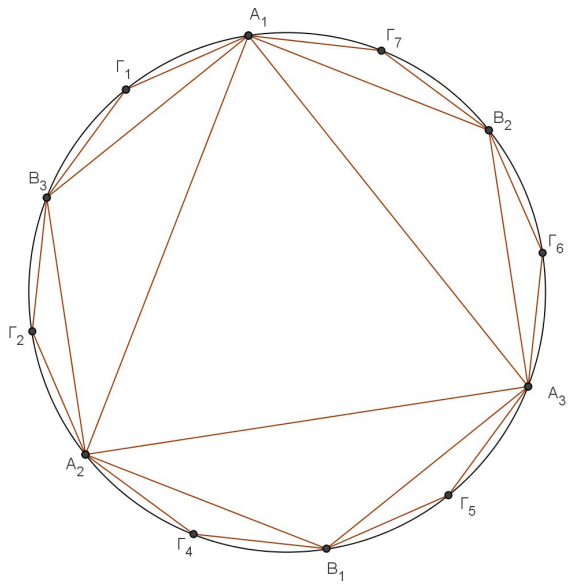
Χωρίζω κάθε φορά το τετράγωνο στη μέση.

	$1^{ος}$ χωρισμός	$2^{ος}$ χωρισμός (το μισό του προηγουμένου)	$3^{ος}$ χωρισμός (το μισό του προηγουμένου)	...	$ν^{ος}$ χωρισμός (το μισό του προηγουμένου)
Εμβαδόν κομματιού	$\varepsilon_1=\frac{1}{2}$	$\varepsilon_2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^2}$	$\varepsilon_3=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^2}\right)=\frac{1}{2^3}$	...	$\varepsilon_\nu=\frac{1}{2}\cdot\varepsilon_{\nu-1}=\frac{1}{2^\nu}$
Συνολικό εμβαδόν	$S_1=\frac{1}{2}$	$S_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$	$S_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}$	...	$S_\nu=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+...+\varepsilon_\nu=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^\nu}$

Απεικόνιση της περατότητας του απείρου αθροίσματος (της σειράς) γεωμετρικής προόδου με λ=1/2. Το κάθε επιμέρους εμβαδόν αντιστοιχεί σε έναν όρο της γεωμετρικής προόδου, ενώ το συνολικό εμβαδόν αντιστοιχεί στο άπειρο άθροισμα. Συγκεκριμένα $\lim_{\nu\to+\infty} S_\nu=1$.

Ενδιαφέρον έχει το τρίτο παράδειγμα της σελίδας 115. Ο αριθμός $0,\overline{14}$ δεν είναι άλλος από το όριο μιας ακολουθίας (σειράς).

Το όριο το συναντάμε επίσης στην παράγραφο 1.4 Εκθετική συνάρτηση στον ορισμό της δύναμης με άρρητο εκθέτη και στον ορισμό του e.



Σχήμα 2.

Στο σχήμα 2 ξεκινάμε από ένα εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο και διπλασιάζουμε τις πλευρές του κανονικού πολυγώνου παίρνοντας τα μέσα των τόξων ως καινούργιες κορυφές. Καθώς το πλήθος των πλευρών μεγαλώνει το κανονικό ν-γωνο όλο και πλησιάζει τον κύκλο. Σχηματικά μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{\nu \to +\infty} (\text{ν-γωνο}) = \text{κύκλος}$$

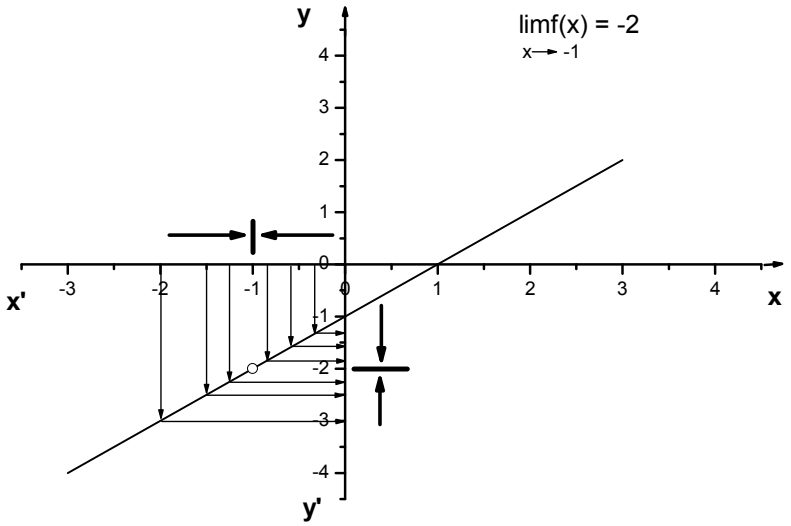
Δηλαδή: Μπορούμε να πάρουμε ένα κανονικό πολύγωνο όσο κοντά θέλουμε στον κύκλο, μεγαλώ-νοντας το ν.

Μια ενδιαφέρουσα *διαισθητική προσέγγιση* του ορίου είναι η κάτωθι:

«Το $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ σημαίνει ότι:

Οι τιμές της συναρτήσεως, μπορούν να βρίσκονται οσοδήποτε κοντά θέλουμε στο ℓ, όταν το x είναι αρκούντως κοντά στο x_0».

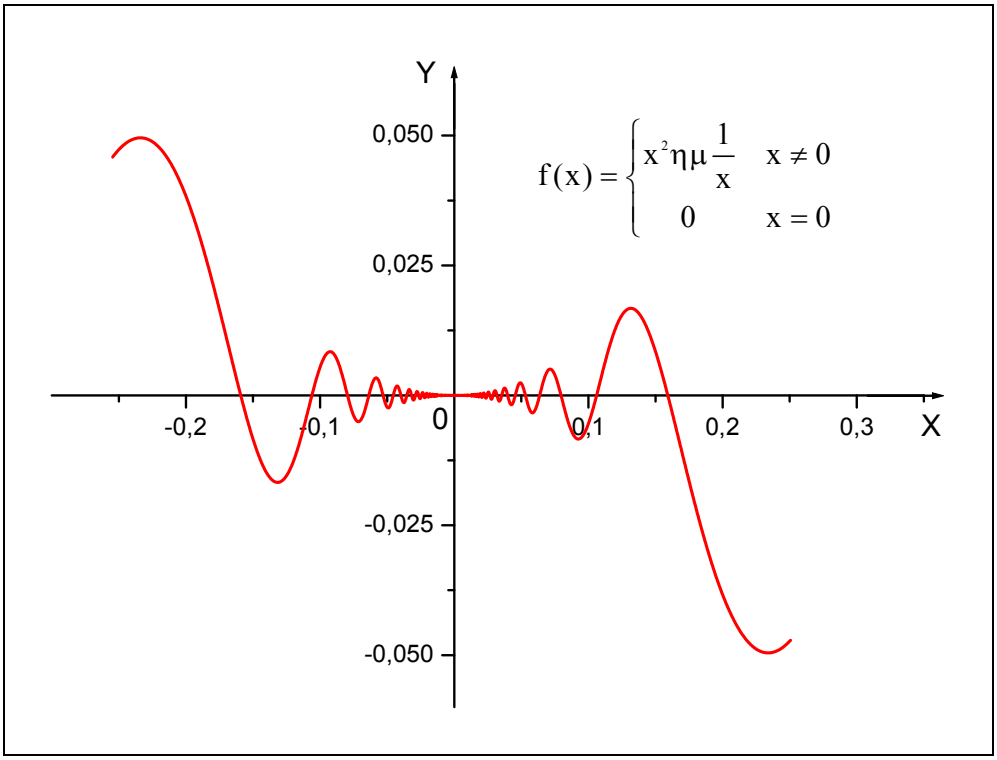
Ο παραπάνω ορισμός δεν έχει τα μειονεκτήματα του κινητικού (δυναμικού) ορισμού (βλ. σελ. 6).

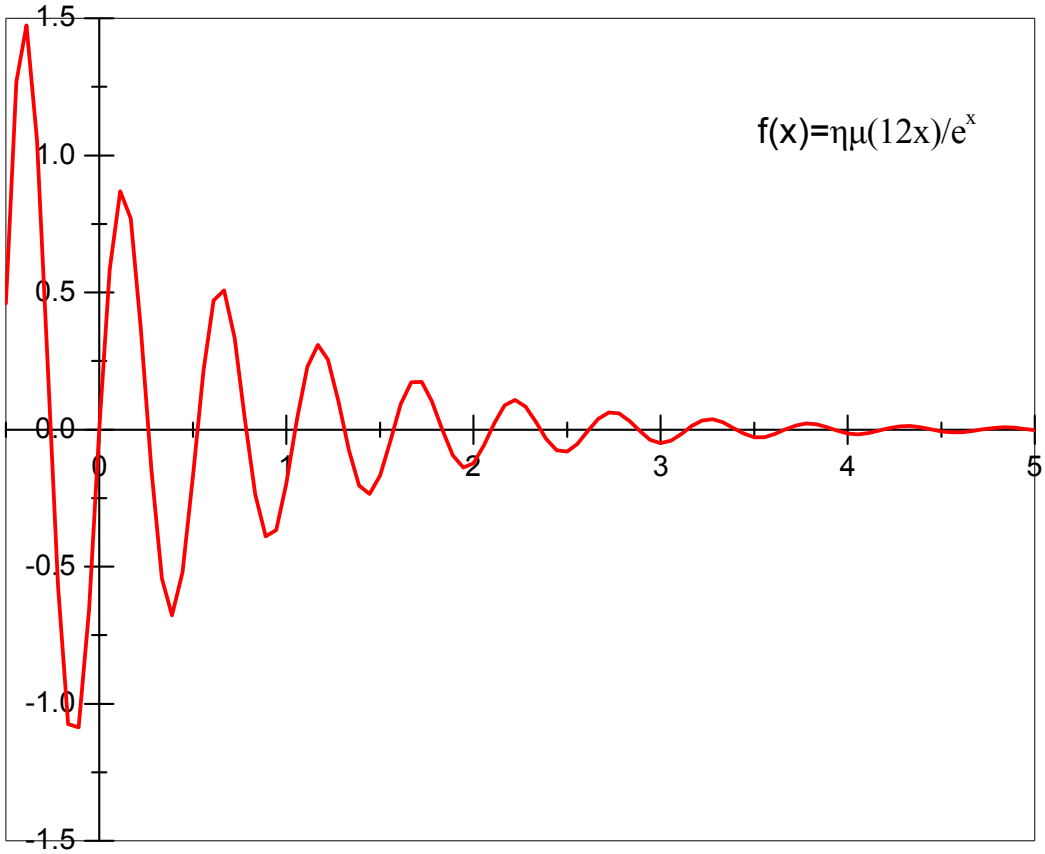


Σχήμα 3

x	-2	-1,1	-1,01	-1,001	…	-0,999	-0,99	-0,9	0
f(x)	-3	-2,1	-2,01	-2,001	…	-1,999	-1,99	-1,9	-1

Το σχήμα 3 είναι ένα άλλο σχήμα που προσφέρεται για τη διαισθητική κατανόηση του ορίου. Η συνάρτηση στο σχήμα έχει τύπο: $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$.


Y
0,050
0,025
-0,025
-0,050
-0,2
-0,1
0
0,1
0,2
0,3
X
$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$


1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.5
0
1
2
3
4
5
f(x)=ημ(12x)/e^x

Σχήμα 4

Στο σχήμα 4 συναντάμε δύο συναρτήσεις που παίρνουν για άπειρες τιμές του x την τιμή 0, η οποία είναι και το όριό τους, της μεν πρώτης όταν το x τείνει στο 0 και της δεύτερης όταν το x τείνει στο $+\infty$ (βλ. και άποψη του Φοιτητή Α στη σελ. 6).

Οι ασκήσεις που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία εκτός ελαχίστων δεν επικεντρώνονται στην *έννοια* του ορίου, αλλά σε ανισότητες, στη έννοια της απόλυτης τιμής, και προπάντων στις πράξεις όπως το όριο αθροίσματος, γινομένου, κλπ. Λαμβάνοντας το προηγούμενο υπόψιν οι ασκήσεις 1 και 2 στις σελίδες 18 και 19 του παρόντος ενέχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και θεωρείται απαραίτητο να διδαχθούν μέσα στην τάξη.

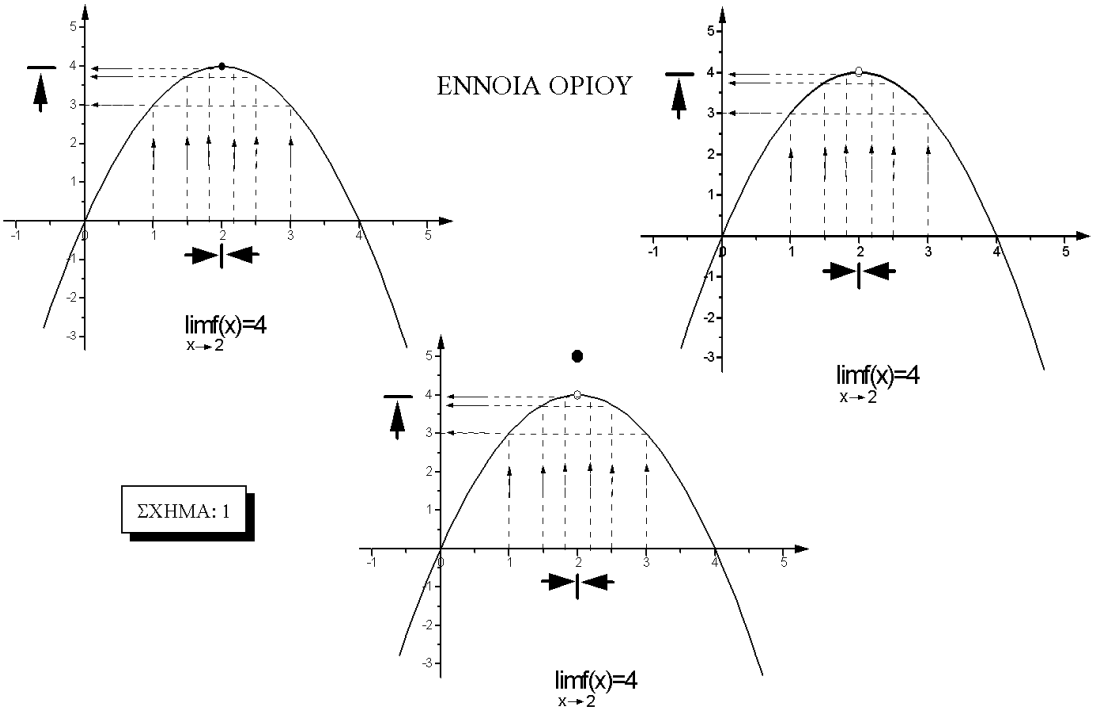
4 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

§ 4.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

- Δίνεται μια συνάρτηση f της οποίας το πεδίο ορισμού περιέχει ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \alpha)$ ή (α, x_0) ή (x_0, α). Όταν οι τιμές τις συναρτήσεως f πλησιάζουν όσο θέλουμε ένα πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει το x_0 με οποιονδήποτε τρόπο, τότε γράφουμε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

Η παραπάνω σχέση διαβάζεται το **όριο της f(x)** όταν το x τείνει στο x_0 είναι ℓ.



ΣΧΗΜΑ: 1

Προσοχή

α) Όταν ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, το x πλησιάζει το x_0 αλλά πάντα παραμένει $x \neq x_0$. Γι' αυτό το x_0 δεν είναι απαραίτητο να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f (βλ. Σχ.1).

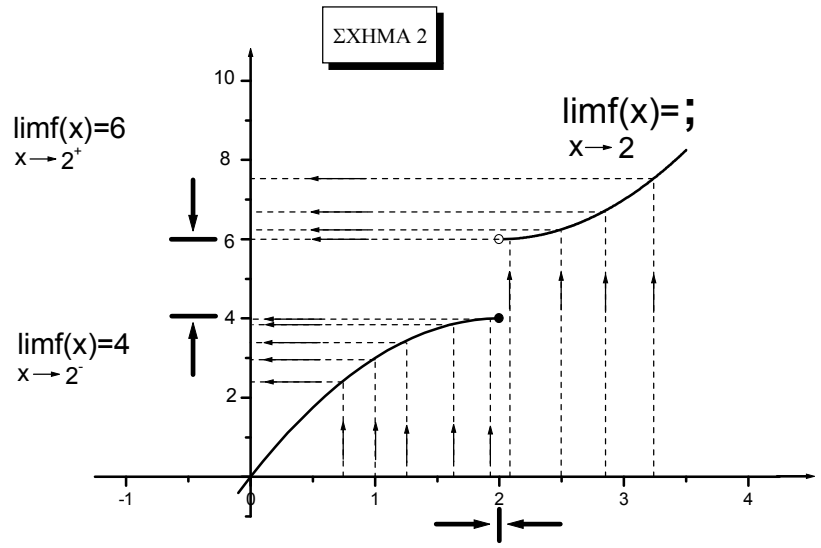
β) Το $f(x_0)$ και το ℓ δεν συμπίπτουν απαραίτητα (βλ. Σχ.1).

Πλευρικά όρια

- Δίνεται μια συνάρτηση f της οποίας το πεδίο ορισμού περιέχει ένα σύνολο της μορφής (α, x_0). Όταν οι τιμές τις συναρτήσεως f πλησιάζουν όσο θέλουμε ένα πραγματικό αριθμό ℓ_1, καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές $(x<x_0)$, τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1$$

Η παραπάνω σχέση διαβάζεται το όριο της f(x) όταν το x τείνει στο x_0 από αριστερά είναι ℓ_1 (Σχ.2).



- Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού που περιέχει ένα σύνολο της μορφής (x_0, α) και οι τιμές τις συναρτήσεως f πλησιάζουν όσο θέλουμε ένα πραγματικό αριθμό ℓ_2, καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές $(x>x_0)$, τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2$$

Η παραπάνω σχέση διαβάζεται το όριο της f(x) όταν το x τείνει στο x_0 από δεξιά είναι ℓ_2 (Σχ.2).

- Τα ℓ_1, ℓ_2, λέγονται **πλευρικά όρια** της f στο x_0. Το ℓ_1 λέγεται **αριστερό όριο** της f στο x_0, ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_0.

Ισχύουν οι εξής ισοδυναμίες:

α) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$

β) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x)-\ell) = 0$

γ) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = \ell$

Τέλος: $\lim_{x \to x_0} x=x_0$ $\lim_{x \to x_0} c=c$

§ 4.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

Όταν λέμε ότι η f έχει μία ιδιότητα Α **κοντά στο x_0**, αυτό σημαίνει ότι η f έχει αυτή την ιδιότητα σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \alpha)$ ή (α, x_0) ή (x_0, α), αρκεί κάθε ένα από αυτά να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

Έτσι αφού $0<\eta\mu x<\frac{1}{2}$ όταν $x\in(0,\frac{\pi}{6})$, η συνάρτηση f(x)=ημx παίρνει τιμές στο $(0, \frac{1}{2})$, κοντά στο 0.

Όρια και πράξεις

Ισχύουν τα κάτωθι θεωρήματα:

- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x)>0$ (αντ. <0), τότε f(x)>0 (αντ. >0) κοντά στο x_0.
- Αν $f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα $\lim_{x \to x_0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0} g(x)$, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$.

- Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, τότε:

α) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ β) $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda f(x))=\lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lambda\in\mathbf{R}$.

γ) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ δ) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ με $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$

ε) $\left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|=\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|$ ς) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$ με $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0

Προσοχή

α) Το προηγούμενο θεώρημα ισχύει εφ' όσον υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

β) Είναι δυνατόν να υπάρχει το όριο του αθροίσματος ή του γινομένου δύο συναρτήσεως f,g χωρίς να υπάρχει το όριο κάθε μιας ξεχωριστά. Πράγματι αν $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ και $g(x)=-\dfrac{|x|}{x}$ τότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x}=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x}=1$, άρα το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει. Ομοίως δεν υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$. Όμως $f(x)+g(x)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0} (f(x)+g(x))=0$. Επίσης $f(x)\cdot g(x)=-1$, επομένως $\lim\limits_{x\to 0} (f(x)\cdot g(x))=-1$.

Τριγωνομετρικά όρια

- Για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις ισχύουν οι κάτωθι προτάσεις:

α) $\lim\limits_{x\to x_0} \eta\mu x=\eta\mu x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_0$

β) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$

- Χρήσιμη για τις ασκήσεις είναι και η ανισοτική σχέση: $|\eta\mu x|\leq|x|$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, η οποία ισχύει ως ισότητα μόνο όταν $x=0$.

Κριτήριο παρεμβολής

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g,h τέτοιες ώστε:

α) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ κοντά στο x_0 και β) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$.

Τότε: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Όριο σύνθετης συναρτήσεως

Ισχύει: $\mathbf{\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)}$

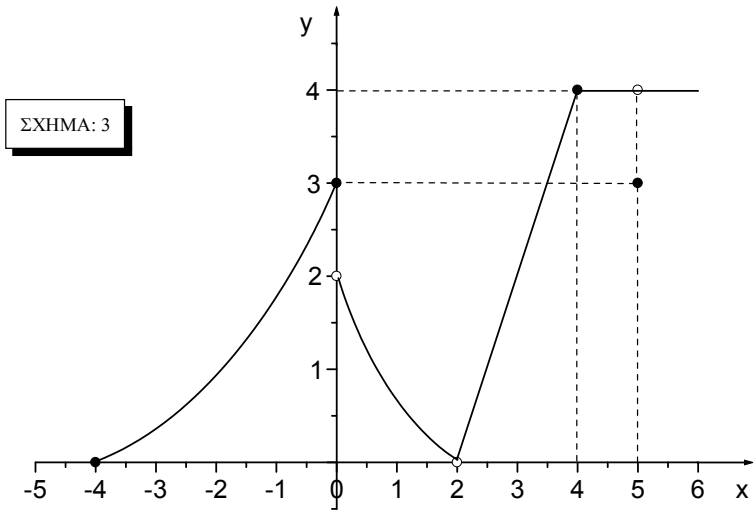
Με την προϋπόθεση ότι:

α) υπάρχει το $u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ β) υπάρχει το $\lim\limits_{u \to u_0} f(u)$ γ) $g(x) \neq u_0$, κοντά στο x_0

Λυμένες Ασκήσεις

1 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (αν υπάρχει) όπου η f έχει πεδίο ορισμού το [-4,+∞) και γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για: α) x_0=-4, β) x_0=0, γ) x_0=2, δ) x_0=4, ε) x_0=5

Λύση:



α) Το όριο εδώ έχει νόημα μόνο όταν το x πλησιάζει το x_0 από τιμές μεγαλύτερες του x_0, δηλαδή από τιμές μεγαλύτερες του -4. Ισχύει $\lim\limits_{x\to -4} f(x)= \lim\limits_{x\to -4^+} f(x)=0$

β) Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$, δηλαδή επειδή τα πλευρικά όρια δεν συμπίπτουν το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Προσοχή

Για να υπάρχει το όριο μιας συναρτήσεως f(x) όταν το x τείνει στο x_0, πρέπει και αρκεί να υπάρχουν τα πλευρικά όρια και να συμπίπτουν. Τότε το όριο της συναρτήσεως είναι ακριβώς η κοινή τιμή των δύο πλευρικών ορίων. Δηλαδή

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$$

γ) Στο x_0=2 η συνάρτηση δεν ορίζεται όμως $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =0$, αφού $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0$.

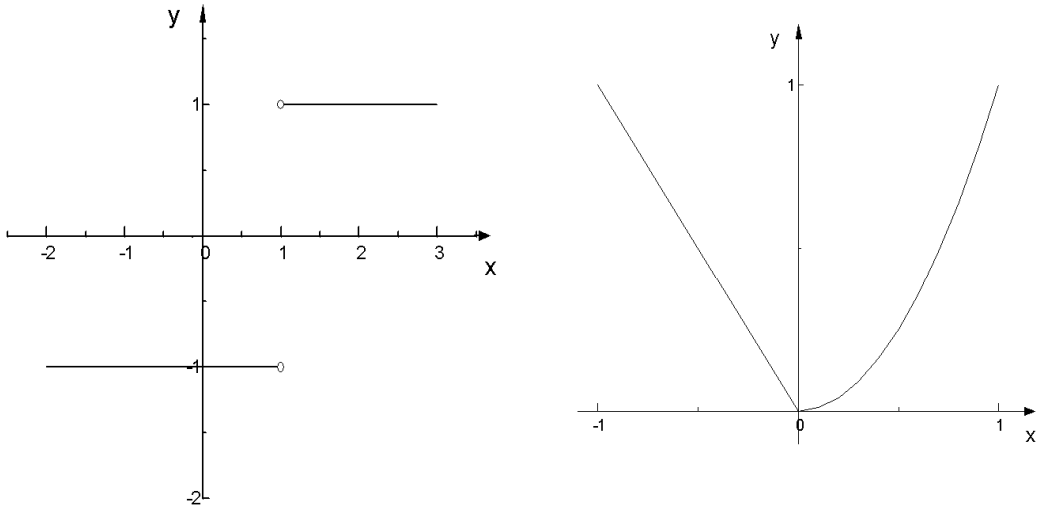
δ) Ισχύει $\lim_{x\to 4} f(x) = 4$, αφού $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = 4$. Εδώ παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 4} f(x) = 4 = f(4)$.

ε) Προφανώς $\lim_{x\to 5} f(x) = 4$, αφού $\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x) = 4$. Όμως $\lim_{x\to 5} f(x) \neq f(5) = 3$.

2 Να χαραχθεί η γραφική παράσταση της συναρτήσεως f και με την βοήθειά της να βρεθεί (αν υπάρχει) το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ όταν:

α) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$, $x_0=1$ **β)** $f(x)=\begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$, $x_0=0$

Λύση:



ΣΧΗΜΑ: 4

α) Παρατηρώ ότι $D_f=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Μάλιστα $f(x)=\begin{cases} 1 & x > 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$. Η γραφική παράσταση της συναρτήσεως φαίνεται στο σχ.4. Επειδή $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-1$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$, το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

β) Ο ένας κλάδος της συναρτήσεως ($x\geq 0$) είναι τμήμα παραβολής ενώ ο άλλος ($x<0$) είναι τμήμα ευθείας. Από την γραφική παράσταση ισχύει $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

3 Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο [α,β], με $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Αν είναι γνωστό ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=3\lambda^3+1$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=2\lambda+2$, να βρεθεί το $\lambda\in R$.

Λύση:

Αφού υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, θα πρέπει να ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \Leftrightarrow 3\lambda^3+1=2\lambda+2 \Leftrightarrow$ $3\lambda^3-2\lambda-1=0$ (1). Από τους διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή το –1 και το 1, παρατηρώ ότι ο 1 είναι ρίζα της εξισώσεως. Με την βοήθεια του σχήματος Horner η (1) είναι ισοδύναμη με την $(\lambda-1)(3\lambda^2+3\lambda+1)=0$. Η τελευταία έχει μοναδική λύση την $\lambda=1$, αφού το τριώνυμο $3\lambda^2+3\lambda+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=-3<0$.

4 Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}-1}{\sqrt{x}+1}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|+x^2-3x+2}{x-2}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^3}{|x|}$

δ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|4x-7|-|4x-9|}{8-x^3}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$ **ς)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+13}-4}$

Λύση:

α) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}-1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}(\sqrt{x^2-2x}-1)}{\lim\limits_{x\to 3}(\sqrt{x}+1)}=\dfrac{\sqrt{3^2-2\cdot 3}-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{3+1-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$

β) Αντικαθιστώντας την τιμή 2 στην θέση του x το κλάσμα παίρνει την μορφή $\dfrac{0}{0}$. Για να αρθεί η απροσδιοριστία θα πρέπει να παραγοντοποιηθεί ο αριθμητής και ο παρονομαστής. Εφόσον $x\to 2^+$ τότε, $x>2$, επομένως $|x-2|=x-2$. Άρα

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|+x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2+x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x(x-2)}{x-2}=$

$\lim\limits_{x\to 2^+} x=2$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^3}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-|x|^2 x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0}(-|x|x)=0$

δ) Επειδή η αντικατάσταση στη θέση του x με το 2 μηδενίζει αριθμητή και παρονομαστή, χρειάζεται η παραγοντοποίηση και των δύο όρων, επομένως πρέπει να απαλλαγούμε από τα απόλυτα.

x	$-\infty$		7/4		9/4		$+\infty$
4x-7		-	ϕ	+	|	+	
4x-9		-	|	-	ϕ	+	

Ισχύει $4x-7\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{7}{4}$, ενώ $4x-9\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{9}{4}$. Επειδή $\frac{7}{4}<2<\frac{9}{4}$, περιορίζουμε τις τιμές του x στο διάστημα $(\frac{7}{4},\frac{9}{4})$ (βλ. πίνακα)

Προσοχή

Το όριο μιας συναρτήσεως f(x) όταν το x τείνει στο x_0, δεν επηρεάζεται όταν μεταβάλλονται τα άκρα του διαστήματος που παίρνει τιμές το x, αρκεί να μπορεί το x να πλησιάζει το x_0, οσοδήποτε κοντά θέλουμε, με τους όρους που γινότανε και πριν την αλλαγή.

Όμως αν $x\in(\frac{7}{4},\frac{9}{4})$ τότε 4x-7>0, ενώ 4x-9<0 επομένως $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|4x-7|-|4x-9|}{8-x^3}=$

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x-7-(-4x+9)}{8-x^3}=\lim_{x\to 2}\frac{8x-16}{8-x^3}=\lim_{x\to 2}\frac{8(x-2)}{(2-x)(4+2x+x^2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-8}{4+2x+x^2}=-\frac{2}{3}.$$

ε) Επειδή με την αντικατάσταση προκύπτει η απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$, πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με την συζυγή παράσταση του παρονομαστή.

Επομένως

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}=$$

$$\lim_{x\to 3}[(x+3)(\sqrt{x+1}+2)]=24$$

ς) Όπως φάνηκε και στα προηγούμενα η απροσδιοριστία θα αρθεί, όταν στον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος εμφανισθεί ο παράγοντας x-3. Για να επιτευχθεί το τελευταίο πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τις συζυγείς παραστάσεις και των δύο όρων του κλάσματος. Επομένως $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+13}-4}=$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)(\sqrt{x+13}+4)}{(\sqrt{x+13}-4)(\sqrt{x+13}+4)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x\to 3}\frac{((\sqrt{x+6})^2-9)(\sqrt{x+13}+4)}{((\sqrt{x+13})^2-16)(\sqrt{x+6}+3)} =$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+13}+4)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}+4}{\sqrt{x+6}+3} = \frac{4}{3}$$

5 Να βρεθεί (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0 αν:

α) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\ge 0 \\ 2x+1 & x<0 \end{cases}$ **και** $x_0=0$ **β)** $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x>0 \\ 2x^2, & x\le 0 \end{cases}$ **στο** $x_0=0$ **γ)** $\lim_{x\to -2}\frac{|x^2-4|}{x+2}$

Λύση:

α) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(2x+1)=1$, δηλαδή τα δύο πλευρικά όρια συμπίπτουν, επομένως $\lim_{x\to 0} f(x)=1$

β) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(2x^2)=0$. Επίσης $-1\le \eta\mu\frac{1}{x}\le 1 \Leftrightarrow -x^2\le x^2\eta\mu\frac{1}{x}\le x^2$, $\lim_{x\to 0^+} x^2=0$, επομένως από το κριτήριο παρεμβολής, $\lim_{x\to 0^+}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$. Επομένως $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

γ) Το τριώνυμο x^2-4 έχει ρίζες τους αριθμούς –2 και 2, επομένως όταν $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ τότε το x^2-4 γίνεται ομόσημο του α=1, δηλαδή θετικό. Οπότε $\lim_{x\to -2^-}\frac{|x^2-4|}{x+2}$

$$=\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to -2^-}(x-2)=-4.$$

Αντίστοιχα όταν $x\in(-2,2)$ τότε $\lim_{x\to -2^+}\frac{|x^2-4|}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{-x^2+4}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{-(x-2)(x+2)}{x+2}=$ $\lim_{x\to -2^+}(-x+2)=4$. Επομένως το $\lim_{x\to 2} f(x)$ δεν υπάρχει.

6 Αν $f(x)=\begin{cases} \frac{\alpha x+\beta}{x+1} & x\rangle 2 \\ x^2-\alpha x+\alpha^2 & x\le 2 \end{cases}$ **και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(1, 3), τότε να βρείτε τις τιμές των α, β έτσι ώστε η f να έχει όριο στο σημείο $x_0=2$.**

Λύση:

Ισχύει $f(1)=1^2-\alpha\cdot 1+\alpha^2=1-\alpha+\alpha^2$, αλλά $f(1)=3$, επομένως $1-\alpha+\alpha^2=3 \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha-2=0$. Άρα $\alpha=2$ ή $\alpha=-1$.

Έστω $\alpha=2$. Τότε $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{2x+\beta}{x+1}=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-2x+4) \Leftrightarrow \frac{4+\beta}{3}=4 \Leftrightarrow \beta=8$.

Αντίστοιχα όταν $\alpha=-1$ τότε $\beta=23$.

7 Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu\alpha x}{x}$, όταν $\alpha\in R^*$.

Λύση:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu\alpha x}{x}=\lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha\eta\mu\alpha x}{\alpha x}=\alpha \lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}$. Θέτουμε $u=u(x)=\alpha x$, τότε $\lim\limits_{x\to 0} u=0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu\alpha x}{x}=\alpha \lim\limits_{u\to 0} \frac{\eta\mu u}{u}=\alpha\cdot 1=\alpha$.

8 Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=k\in R$ και για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(x)\eta\mu x\geq x^2$ (1), τότε να βρεθεί το k.

Λύση:

Αν $x>0$ τότε $(1) \Leftrightarrow f(x) \frac{\eta\mu x}{x}\geq x$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x) \frac{\eta\mu x}{x}\right)\geq \lim\limits_{x\to 0} x \Leftrightarrow k\cdot 1\geq 0$.

Αντίστοιχα όταν $x<0$ τότε $f(x) \frac{\eta\mu x}{x}\leq x$ επομένως $k\leq 0$, άρα $k=0$.

9 Για ποια τιμή του $\alpha\in R$ το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\in R$, όπου $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-\alpha}{x-1}, & x<1 \\ \frac{\eta\mu(x-1)}{x^2-1}, & x>1 \end{cases}$.

Λύση:

Έστω $x>1$, τότε $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\eta\mu(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\eta\mu(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x+1} \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}$

$=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$. Πράγματι αν θέσω $u=x-1$ τότε $u\to 0$ όταν $x\to 1$, επομένως $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}=$

$\lim\limits_{u\to 0} \frac{\eta\mu u}{u}=1$.

Άρα πρέπει $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\frac{1}{2}$. Όμως $(x-1)f(x)=\sqrt{x^2+3}-\alpha$ (1). Επομένως αν $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\frac{1}{2}$ τότε από την (1) παίρνοντας τα όρια και των δύο μελών συμπεραίνω ότι $0\cdot\frac{1}{2}=2-\alpha \Leftrightarrow$ $\alpha=2$. Η τελευταία είναι αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει το όριο της f(x). Για να είναι και ικανή θα πρέπει αν αντικαταστήσω το α με 2, το όριο της f(x) να είναι $\frac{1}{2}$.

Πράγματι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} =$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{1}{2}$. Άρα τελικά α=2.

10 **Αν $2-x^2 \le f(x) \le \frac{\eta\mu 2x}{x}$ για κάθε $x\in R^*$, να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.**

Λύση:

Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}(2-x^2)=2$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{2x}=2$ (βλ. ασκ.7), επομένως από το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$.

Προσοχή

Στις ασκήσεις ευρέσεως ορίων που εμπλέκονται τριγωνομετρικές συναρτήσεις και κυρίως το ημx και το συνx, η λύση προκύπτει είτε χρησιμοποιώντας τις γνωστές τριγωνομετρικές ανισότητες $-1\le \eta\mu x\le 1$, $-1\le \sigma\upsilon\nu x\le 1$ και το κριτήριο παρεμβολής είτε χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα της υποπαραγράφου «Τριγωνομετρικά Όρια» (βλέπε για παράδειγμα τις ασκήσεις 5β, 7-10).

11 **Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{4x-4}}{\sqrt{x^3-4x^2+4x}}$.**

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρεθεί (αν υπάρχει), το όριο: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Λύση

α) Πρέπει: $x^2+x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty, -2]\cup[1, +\infty)$, όπου -2,1 είναι οι ρίζες του τριωνύμου. Επίσης $4x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$ και τέλος $x^3-4x^2+4x>0 \Leftrightarrow x(x^2-4x+4)>0 \Leftrightarrow x(x-2)^2>0 \Leftrightarrow x>0$ και $x\neq 2$. Η συναλήθευση και των τριών ανισοτήτων δίνει $x\geq 1$και $x\neq 2$.

β) Επομένως για x>1 ισχύει $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{4x-4}}{\sqrt{x^3-4x^2+4x}}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{(x+2)(x-1)}-2\sqrt{x-1}}{|x-2|\sqrt{x}}$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+2}-2)}{|x-2|\sqrt{x}}=-\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{x\to 2^-}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Για x>2 θα ισχύει $|x-2|=x-2$, οπότε όπως προηγουμένως $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{4x-4}}{\sqrt{x^3-4x^2+4x}}=$ $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$. Επομένως το όριο $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ δεν υπάρχει.

12 Να βρεθούν τα όρια: α) $\lim\limits_{x\to\pi}[(x-\pi)^4\,\text{συν}\dfrac{1}{x-\pi}]$ **β)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\text{ημ}(\pi x)}{\sqrt{x+3}-2}$

Λύση:

α) $-1\leq\text{συν}\dfrac{1}{x-\pi}\leq 1$ οπότε $-(x-\pi)^4\leq(x-\pi)^4\,\text{συν}\dfrac{1}{x-\pi}\leq(x-\pi)^4$, όμως $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)^4=0$, επομένως $\lim\limits_{x\to\pi}[(x-\pi)^4\,\text{συν}\dfrac{1}{x-\pi}]=0$.

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\text{ημ}\pi x}{\sqrt{x+3}-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x+3}+2)\,\text{ημ}\pi x}{(\sqrt{x+3}+2)(\sqrt{x+3}-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x+3}+2)\,\text{ημ}\pi x}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x+3}+2)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\text{ημ}\pi x}{x-1}=4\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\text{ημ}(\pi-\pi x)}{x-1}=4\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\text{ημ}\pi(x-1)}{x-1}=-4\pi$ (βλ. ασκ.7 και 8).

13 **Αν** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}+\alpha^2 x}{x}, & x\in(-\frac{\pi}{2},0) \\ -(x+1)\beta^2+2x^3+2\beta-1, & x\in(0,\frac{\pi}{2}) \end{cases}$ **να βρεθούν τα α, β∈R έτσι ώστε να υπάρχει το** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$**.**

Λύση:

Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}[-(x+1)\beta^2+2x^3+2\beta-1]=-\beta^2+2\beta-1=-(\beta-1)^2$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}+\alpha^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2\eta\mu\frac{1}{x}+\alpha^2)=\alpha^2$, αφού $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$ (ασκ. 5β). Επομένως $\alpha^2=-(\beta-1)^2 \Leftrightarrow \alpha^2+(\beta-1)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ και $\beta=1$.

Είναι προφανές ότι για α=0 και β=1 ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$.

Προσοχή

Αν $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu\geq 0$ με $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu=0$ (1) και $\nu\in N^*$, τότε $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_\nu=0$, γιατί αν έστω και ένας από τους προσθετέους της (1) είναι διάφορος του μηδενός το άθροισμα τους θα ήταν μεγαλύτερο του μηδενός άτοπο.

14 **Να προσδιοριστούν οι τιμές των α,β αν** $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+x+2}{x-1}+\beta x$ **και** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=4$**.**

Λύση:

Επειδή $(x-1)f(x)=\alpha x^2+x+2+\beta x(x-1)$ τότε $\lim\limits_{x\to 1}[(x-1)f(x)]=\lim\limits_{x\to 1}[\alpha x^2+x+2+\beta x(x-1)] \Leftrightarrow$ $0\cdot 4=\alpha+3 \Leftrightarrow \alpha=-3$.

Τότε $f(x)=\dfrac{-3x^2+x+2}{x-1}+\beta x=\dfrac{-3(x-1)(x+\frac{2}{3})}{x-1}+\beta x=-3x-2+\beta x=(-3+\beta)x-2$. Επομένως αφού θέλουμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=4 \Leftrightarrow -3+\beta-2=4 \Leftrightarrow \beta=9$.

Οι τιμές των α,β είναι προφανές με αντικατάσταση ότι είναι και ικανές ώστε $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$.

15 **Αν είναι γνωστό ότι $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\sqrt{x}-1}=2$, και $\lim_{x\to 1}[g(x)(\sqrt{5x+4}-\sqrt{4x^2+5})]=-1$ να βρεθεί το $\lim_{x\to 1}[g(x)f(x)]$.**

Λύση:

Αν $\frac{f(x)}{\sqrt{x}-1}=k(x)$ τότε $f(x)=k(x)(\sqrt{x}-1)$ και $\lim_{x\to 1} k(x)=2$. Επίσης αν $h(x) = g(x)(\sqrt{5x+4}-\sqrt{4x^2+5})$, τότε $\lim_{x\to 1} h(x)=-1$ και $g(x)=\frac{h(x)}{\sqrt{5x+4}-\sqrt{4x^2+5}}$.

Επομένως $f(x)g(x)=k(x)h(x)\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{5x+4}-\sqrt{4x^2+5}}$, αλλά $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{5x+4}-\sqrt{4x^2+5}}=$

$$\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{5x+4}+\sqrt{4x^2+5})}{(\sqrt{5x+4}-\sqrt{4x^2+5})(\sqrt{5x+4}+\sqrt{4x^2+5})(\sqrt{x}+1)}=\frac{(x-1)(\sqrt{5x+4}+\sqrt{4x^2+5})}{(5x+4-4x^2-5)(\sqrt{x}+1)}=$$

$$\frac{(x-1)(\sqrt{5x+4}+\sqrt{4x^2+5})}{(-4x^2+5x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{(x-1)(\sqrt{5x+4}+\sqrt{4x^2+5})}{-4(x-1)(x-\frac{1}{4})(\sqrt{x}+1)}=$$

$$\frac{(x-1)(\sqrt{5x+4}+\sqrt{4x^2+5})}{(x-1)(-4x+1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{(\sqrt{5x+4}+\sqrt{4x^2+5})}{(-4x+1)(\sqrt{x}+1)}$$

Όμως $\lim_{x\to 1}[k(x)h(x)] = -2$, $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{5x+4}-\sqrt{4x^2+5}} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{5x+4}+\sqrt{4x^2+5})}{(-4x+1)(\sqrt{x}+1)} = -1$,

επομένως $\lim_{x\to 1}(f(x)g(x))=(-2)(-1)=2$.

16 **Έστω ότι υπάρχουν $\alpha,\beta\in R$ με $\alpha<0<\beta$ τέτοια ώστε ημx+κημ2x+λημ3x≤0 (1), για κάθε $x\in(\alpha,0)\cup(0,\beta)$. Να δειχθεί ότι 1+2κ+3λ=0.**

Λύση:

Αν x>0 τότε η (1) ισοδυναμεί με την $\frac{ημx}{x}+2\frac{κημ2x}{2x}+\frac{3λημ3x}{3x}\le 0$. Τότε $\lim_{x\to 0}(\frac{ημx}{x}+2\frac{κημ2x}{2x}+\frac{3λημ3x}{3x})\le 0 \Leftrightarrow 1+2κ+3λ\le 0$ (2).

Αν x<0 τότε $\frac{ημx}{x}+2\frac{κημ2x}{2x}+\frac{3λημ3x}{3x}\ge 0$ οπότε $\lim_{x\to 0}(\frac{ημx}{x}+2\frac{κημ2x}{2x}+\frac{3λημ3x}{3x})\ge 0$ $\Leftrightarrow 1+2κ+3λ\ge 0$ (3). Από (2), (3) συμπεραίνουμε ότι 1+2κ+3λ=0.

17 **Αν $f(x)=\frac{(μ^2-3)x^2+2x+4}{x^2-4}$, να βρείτε τις τιμές του μ∈R, για τις οποίες η f έχει στο x_0=2 όριο k∈R και στη συνέχεια να υπολογίσετε το k.**

Λύση:

Έστω ότι $\lim_{x\to 2} f(x)=k$ και $(x^2-4)f(x)=(μ^2-3)x^2+2x+4$. Τότε $\lim_{x\to 2}[(x^2-4)f(x)]=\lim_{x\to 2}[(μ^2-3)x^2+2x+4]\Leftrightarrow 0=(μ^2-3)\cdot 4+8\Leftrightarrow μ=\pm 1$.

Αν μ=±1, τότε $f(x)=\frac{-2x^2+2x+4}{x^2-4}=\frac{-2(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\frac{-2(x+1)}{x+2}$. Επομένως $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x+1)}{x+2}=-\frac{3}{2}$.

18 **Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και ισχύει $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x}{x-1}=2$. Να βρεθεί το $\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)-1}{\sqrt{x}-1}$.**

Λύση:

Έστω $\frac{f(x)-x}{x-1}=g(x)$, τότε f(x)=g(x)(x-1)+x και $\lim_{x\to 1} g(x)=2$.

Όμως

$\frac{xf(x)-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{xg(x)(x-1)+x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(x-1)[xg(x)+x+1](\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=[xg(x)+x+1]\cdot(\sqrt{x}+1)$, επομένως $\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)-1}{\sqrt{x}-1}=(1\cdot 2+2)\cdot 2=8$.

Προσοχή

Όταν δίνεται το όριο μιας σύνθετης παραστάσεως όπου εμπλέκεται μία συνάρτηση π.χ η f(x), θέτουμε την παράσταση ίση με μια άλλη συνάρτηση για παράδειγμα την g(x) και λύνουμε ως προς την f(x), αν είναι δυνατό. Έτσι εκτός από την f(x) μπορούμε να βρούμε και το όριό της (βλέπε και την άσκηση 15).

19 **Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x), \lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)\in R$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x))$.**

Λύση:

Ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0^-} (f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \lim\limits_{x\to x_0^-} g(x) = 0\cdot \lim\limits_{x\to x_0^-} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} (f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=0\cdot \lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=0$. Άρα $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x))=0$.

Προσοχή

Η ύπαρξη των ορίων $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)$ είναι εντελώς απαραίτητη ώστε να έχει νόημα η ισότητα $\lim\limits_{x\to x_0^-} (f(x)g(x))= \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)$

20 **Δίνεται μία συνάρτηση f ορισμένη στο R για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} [f^2(x)+\eta\mu^2 2x]=0$. Να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.**

Λύση:

Θέτω $f^2(x)+\eta\mu^2 2x=g(x)$. Τότε $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ και $f^2(x)=g(x)-\eta\mu^2 2x$, επομένως $\lim\limits_{x\to 0} f^2(x)= \lim\limits_{x\to 0} [g(x)-\eta\mu^2 2x]=0$, οπότε και $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{f^2(x)}=0$ δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)|=0$.

Όμως $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$ και από το θεώρημα παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Προσοχή

Στην άσκηση 20 αποδείχθηκε η πρόταση: Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x)=0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

21 **Αν $f(x)=\begin{cases} (\alpha-2\beta)x & x>2 \\ -\beta x-1 & x\le 2 \end{cases}$ και $\alpha,\beta\in Z$. Να εξετασθεί αν υπάρχει το όριο της f(x) στο $x_0=2$.**

Λύση:

Για να υπάρχει το $\lim_{x\to 2} f(x)$ πρέπει και αρκεί $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow -2\beta-1=(\alpha-2\beta)\cdot 2 \Leftrightarrow$ $2\beta=2\alpha+1$ δηλαδή ένας άρτιος να ισούται με ένα περιττό το οποίο είναι άτοπο. Άρα το $\lim_{x\to 2} f(x)$ δεν υπάρχει.

22 **Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\kappa^2-1)x^3+(\kappa^2-3\kappa+2)x^2+(\kappa-1)x+2$. Αν $f(\kappa)$ είναι ο βαθμός του $P(x)$, να βρεθεί η $f(k)$ και να υπολογισθεί το $\lim_{\kappa\to -1} f(\kappa)$**

Λύση:

Ισχύει $\kappa^2-1=(\kappa-1)(\kappa+1)$, επομένως όταν $\kappa\neq\pm 1$ τότε $f(\kappa)=3$. Αν $\kappa=1$ τότε $P(x)=2$, επομένως $f(1)=0$, ενώ για $\kappa=-1$ $P(x)=6x^2-2x+2$, επομένως $f(-1)=2$.

Τελικά $f(\kappa)=\begin{cases} 3 & \kappa\neq\pm 1 \\ 2 & \kappa=-1 \\ 0 & \kappa=1 \end{cases}$, επομένως $\lim_{\kappa\to -1} f(\kappa)=3$.

23 **Δίνεται μια συνάρτηση f με $f^3(x)+xf^2(x)+3x^2f(x)-5\eta\mu^3x=0$ (1) για κάθε $x\in R$. Αν $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=k\in R$, να υπολογισθεί το k.**

Λύση:

Για $x\neq 0$ η (1) είναι ισοδύναμη με $\frac{f^3(x)}{x^3}+\frac{f^2(x)}{x^2}+3\frac{f(x)}{x}-5\frac{\eta\mu^3x}{x^3}=0$. Παίρνοντας τα όρια και των δύο μελών της τελευταίας έχω: $k^3+k^2+3k-5=0$. Με την βοήθεια του σχήματος Horner η τελευταία είναι ισοδύναμη με την $(k-1)(k^2+2k+5)=0 \Leftrightarrow k=1$, αφού η δευτεροβάθμια $k^2+2k+5=0$ δεν έχει ρίζες πραγματικές.

24 **Αν $\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=0$ και $f(x)<0<g(x)$ για κάθε $x\in R$, να υπολογισθούν το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ καθώς και το $\lim_{x\to x_0} g(x)$.**

Λύση:

Αφού $f(x)<0<g(x)$ τότε $f(x)-g(x)<-g(x)<0 \Leftrightarrow 0<g(x)<-(f(x)-g(x))$. Όμως $\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=0$, επομένως από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$.

Ισχύει f(x)= (f(x)-g(x))+g(x) άρα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0+0=0$.

25 **Αν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ και $D_f=R$, να υπολογισθούν τα όρια:**

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{2x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{\eta\mu 2x}$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x}$

Λύση:

α) Αφού $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ τότε και $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=0$ ή $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|}=0 \Leftrightarrow 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{2|x|}=0 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{2|x|}=0$. Άρα $0=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|f(x)|}{-2x}=-\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|f(x)|}{2x}$ δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|f(x)|}{-2x}=0$. Ομοίως $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|f(x)|}{2x}=$

0, άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{2x}=0$.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{\eta\mu 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{|f(x)|}{2x}}{\frac{\eta\mu 2x}{2x}}=\frac{0}{1}=0$.

γ) Θέτω y=3x, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{3f(y)}{y}=3\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}=3\cdot 0=0$.

26 **Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και με την ιδιότητα $\lim\limits_{x\to 0} f(x+\alpha)=-1$. Να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to 2\alpha} f(x-\alpha)$.**

Λύση:

Αν θέσω t=x+α τότε t→α καθώς x→0, επομένως $\lim\limits_{t\to\alpha} f(t)=-1$ (1).

Θέτω u=x-α, τότε $\lim\limits_{x\to 2\alpha} u=\alpha$, επομένως $\lim\limits_{x\to 2\alpha} f(x-\alpha)=\lim\limits_{u\to\alpha} f(u)=-1$ λόγω (1).

Άλυτες Ασκήσεις

1 Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2\nu}-1}{x^{\nu}-1}$, $\nu\in\mathbf{N}^*$ **β)** $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1+3\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-3}{x-1}$

δ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x^2-5x+6}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ **ς)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt{x+1}-1}$

2 Να βρεθούν όσα απ' τα παρακάτω όρια υπάρχουν :

α) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2x-x^2|}{x}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

δ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|+x^2-x-2}{x^2-4}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x\,\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$ **ς)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha x}{x}$

ζ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{\sqrt{\beta x+\gamma^2}-\gamma}$, $\beta>0$.

3 Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο **R** και για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $|xf(x)-\eta\mu 2x|\le x^2$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

4 Αν $\sqrt{1+4x}\le (x-2)f(x)+3\le 4\sqrt{7+x}-9$ για κάθε $x\in[-\frac{1}{4},+\infty)$ να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

5 Αν $|f(x)-x^2|\le 2004|x|$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

6 Αν $2x-x^2\le f(x)\le 2x+x^2$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και $g(x)=\dfrac{2f(x)+x}{f(x)+2x}$, να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$.

7 Να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ όπου:

α) $f(x)=\begin{cases}x^2\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$ και $x_0=0$ **β)** $f(x)=x^3\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}-x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}$ και $x_0=0$

γ) $f(x)=\sqrt[5]{x^2}\,(1-\eta\mu\frac{1}{x})$ και $x_0=0$

8 Για ποια τιμή του $\alpha\in\mathbf{R}$ η $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x, & x\le 1 \\ \dfrac{\eta\mu 2x}{\sqrt{1+3x}-1}, & x\rangle 1 \end{cases}$ έχει όριο πραγματικό αριθμό στο $x_0 = 1$;

9 Για ποια τιμή του $\alpha\in\mathbf{R}$ η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(\alpha-2)x+2}{x^2-1}$ έχει στο $x_0=1$ όριο πραγματικό αριθμό;

10 Αν $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+x+\beta-1}{x}$, $x\neq 0$ να βρείτε τις τιμές των α, β έτσι ώστε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός.

11 Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-\alpha}{x-2}=\alpha$, να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbf{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$\lim_{x\to 2}\frac{xf(x)-2\alpha}{x-2}=10\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}.$$

12 Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\alpha^2}{x-1}=\alpha$, να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbf{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2f(x)-\alpha^2}{x-1}\le 1+\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}.$$

13 Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbf{R}$ υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{|x^2-(2+\lambda)x+2\lambda|}{x-\lambda}$;

14 Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}$ όπου το x μετριέται σε μοίρες.

15 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2-\lambda)x^3+(\lambda-1)x^2+(\lambda^2-3\lambda+2)x+\lambda-1$ και η συνάρτηση $f(\lambda)$ = ο βαθμός του $P(x)$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f

β) Να υπολογισθούν τα όρια: i) $\lim\limits_{\lambda\to 1} f(\lambda)$ ii) $\lim\limits_{\lambda\to 0} f(\lambda)$

16 Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το **R** και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=k$. Να δειχθεί ότι:

α) Αν η f είναι άρτια τότε $\lim\limits_{x\to -x_0} f(x)=k$.

β) Αν η f είναι περιττή τότε $\lim\limits_{x\to -x_0} f(x)=-k$.

17 Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο **R** για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\alpha\neq 0$. Να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\alpha x)}{x^2+x}$.

18 Αν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu 2x}=2$ και $\lim\limits_{x\to 0}((\sqrt{x+4}-2)g(x))=5$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)g(x))$.

19 Για τις συναρτήσεις f, g ορισμένες στο **R** ισχύει $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=2$ και $\lim\limits_{x\to 3}[g(x)(2x^2-5x-3)]=-1$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 3}[g(x)f(x)]$.

20 Αν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{\eta\mu x}=2$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{\eta\mu x}=3$, τότε να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$. Να υπολογισθούν επίσης τα όρια: $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-1}{\eta\mu x}$ και $B=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)-g(x)\eta\mu x-x+\eta\mu x}{\eta\mu^2 x}$.

21 Αν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x}=3$, τότε να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$. Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-1}{x}$.

22 Αν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)-\eta\mu^2 x}{2x^2-\eta\mu^2 x}$.

23 Μία συνάρτηση f είναι ορισμένη στο σύνολο $(\alpha,1)\cup(1,\beta)$ και ισχύουν: $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-x}{x^2-1}=2$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\kappa^2-\kappa+1$. Να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in\mathbf{R}$, έτσι ώστε να υπάρχει το όριο της f στο $x_0=1$.

24 Δίνεται μία συνάρτηση f ορισμένη στο **R**, με $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-x}{x-2}=4$. Για ποια τιμή του $\lambda\in\mathbf{R}$ η συνάρτηση $g(x)=\frac{xf(x)-3\lambda-\lambda^2}{x^2-4}$ έχει στο $x_0=2$ όριο πραγματικό αριθμό. Να βρεθεί αυτό το όριο.

25 Να αποδειχθεί ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x+\eta\mu 2x+\ldots+\eta\mu kx}{x}=\frac{k(k+1)}{2}$.

26 Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ τέτοια ώστε: $xf(x)\varepsilon\varphi x+\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{2x^2+1}$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3/2$.

Απαντήσεις - Υποδείξεις

$\boxed{1}$ **α)** $x^{2\nu}-1=(x^{\nu}-1)(x^{\nu}+1)$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2\nu}-1}{x^{\nu}-1}=2$, **β)** Επειδή $x\to 1^{+}$ παίρνω $x>1$, , οπότε $x-1=\left(\sqrt{x-1}\right)^2$. Τότε το όριο ισούται με 3, **γ)** Θέτω $x^{1/6}=y$, τότε όταν $x\to 1$ το $y\to 1$. Επίσης $\sqrt[3]{x}=x^{1/3}=(x^{1/6})^2=y^2$. Ομοίως $\sqrt{x}=y^3$, $x=y^6$, κλπ. Το όριο είναι 4/3, **δ)** Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή με το $\sqrt{2x}+2$. Το όριο είναι $-\frac{1}{2}$, **ε)** Το όριο εδώ έχει νόημα μόνο όταν $x>0$. Τότε $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$ κλπ. Το ζητούμενο όριο είναι το -1, **ς)** Θέτω $\sqrt[3]{1+x}=y$. Τότε $y\to 1$ όταν $x\to 0$. Το κλάσμα ισούται με $\frac{y-1}{y^3-1}$ κλπ. Το όριο είναι το 1/3. $\boxed{2}$ **α)** Το όριο δεν υπάρχει γιατί όταν $x>5$ τότε $\lim\limits_{x\to 5^+}\frac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5^+}\frac{x^2-3x-10}{x-5}=7$, ενώ $\lim\limits_{x\to 5^-}\frac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5}=5$, **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|2x-x^2|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{|x|}{x}|2-x|)$. Το όριο δεν υπάρχει γιατί τα πλευρικά όρια δεν συμπίπτουν, **γ)** $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{3}{x^3-1}-\frac{1}{x-1})=\lim\limits_{x\to 1}(\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{1}{x-1})=$ $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{3-x^2-x-1}{(x-1)(x^2+x+1)})=\ldots=1$, **δ)** Όπως και στο β) το όριο δεν υπάρχει, γιατί τα πλευρικά όρια δεν συμπίπτουν, **ε)** $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x\eta\mu\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\eta\mu x}{x}x\,\eta\mu\frac{1}{x})=$ $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\eta\mu x}{x})\cdot\lim\limits_{x\to 0}(x\,\eta\mu\frac{1}{x})=\ldots=1\cdot 0$, **ς)** $\frac{\varepsilon\varphi\alpha x}{x}=\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha x}\cdot\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}$ κλπ, το όριο είναι το α. **ζ)** $\frac{2\alpha\gamma}{\beta}$ αν $\gamma\geq 0$, 0 αν $\gamma<0$, $\boxed{3}$ Ισχύει $-x^2\leq xf(x)-\eta\mu 2x\leq x^2$, αν $x>0$ τότε $-x+\frac{\eta\mu 2x}{x}\leq f(x)\leq x+\frac{\eta\mu 2x}{x}$ κλπ, κριτήριο παρεμβολής, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$. $\boxed{4}$ Για $x\neq 2$ ισχύει $\sqrt{1+4x}-3\leq(x-2)f(x)\leq 4\sqrt{7+x}-12 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+4x}-3}{x-2}\leq f(x)\leq\frac{4\sqrt{7+x}-12}{x-2}$ κλπ, κριτήριο παρεμβολής, $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\frac{2}{3}$. $\boxed{5}$ Ισχύει $-2004|x|\leq f(x)-x^2\leq 2004|x|$ κλπ, κριτήριο

παρεμβολής, $\lim_{x\to 0} f(x)=0$. **6** Με το κριτήριο παρεμβολής υπολογίζουμε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$. Τότε για $x\neq 0$ $g(x)=\frac{2\frac{f(x)}{x}+1}{\frac{f(x)}{x}+2}$ κλπ, $\lim_{x\to 0} g(x)=\frac{5}{4}$. **7** **α)** Για $x\neq 0$, $-1\leq \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\leq 1$, πολ/ζω όλα τα μέλη της ανισώσεως με x^2 κλπ, $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, **β)** Ισχύει $-1\leq \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\leq 1$, $x\neq 0$ και $-1\leq -\eta\mu\frac{1}{x}\leq 1$ κλπ, κριτήριο παρεμβολής, $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, **γ)** $-1\leq -\eta\mu\frac{1}{x}\leq 1$ κλπ, κριτήριο παρεμβολής, $\lim_{x\to 0} f(x)=0$. **8** Για να υπάρχει το όριο της f(x) στο 1 πρέπει και αρκεί $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, κλπ. Πρέπει $\alpha=\eta\mu 2-1$. **9** Έστω $\lim_{x\to 1} f(x)=k\in\mathbf{R}$. Τότε αφού $(x^2-1)f(x)=(\alpha-2)x+2$ συμπεραίνουμε ότι $\alpha=0$ (βλ. Λυμ. Ασκ. την 9). **10** Όπως και στην 3.9, $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta=1$. **11** $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\frac{2}{3}$. Θέτω $\frac{xf(x)-2\alpha}{x-2}=g(x)$, τότε $f(x)=(x-2)g(x)+\alpha$ κλπ, $\alpha=20/9$. **12** $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}=-1$. Θέτω $\frac{f(x)-\alpha^2}{x-1}=g(x)$ κλπ όπως προηγουμένως. Τότε $\alpha\in[-\frac{1}{2},0]$. **13** Ισχύει $\frac{|x^2-(2+\lambda)x+2\lambda|}{x-\lambda}=\frac{|(x-\lambda)(x+2)|}{x-\lambda}$. Τότε $\lim_{x\to\lambda^+}\frac{|x^2-(2+\lambda)x+2\lambda|}{x-\lambda}=|\lambda-2|$, ενώ $\lim_{x\to\lambda^-}\frac{|x^2-(2+\lambda)x+2\lambda|}{x-\lambda}=-|\lambda-2|$, επομένως το όριο υπάρχει μόνο όταν $\lambda=2$. **14** Αν οι x μοίρες αντιστοιχούν σε y ακτίνια τότε $\frac{x}{180}=\frac{y}{\pi}$ και εφx=εφy. Επομένως $\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{\varepsilon\varphi y}{\frac{y180}{\pi}}=\ldots=\frac{\pi}{180}$. **15** Επειδή όταν $\lambda=1$ το P(x) ισούται με το μηδενικό πολυώνυμο το οποίο δεν έχει βαθμό, η f ορίζεται στο $\mathbf{R}-\{1\}$. Ισχύει $\lim_{\lambda\to 1} f(\lambda)=3=\lim_{\lambda\to 0} f(\lambda)$. **16** Ισχύει $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$. Θέτω $u=-x$, τότε όταν $x\to x_0$ το $u\to -x_0$ κλπ. **17** Θέτω $\alpha x=u$, τότε $u\to 0$ καθώς το $x\to 0$. $\frac{f(\alpha x)}{x^2+x}=\frac{f(u)}{\frac{u^2}{\alpha^2}+\frac{u}{\alpha}}$ κλπ, το

ζητούμενο όριο είναι α^2. **18** Θέτω $\frac{f(x)}{\eta\mu 2x}=\kappa(x)$ και $(\sqrt{x+4}-2)g(x)=\lambda(x)$, κλπ. Το όριο είναι 80. **19** Θέτω $\frac{f(x)}{x-3}=\kappa(x)$ και $(2x^2-5x-3)g(x)=\lambda(x)$, κλπ. Το όριο είναι -2/7. **20** Θέτω $\frac{f(x)-1}{\eta\mu x}=\kappa(x)$ και $\frac{g(x)-1}{\eta\mu x}$, κλπ, Α=5, Β=-1. **21** Όπως η 20). Τό όριο είναι 5. **22** Διαιρώ τους όρους του κλάσματος $\frac{xf(x)-\eta\mu^2 x}{2x^2-\eta\mu^2 x}$ με το x^2. Η απάντηση είναι 1. **23** Θέτω $\frac{f(x)-x}{x^2-1}=\lambda(x)$ κλπ, κ=0 ή κ=1. **24** Θέτω $\frac{f(x)-x}{x-2}=\kappa(x)$ κλπ, λ=-4 ή λ=1. Τότε $g(x)=\frac{x(f(x)-x)+x^2-4}{x^2-4}$ κλπ. $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=3$.

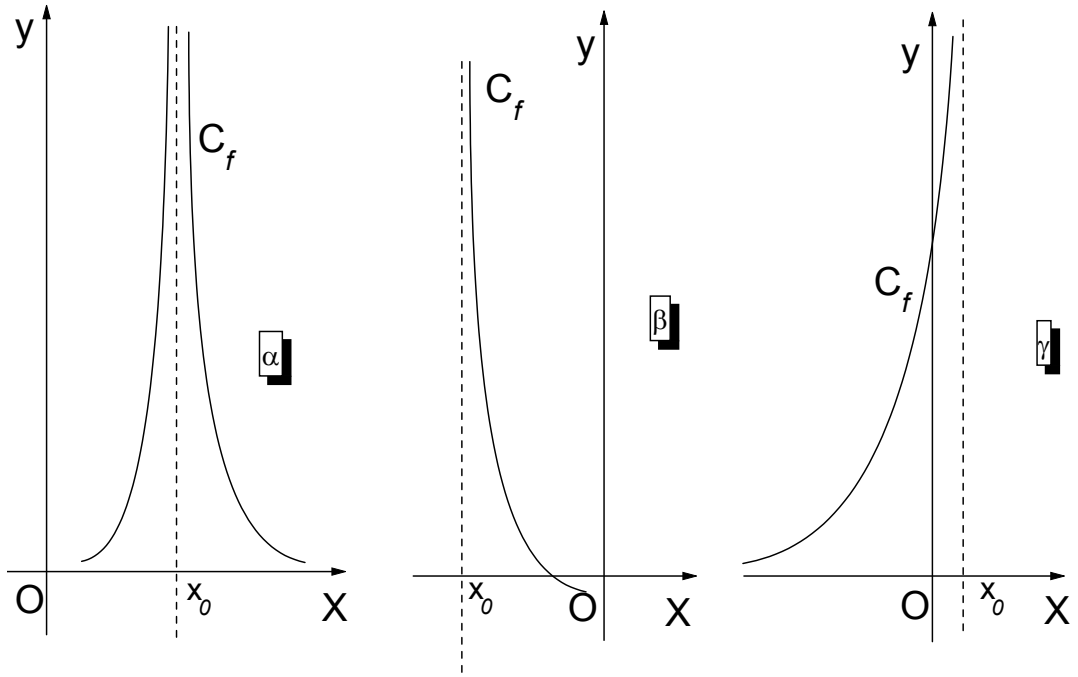
25 $\frac{\eta\mu x+\eta\mu 2x+\ldots+\eta\mu kx}{x}=\frac{\eta\mu x}{x}+2\frac{\eta\mu 2x}{2x}+3\frac{\eta\mu 3x}{3x}+\ldots+k\frac{\eta\mu kx}{kx}$ κλπ. **26** Για $x\neq 0$ ισχύει $f(x)=\left(\frac{\sqrt{2x^2+1}-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right)\Big/\left(\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\right)$ κλπ.

§ 4.3 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ x_0

- Όταν οι τιμές μιας συναρτήσεως αυξάνονται απεριόριστα και μπορούν να γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό Μ όταν το x πλησιάζει τον αριθμό x_0 τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

ΣΧΗΜΑ 3

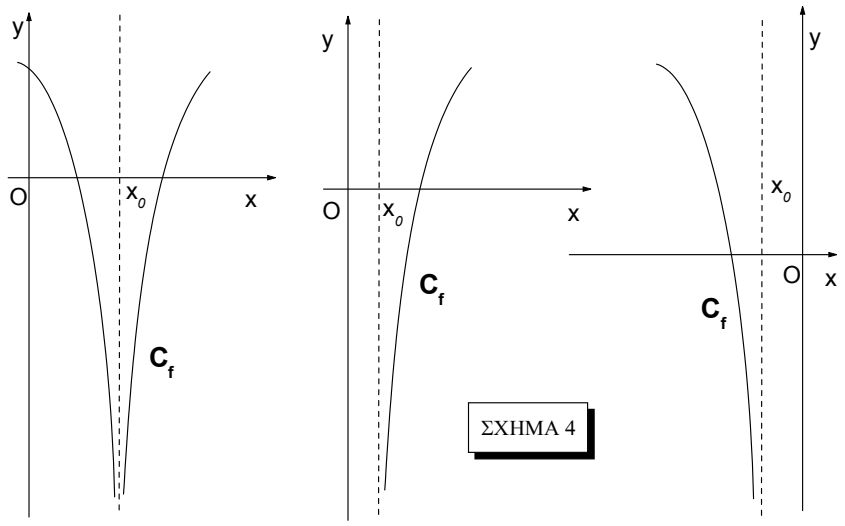


Στο σχήμα 3α ισχύει $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, ενώ στα σχήματα 3β, 3γ συναντάμε την περίπτωση της υπάρξεως μόνο πλευρικών ορίων συγκεκριμένα των $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ αντίστοιχα.

- Αν οι τιμές μιας συναρτήσεως καθώς το x πλησιάζει το x_0 γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό –Μ (Μ>0) τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Αντίστοιχα ορίζονται και τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$ (βλέπε



σχ.4)

Προσοχή

Το πεδίο ορισμού της f πρέπει να επιτρέπει στο x να πλησιάζει το x_0 όσο κοντά θέλουμε άρα θα πρέπει να περιέχει σύνολο της μορφής (α, x_0) ή (x_0,β) ή $(\alpha, x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Ιδιότητες μη πεπερασμένου ορίου στο x_0

α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)= \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)= \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|=+\infty$

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)}=+\infty$

Σημαντική εφαρμογή στις ασκήσεις έχουν και οι εξής δύο ιδιότητες:

1) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}=0$.

2) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}=+\infty$, ενώ

αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}=-\infty$.

Προσοχή

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{2\nu}}=+\infty$, $\nu\in\mathbf{N}^*$,

όμως $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty$, $\nu\in\mathbf{N}$, επομένως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu\in\mathbf{N}$.

Όσον αφορά τις πράξεις μεταξύ των ορίων ισχύουν τα εξής:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =$	$\alpha\in\mathbf{R}$	$\alpha\in\mathbf{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) =$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) =$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) =$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x)) =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;

Σύμφωνα με τον πίνακα για παράδειγμα $-3\cdot(+\infty)=-\infty$.

Όμως υπάρχουν και οι **απροσδιόριστες μορφές**, δηλαδή πράξεις με το $\pm\infty$ και το 0 που δεν μπορούν να ορισθούν μονοσήμαντα.

Οι πράξεις αυτές είναι οι εξής:

$$(+\infty)+(-\infty) \qquad 0\cdot(\pm\infty) \qquad (+\infty)-(+\infty) \qquad (-\infty)-(-\infty) \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Εδώ η εξαγωγή κανόνα δεν είναι δυνατή γιατί το όριο (όταν υπάρχει), εξαρτάται από την μορφή που έχουν κάθε φορά οι συναρτήσεις.

Για παράδειγμα:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{x^2} \cdot x^2) = 1$, όμως

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{x^2} \cdot x^3) = \lim\limits_{x\to 0} x = +\infty$.

Λυμένες Ασκήσεις

1 Να βρεθούν τα παρακάτω όρια: α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-4}{x^2+2x^3}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{12}{(x-2)^2}$

Λύση:

α) Παρατηρώ ότι $\lim\limits_{x\to 0}(x-4)=-4\neq 0$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2x^3)=0$. Όμως $x^2+2x^3=x^2(1+2x)$ και $1+2x>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2}$, δηλαδή $x^2(1+2x)>0$ κοντά στο 0. Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-4}{x^2+2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}(x-4)\cdot \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+2x^3}=-4\cdot(+\infty)=-\infty$.

β) Επειδή $(x-2)^2>0$ για κάθε $x\neq 2$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{12}{(x-2)^2}=12\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=12\cdot(+\infty)=+\infty$.

2 Να βρεθούν, εφ' όσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+5}{|x|x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+1}{|x+2|}$.

Λύση:

α) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+5}{|x|x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+5)\cdot \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=5\cdot(+\infty)=+\infty$, αφού περιοριζόμαστε στα $x>0$, επειδή $x\to 0^+$, οπότε $|x|=x$.

Ανάλογα $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+5}{|x|x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+5)\cdot \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{-x^2}=5\cdot(-\infty)=-\infty$. Επομένως το όριο δεν υπάρχει αφού τα δύο πλευρικά όρια δεν συμπίπτουν.

β) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+1}{|x+2|}=\lim\limits_{x\to -2}(x^2+1)\cdot \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{|x+2|}=5\cdot(+\infty)=+\infty$, αφού $|x+2|>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, $x\neq 0$.

3 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{1+2x}}{x^5}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Λύση:

α) Πρέπει $x\neq 0$, $1-3x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq \frac{1}{3}$ και $1+2x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}$, άρα συναληθεύοντας και τους τρεις περιορισμούς, συμπεραίνω ότι $D_f=[-\frac{1}{2},0)\cup(0,\frac{1}{3}]$.

β) Παρατηρώ ότι $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1-3x}-\sqrt{1+2x})=0=\lim\limits_{x\to 0} x^5$, δηλαδή το όριο έχει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Μετασχηματίζω την f(x) έτσι ώστε να αρθεί η απροσδιοριστία. Ισχύει

$$f(x)=\frac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{1+2x}}{x^5}=\frac{(\sqrt{1-3x}-\sqrt{1+2x})(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+2x})}{x^5(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+2x})}=$$

$$\frac{(1-3x)-(1+2x)}{x^5(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+2x})}=\frac{-5x}{x^5(\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+2x})}=\frac{-5}{x^4}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+2x}}.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-5}{x^4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-3x}+\sqrt{1+2x}}=-\infty\cdot(\frac{1}{2})=-\infty$.

$\boxed{4}$ Να προσδιοριστούν τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$, έτσι ώστε η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x+4}{x^2-1} & x<1\\[2mm] \dfrac{\beta x^2+\gamma x+3}{x-1} & x>1\end{cases}$$ **να έχει όριο πραγματικό αριθμό στη θέση $x_0=1$.**

Λύση:

Παρατηρώ ότι $\lim\limits_{x\to 1^-}(\alpha x+4)=\alpha+4$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-1)=0$. Αν μάλιστα, επειδή $x\to 1^-$, περιοριστώ για τα x, στο διάστημα $(\frac{1}{2},1)$, τότε $x^2-1<0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\alpha x+4}{x^2-1}=(\alpha+4)\cdot(-\infty)$.

Αν $\alpha+4\neq 0$ τότε το γινόμενο $(\alpha+4)\cdot(-\infty)$ είναι ή $-\infty$ ή $+\infty$, δηλαδή μη πραγματικός αριθμός. Επομένως αναγκαία συνθήκη για να είναι το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\in\mathbf{R}$, είναι η $\alpha=-4$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-4(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-4}{x+1}=-2$.

Με ανάλογες σκέψεις για το $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ βρίσκω ότι πρέπει β+γ=-3.

Όμως πρέπει να ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-2$. Δηλαδή $-2=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\beta x^2+\gamma x-\beta-\gamma}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\beta(x^2-1)+\gamma(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}[\beta(x+1)+\gamma]=2\beta+\gamma$.

Από το σύστημα των β+γ=-3, 2β+γ=-2, βρίσκω ότι πρέπει β=1 και γ=-4.

Με τις ευρεθείσες τιμές για τα α,β,γ εύκολα διαπιστώνω ότι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-2$.

<u>*2ος Τρόπος:*</u> Έστω $g(x)=\dfrac{\alpha x+4}{x^2-1}$, $x\neq\pm 1$. Τότε $g(x)(x^2-1)=\alpha x+4$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-}[g(x)(x^2-1)]=$

$\lim\limits_{x\to 1^-}(\alpha x+4)\Leftrightarrow 0=\alpha+4\Leftrightarrow \alpha=-4$ κλπ.

5 Αν για την συνάρτηση f ορισμένη στο R ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί κ και λ τέτοιοι ώστε: $\lim\limits_{x\to x_0}[\sqrt[3]{f^3(x)+2f(x)-3}-\kappa f(x)-\lambda]=0$.

Λύση:

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, ισχύει f(x)>0 κοντά στο x_0.

Όμως $g(x)=\sqrt[3]{f^3(x)[1+\dfrac{2}{f^2(x)}-\dfrac{3}{f^3(x)}]}-\kappa f(x)-\lambda=|f(x)|\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{f^2(x)}-\dfrac{3}{f^3(x)}}-\kappa f(x)-\lambda=$

$f(x)[\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{f^2(x)}-\dfrac{3}{f^3(x)}}-\kappa-\dfrac{\lambda}{f(x)}]$. Επειδή δε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{f^2(x)}-\dfrac{3}{f^3(x)}}=1$, τότε

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=(+\infty)\cdot(1-\kappa)\neq 0$, αν $1-\kappa\neq 0$.

Άρα αναγκαία συνθήκη για να ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}[\sqrt[3]{f^3(x)+2f(x)-3}-\kappa f(x)-\lambda]=0$ είναι η $1-\kappa=0\Leftrightarrow\kappa=1$.

Επειδή x-y=$\dfrac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$ (1), έχουμε $\sqrt[3]{f^3(x)+2f(x)-3}$ -f(x)=

$$\frac{f^3(x)+2f(x)-3-f^3(x)}{\sqrt[3]{\left(f^3(x)+2f(x)-3\right)^2}+\sqrt[3]{f^3(x)+2f(x)-3}f(x)+f^2(x)}=$$

$$\frac{\dfrac{2}{f(x)}-\dfrac{3}{f^2(x)}}{\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{2}{f^2(x)}-\dfrac{3}{f^3(x)}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{f^2(x)}-\dfrac{3}{f^3(x)}}+1}$$

(διαιρούμε και τους δύο όρους του κλάσματος με το $f^2(x)$).

Τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[\sqrt[3]{f^3(x)+2f(x)-3}$ - f(x)] $=\dfrac{0-0}{\sqrt[3]{1+0-0}+\sqrt[3]{1+0-0}+1}$=0.

Όμως θέλω $\lim\limits_{x\to x_0}[\sqrt[3]{f^3(x)+2f(x)-3}$ - f(x) - λ] = 0, πράγμα που σημαίνει ότι πρέπει 0-λ=0 ⇔ λ=0.

Αντικαθιστώντας όπου κ=1 και λ=0 και χρησιμοποιώντας την (1) διαπιστώνω πράγματι ότι $\lim\limits_{x\to x_0}[\sqrt[3]{f^3(x)+2f(x)-3}$ - f(x) = 0.

6 Αν $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{(x+2)^2}$=-∞, μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα για το $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχει;

Λύση:

α) Έστω ότι $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=k\in\mathbf{R}$.

Τότε αν k≠0, $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{(x+2)^2}=\lim\limits_{x\to -2}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{(x+2)^2}$=k(+∞), όμως από την υπόθεση θα πρέπει k(+∞)=-∞, επομένως k<0. Μια τέτοια συνάρτηση είναι για παράδειγμα η f(x)=-1.

Μπορεί όμως το k να είναι και το 0. Πράγματι έστω f(x)=-$|x+2|$. Τότε $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$ =0,

ενώ $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{(x+2)^2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-|x+2|}{|x+2|^2}=\lim\limits_{x\to -2}(-\dfrac{1}{|x+2|})$=-∞.

β) Έστω ότι $\lim\limits_{x\to -2}f(x)\notin\mathbf{R}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)}{(x+2)^2}=\lim\limits_{x\to -2}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to -2}\frac{1}{(x+2)^2}$ το οποίο ισούται: α) είτε με $(+\infty)(+\infty)=+\infty$, αν $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=+\infty$, το οποίο όμως δεν μπορεί να συμβαίνει γιατί από την υπόθεση $\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)}{(x+2)^2}=-\infty$, είτε β) με $(-\infty)(+\infty)=-\infty$, δεκτό. Επομένως, το $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$ μπορεί να είναι $-\infty$. Για παράδειγμα $f(x)=-\frac{1}{|x+2|}$.

7 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}-\alpha}{\sqrt{x^2+\beta^2}-\beta}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

Λύση:

α) Ισχύει $\sqrt{x^2+\beta^2}-\beta=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+\beta^2}=\beta\Leftrightarrow x=0$ και $\beta\geq 0$. Άρα για το πεδίο ορισμού που εξαρτάται από το β έχουμε:

1) $\beta<0$ τότε $D_f=\mathbf{R}$

2) $\beta\geq 0$ τότε $D_f=\mathbf{R}-\{0\}$

β) i) $\beta<0$ τότε $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}-\alpha}{\sqrt{x^2+\beta^2}-\beta}=\frac{|\alpha|-\alpha}{|\beta|-\beta}=\frac{|\alpha|-\alpha}{-2\beta}$. Επομένως $A=0$ αν $\alpha\geq 0$, ή $A=\frac{\alpha}{\beta}$ αν $\alpha<0$.

ii) Αν $\beta=0$ τότε $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}-\alpha}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+\alpha^2}-\alpha)(\sqrt{x^2+\alpha^2}+\alpha)}{|x|(\sqrt{x^2+\alpha^2}+\alpha)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+\alpha^2}+\alpha}=\frac{0}{|\alpha|+\alpha}=0$ για $\alpha>0$. Αν και $\alpha=0$ τότε $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{|x|}=1$.

Έστω τώρα $\alpha<0$, τότε $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}-\alpha}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|}\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x^2+\alpha^2}-\alpha)=(+\infty)(|\alpha|-\alpha)=(+\infty)(-2\alpha)=+\infty$.

iii) Έστω τώρα $\beta>0$, τότε

αν α<0, έχουμε $A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}-\alpha}{\sqrt{x^2+\beta^2}-\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+\beta^2}-\beta}\lim_{x\to 0}(\sqrt{x^2+\alpha^2}-\alpha)=+\infty\cdot(-2\alpha)=+\infty$, αφού $\sqrt{x^2+\beta^2}-\beta\geq 0$.

Αν α=0 τότε

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+\beta^2}-\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|(\sqrt{x^2+\beta^2}+\beta)}{(\sqrt{x^2+\beta^2}-\beta)(\sqrt{x^2+\beta^2}+\beta)}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x^2+\beta^2}+\beta)=2\beta.$$

Έστω τώρα α>0, τότε

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}-\alpha}{\sqrt{x^2+\beta^2}-\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+\alpha^2}-\alpha)(\sqrt{x^2+\alpha^2}+\alpha)(\sqrt{x^2+\beta^2}+\beta)}{(\sqrt{x^2+\beta^2}-\beta)(\sqrt{x^2+\beta^2}+\beta)(\sqrt{x^2+\alpha^2}+\alpha)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+\beta^2}+\beta}{\sqrt{x^2+\alpha^2}+\alpha}=\frac{|\beta|+\beta}{|\alpha|+\alpha}=\frac{2\beta}{2\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Τελικά:

$\beta>0$	$\alpha>0$ $\alpha=0$ τότε $\alpha<0$	$A=\frac{\beta}{\alpha}$ $A=2\beta$ $A=+\infty$	$\beta=0$	$\alpha>0$ $\alpha=0$ τότε $\alpha<0$	$A=0$ $A=1$ $A=+\infty$	$\beta<0$	$\alpha\geq 0$ $\alpha<0$ τότε	$A=0$ $A=\frac{\alpha}{\beta}$

8 Δίνεται η συνάρτηση f(x) ορισμένη στο $(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$. Αν ισχύει $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)(1-\sigma\upsilon\nu x)}{\sqrt{|x|+1}-1}=-\infty$, να υπολογισθεί το $\lim_{x\to 0}f(x)$.

Λύση:

Θέτουμε $\frac{f(x)(1-\sigma\upsilon\nu x)}{\sqrt{|x|+1}-1}=g(x)$, $x\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$. Τότε $f(x)=g(x)\cdot\frac{\sqrt{|x|+1}-1}{1-\sigma\upsilon\nu x}=$

$$g(x)\frac{(\sqrt{|x|+1}+1)(\sqrt{|x|+1}-1)}{(1-\sigma\upsilon\nu x)(\sqrt{|x|+1}+1)}=g(x)\frac{|x|}{(1-\sigma\upsilon\nu x)(\sqrt{|x|+1}+1)}=g(x)\frac{1}{\left|\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|}\frac{1}{\sqrt{|x|+1}+1}$$

Επομένως $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}g(x)\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left|\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{|x|+1}+1}=(-\infty)(+\infty)\frac{1}{2}=-\infty.$

9 **Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και f(x)+x-3≠0 για κάθε x∈R. Αν επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-3}{f(x)+x-3}=+\infty$, να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.**

Λύση:

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)-3}{f(x)+x-3}$ **(1)**, για κάθε x∈**R**. Τότε $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$.

Λύνοντας την (1) ως προς f(x), όπου f(0)≠3, άρα g(x)≠1, έχουμε τη σχέση:

$f(x)=\dfrac{(x-3)g(x)+3}{1-g(x)}=\dfrac{x-3+\dfrac{3}{g(x)}}{\dfrac{1}{g(x)}-1}$, για x≠0, επομένως $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{-3+0}{0-1}=3$.

10 **Να βρεθεί το λ∈R έτσι ώστε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\lambda}{x^2+x-2}$ να είναι πραγματικός αριθμός.**

Λύση:

<u>1ος Τρόπος:</u>

Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}-\lambda\right)=2-\lambda$, ενώ $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x-2)=0$, επομένως αναγκαία συνθήκη για να είναι το όριο πραγματικός αριθμός είναι η 2-λ=0 ⇔ λ=2. Πράγματι διαφορετικά το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\lambda}{x^2+x-2}$ θα είναι +∞ ή -∞, ανάλογα αν το 2-λ είναι θετικός ή αρνητικός.

Για λ=2 έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x^2+x-2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x+2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\dfrac{1}{12}$.

<u>2ος Τρόπος:</u> Έστω $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-\lambda}{x^2+x-2}$ τότε $g(x)(x^2+x-2)=\sqrt{x+3}-\lambda$ **(1)**. Με την προϋπόθεση ότι $\lim\limits_{x\to 1} g(x)\in$**R**, παίρνοντας τα όρια και των δύο μελών της (1), συμπεραίνουμε ότι 0=2-λ κλπ. Προσοχή χρειάζεται και επαλήθευση γιατί η συνθήκη λ=2 είναι μόνο αναγκαία.

11 **Να βρεθεί (αν υπάρχει) $\lambda\in\mathbf{R}$ έτσι ώστε το $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\lambda x^2-3x+2}{(x+1)^4}$ να είναι πραγματικός αριθμός.**

Λύση:

Έστω ότι υπάρχει $\lambda\in\mathbf{R}$, τέτοιο ώστε $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\lambda x^2-3x+2}{(x+1)^4}=k\in\mathbf{R}$. Τότε αν $\dfrac{\lambda x^2-3x+2}{(x+1)^4}=g(x)$ για κάθε $x\neq -1$ θα ισχύει $(x+1)^4g(x)=\lambda x^2-3x+2$, επομένως παίρνοντας τα όρια και των δύο μελών συμπεραίνουμε ότι $0\cdot k=\lambda+5 \Leftrightarrow \lambda=-5$.

Η συνθήκη όμως αυτή είναι αναγκαία, γιατί υποθέσαμε ότι το $\lim\limits_{x\to -1}g(x)=k\in\mathbf{R}$, ως εκ τούτου δεν είναι και ικανή. Γι' αυτό πρέπει να κάνουμε επαλήθευση.

Όμως $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-5x^2-3x+2}{(x+1)^4}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-5(x+1)\left(x-\frac{2}{5}\right)}{(x+1)^4}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-5\left(x-\frac{2}{5}\right)}{(x+1)^3}$.

Αλλά $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{-5\left(x-\frac{2}{5}\right)}{(x+1)^3}=7\cdot(+\infty)=+\infty$. Επομένως δεν υπάρχει $\lambda\in\mathbf{R}$, τέτοιο ώστε $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\lambda x^2-3x+2}{(x+1)^4}\in\mathbf{R}$.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να βρεθούν αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-3}{(x+1)^4}$ **β)** $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2-2x+1}{|x|-1}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+2}{|x|x}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$

ε) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+x}{x-2}$ **ς)** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+x}{x-2}$ **ζ)** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-x-2}{(x-2)^2}$ **η)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

θ) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{|x-1|}\right]$ **ι)** $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right]$.

2 Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-\eta\mu^2 x}{x^2\eta\mu^2 x}$.

3 Να βρεθεί το όριο της συναρτήσεως $f(x)=\dfrac{x^3-\alpha x^2+(\alpha+3)x-12}{x^2-4}$ στο $x_0=2$ όταν $\alpha\in$ **R**.

4 Να βρεθεί το λ έτσι ώστε το $\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{\sqrt{x}-\lambda}{x^3-\lambda^3}$ να είναι πραγματικός αριθμός.

5 Αν $f(x)=\dfrac{\alpha x^2-x+\beta}{(x-1)^2}$, να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in$**R** έτσι ώστε να υπάρχει στο **R** το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

6 Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το **R**. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)(x-1)}{\sqrt{x}-1}=+\infty$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

7 Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το **R**. Αν $\lim\limits_{x\to -1}\left[(x+1)^6 f(x)\right]=7$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$.

8 Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases}-(\mu+2)x+(\lambda+1)y=\dfrac{1}{2}\\ -x+\mu y=\sqrt{3}\end{cases}$ και οι κάθετες ευθείες $2\mu y+1-x=0$ και $\lambda x+y-2=0$. Αν το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to\lambda^-}\dfrac{\sqrt{(2\mu-x)^2}+x^2+2\lambda}{x^2-\lambda x}$ όπου $\lambda,\mu\in(0,+\infty)$.

9 Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το **R**, τέτοιες ώστε $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)\left(x^2+2\right)\right]=-\infty$. Να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to 2}\left[f(x)g(x)\right]$.

10 Αν για την συνάρτηση f ορισμένη στο **R** ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί κ και λ τέτοιοι ώστε: $\lim\limits_{x\to x_0}[\sqrt{f^2(x)+8f(x)-9}-\kappa f(x)-\lambda]=0$.

11 Να βρεθεί το $\lambda\in\mathbf{R}$ έτσι ώστε το $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+4x+\lambda}{x+2}$ να είναι πραγματικός αριθμός.

12 Να βρεθεί (αν υπάρχει) $\lambda\in\mathbf{R}$ έτσι ώστε το $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\lambda x^2+3x+3-\lambda^2}{(x+1)^2}$ να είναι πραγματικός αριθμός.

13 Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το **R** και $f(x)+1\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$. Αν επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{f(x)+1}=+\infty$, να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

14 Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το **R** και $2f(-x)-5f(x)=-3x^2-7x$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$. Να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+2}{f(x)-x}$.

15 Δίνεται η άρτια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το **R**. Αν $\lim\limits_{x\to 0^-}[(x^2+1)f(x)]=-\infty$, να υπολογισθεί (αν υπάρχει), το $\lim\limits_{x\to 0}[(x^2+1)f(x)]$.

16 Τι συμβαίνει με το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbf{R}$, όπου $f(x)=\frac{3x^2-2\lambda x-\lambda^2}{|x-1|}$;

17 Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\sqrt{f^2(x)+x^2}+f^2(x)\right]$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

$\boxed{1}$ **α)** $-\infty$, **β)** $+\infty$, **γ)** $+\infty$, **δ)** Δεν υπάρχει αφού $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}=+\infty$, ενώ $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}=-\infty$, **ε)** $-\infty$, **ς)** $+\infty$, **ζ)** $+\infty$, **η)** $+\infty$, **θ)** $f(x)=\begin{cases}0 & x>1\\ \dfrac{2}{x-1} & x<1\end{cases}$, δεν υπάρχει, **ι)** $\dfrac{1}{4}$. $\boxed{2}$ Ισχύει $\dfrac{2x^2-\eta\mu^2 x}{x^2\eta\mu^2 x}=\dfrac{2-\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2}{\eta\mu^2 x}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}=+\infty$, τελικά το όριο είναι $+\infty$. $\boxed{3}$ Αν $\alpha=1$ τότε $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=3$, αν $\alpha\neq 1$ τα πλευρικά όρια δεν ταυτίζονται. $\boxed{4}$ Θέτω $\dfrac{\sqrt{x}-\lambda}{x^3-\lambda^3}=g(x)$. Θέλω $\lim\limits_{x\to\lambda}g(x)=k\in\mathbf{R}$. Η αναγκαία συνθήκη είναι $\lambda=0$ ή $\lambda=1$. Δεκτή μόνο η $\lambda=1$ (κατόπιν επαληθεύσεως). $\boxed{5}$ Ισχύει $f(x)(x-1)^2=\alpha x^2-x+\beta$, $x\neq 1$. Έστω $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=k\in\mathbf{R}$.. Τότε πρέπει $k\cdot 0=\alpha-1+\beta$. Θέτω στην $f(x)$ στη θέση του β το $1-\alpha$, απλοποιώ και επαναλαμβάνω το προηγούμενο βήμα. Οι τιμές $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$ είναι αναγκαίες και θέλουν επαλήθευση. $\boxed{6}$ Θέτουμε $\dfrac{f(x)(x-1)}{\sqrt{x}-1}=g(x)$, τότε $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=+\infty$, ενώ $f(x)=\dfrac{g(x)(\sqrt{x}-1)}{x-1}=\dfrac{g(x)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$ κλπ, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$. $\boxed{7}$ Θέτουμε $(x+1)^6 f(x)=g(x)$ κλπ, $+\infty$. $\boxed{8}$ Ισχύει $\begin{vmatrix}-\mu-2 & \lambda+1\\ -1 & \mu\end{vmatrix}=0$ και $\dfrac{-\lambda}{2\mu}=-1$, τελικά $\mu=1$ και $\lambda=2$, $-\infty$ $\boxed{9}$ Θέτουμε $\alpha(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x\neq 0$ και $\beta(x)=g(x)\left(x^2+2\right)$. Τότε $f(x)g(x)=\dfrac{x}{x^2+2}\alpha(x)\beta(x)$ κλπ $\lim\limits_{x\to 2}\left[f(x)g(x)\right]=-\infty$. $\boxed{10}$ Βλέπε από τις λυμένες ασκήσεις την 5), $\kappa=1$ και $\lambda=4$. $\boxed{11}$ Βλέπε από τις λυμένες ασκήσεις τη 10), $\lambda=4$. $\boxed{12}$ (Βλέπε από τις λυμένες την 10). Αναγκαία συνθήκη είναι $\lambda=0$ ή $\lambda=1$. Καμία όμως και από τις δύο τιμές δεν είναι και ικανή. Έτσι για $\lambda=0$, έχουμε το $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3(x+1)}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3}{x+1}$, το οποίο δεν υπάρχει αφού $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{3}{x+1}=-\infty$, ενώ $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{3}{x+1}=+\infty$.

Ομοίως και για το $\lambda=1$. **13** Βλέπε από τις λυμένες την 9, ισχύει $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-1$.

14 Θέτουμε στη σχέση $2f(-x)-5f(x)=-3x^2-7x$, η οποία ισχύει για κάθε $x\in\mathbf{R}$, στη θέση του x το –x. Τότε $2f(x)-5f(-x)=-3x^2+7x$. Από τις δύο τελευταίες απαλοίφουμε το f(-x) και βρίσκουμε $f(x)=x^2+x$. Τότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+2}{f(x)-x}=+\infty$.

15 Θέτουμε όπου x=-t. Τότε $-\infty=\lim\limits_{x\to 0^-}[(x^2+1)f(x)]=\lim\limits_{t\to 0^+}[(t^2+1)f(-t)]=\lim\limits_{t\to 0^+}[(t^2+1)f(t)]$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}[(x^2+1)f(x)]=-\infty$. **16** Ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2\lambda x-\lambda^2)=-\lambda^2-2\lambda+3=-(\lambda+3)(\lambda-1)$.

Επίσης λόγω του προσήμου του τριωνύμου θα ισχύει: α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$, όταν $\lambda\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$, β) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$,

λ	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$-\lambda^2-2\lambda+3$		-	ϕ	+	ϕ	-	

όταν $\lambda\in(-3,1)$. Αν $\lambda=-3$ ή $\lambda=1$ τότε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει, αφού $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{|x-1|}=-1$, ενώ

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{|x-1|}=1$. **17** Ισχύει $f(x)\sqrt{f^2(x)+x^2}+f^2(x)=f(x)\left(\sqrt{f^2(x)+x^2}+f(x)\right)=f(x)\cdot$

$$\frac{f^2(x)+x^2-f^2(x)}{\sqrt{f^2(x)+x^2}-f(x)}=\frac{f(x)\cdot x^2}{\sqrt{f^2(x)+x^2}-f(x)}=\frac{f(x)\cdot x^2}{|f(x)|\sqrt{1+\dfrac{x^2}{f^2(x)}}-f(x)}=\frac{x^2}{-\sqrt{1+\dfrac{x^2}{f^2(x)}}+1},$$ αφού

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, άρα σε μια περιοχή του x_0, ισχύει $f(x)<0$. Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\dfrac{x_0^2}{2}$.

§ 4.4 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

- Έστω μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού που περιέχει ένα διάστημα της μορφής (α,+∞). Όταν το x αυξάνεται απεριόριστα και:

  α) οι τιμές της συναρτήσεως αυξάνονται απεριόριστα τότε γράφουμε

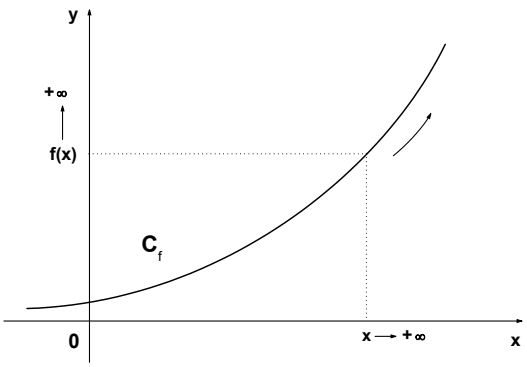
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

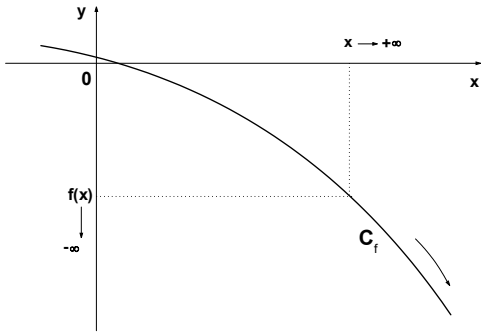
  β) οι τιμές της συναρτήσεως μειώνονται απεριόριστα τότε γράφουμε

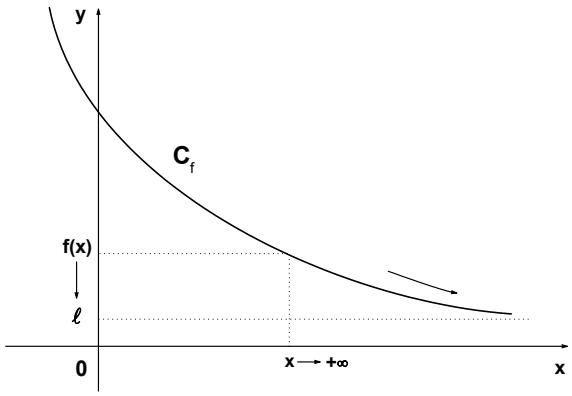
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

  γ) Όταν οι τιμές τις συναρτήσεως f πλησιάζουν όσο θέλουμε ένα πραγματικό αριθμό ℓ, τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$







- Αντίστοιχα ισχύουν όταν x→-∞. Η συνάρτηση τότε θα πρέπει να έχει πεδίο ορισμού που να περιέχει ένα διάστημα της μορφής (-∞,α).

Προσοχή

Για τα όρια συναρτήσεως στο $+\infty$ η $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0.

Παρατήρηση:

- Χρήσιμα για τις ασκήσεις είναι και τα παρακάτω όρια:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\nu}=+\infty$, όπου $\nu\in\mathbf{N}^*$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^{\nu}}=0,\ \nu\in\mathbf{N}^*$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\nu}=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος}\\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός}\end{cases}$

Όρια βασικών συναρτήσεων

- Αν $P(x)=\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_0$, με $\alpha_{\nu}\neq0$ τότε $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\alpha_{\nu}x)^{\nu}$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0}{\beta_{\mu}x^{\mu}+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+\ldots+\beta_1x+\beta_0}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\alpha_{\nu}x^{\nu}}{\beta_{\mu}x^{\mu}}$, με $\alpha_{\nu}\neq0$, $\beta_{\mu}\neq0$.
- Αν $\alpha>1$ τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$
$\lim\limits_{x\to0}\log_{\alpha}x=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{\alpha}x=+\infty$

- Αν $0<\alpha<1$ τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$
$\lim\limits_{x\to0}\log_{\alpha}x=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{\alpha}x=-\infty$

Λυμένες Ασκήσεις

1 Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-x^2-x-1)$ **β)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^5+1}{x^2+1}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-5x+6}$ **.**

Λύση:

α) Ισχύει $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-x^2-x-1)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-x^2)=-\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^5+1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^5}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^3=\pm\infty$.

γ) Πρέπει $x^2-5x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$, επομένως έχει νόημα το όριο όταν $x\to\pm\infty$.

Όμως $\sqrt{x^2-5x+6}=\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}}$, επομένως $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-5x+6}=$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(|x|\sqrt{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}}\right)=+\infty\cdot 1=+\infty$.

2 Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x}{x+1}$

Λύση:

α) Το πεδίο ορισμού της $\sqrt{x^2+1}+x$ είναι το **R**. Ισχύει $A=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+x\right)$.

Όμως επειδή $x\to+\infty$, περιοριζόμαστε στα $x>0$, οπότε:

$A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)=+\infty\cdot$

$\left(\sqrt{1}+1\right)=+\infty\cdot 2=+\infty$.

β) Όπως προηγουμένως καταλήγουμε ότι:

$A=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1\right)=+\infty\cdot 0$, η οποία είναι απροσδιόριστη μορφή. Για να αρθεί η προηγούμενη απροσδιοριστία, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha-\beta=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta}$, με $\alpha=\sqrt{x^2+1}$ και $\beta=x$. Τότε ισχύει:

$$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$ για x>0.

Επομένως $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=0\cdot\frac{1}{2}=0.$

γ) Το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $\frac{\sqrt{x^2+3}-x}{x+1}$ είναι το **R**-{-1}.

Ισχύει $\frac{\sqrt{x^2+3}-x}{x+1}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

Αν x→+∞, περιοριζόμαστε στα x>0, οπότε: $\frac{\sqrt{x^2+3}-x}{x+1}=\frac{x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-1}{1+\frac{1}{x}}$ και

επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}-x}{x+1}=0.$

Αν x→-∞, περιοριζόμαστε στα x<0, οπότε: $\frac{\sqrt{x^2+3}-x}{x+1}=\frac{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=-\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1}{1+\frac{1}{x}}$ και

επομένως $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}-x}{x+1}=-2.$

3 Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-4x+3}-x)$.

Λύση:

Ισχύει $x^2-4x+3\geq0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$, επομένως το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως είναι το $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$.

Ισχύει $\sqrt{x^2-4x+3}-x=|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}-x$.

Αν x→-∞, περιοριζόμαστε στα x<0, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)\right)=+\infty\cdot2=+\infty.$

Αν $x\to+\infty$, περιοριζόμαστε στα $x>3$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}-1\right)\right)=+\infty\cdot 0$ η οποία είναι απροσδιόριστη μορφή. Για να αρθεί η προηγούμενη απροσδιοριστία, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\alpha-\beta=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta}$, με $\alpha=\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}$ και $\beta=1$. Τότε ισχύει:

$$\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}-1=\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}-1}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1},\ \text{οπότε}\ x\cdot\frac{-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{-4+\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}.$$

Όμως το τελευταίο κλάσμα έχει όριο το -2 όταν $x\to+\infty$.

4 Αν $f(x)=\frac{x^2}{1+x}-\alpha x-\beta$ να βρεθούν τα α,β έτσι ώστε $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$.

Λύση:

Ισχύει $f(x)=\frac{(1-\alpha)x^2-(\alpha+\beta)x-\beta}{1+x}$, επομένως αν $1-\alpha\neq 0$, τότε

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(1-\alpha)x^2-(\alpha+\beta)x-\beta}{1+x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(1-\alpha)x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[(1-\alpha)x\right].$$

Το τελευταίο όμως όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ ανάλογα με το πρόσημο του $1-\alpha$ και του πού τείνει το x.

Επομένως για να είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ θα πρέπει $1-\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=1$.

Τότε $f(x)=\frac{-(1+\beta)x-\beta}{1+x}$. Αν $\beta+1\neq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=-(1+\beta)\neq 0$, επομένως πρέπει $-(1+\beta)=0$, δηλαδή $\beta=-1$. Τότε $f(x)=\frac{1}{1+x}$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$. Άρα τελικά $\alpha=1$, $\beta=-1$.

5 Να υπολογιστούν τα α, β, $\gamma\in R$ έτσι ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^4-2x^2+7x+1}-\alpha x^2-\beta x-\gamma)=0$

Λύση:

Το υπόριζο όταν το $x\to+\infty$ έχει όριο το $+\infty$, επομένως τελικά παίρνει θετικές τιμές. Επομένως το όριο έχει νόημα.

Ισχύει $\sqrt{x^4-2x^2+7x+1}-\alpha x^2-\beta x-\gamma=x^2\left[\sqrt{1-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}+\frac{1}{x^4}}-\alpha-\frac{\beta}{x}-\frac{\gamma}{x^2}\right]$, η τελευταία συνάρτηση έχει όριο το $+\infty\cdot(1-\alpha)$, το οποίο για $\alpha\neq1$ δεν ισούται με το μηδέν. Επομένως μια αναγκαία συνθήκη είναι η $\alpha=1$.

Τότε $\sqrt{x^4-2x^2+7x+1}-x^2-\beta x-\gamma=\dfrac{x^4-2x^2+7x+1-\left(x^2+\beta x+\gamma\right)^2}{\sqrt{x^4-2x^2+7x+1}+x^2+\beta x+\gamma}=$

$\dfrac{-2\beta x^3-(\beta^2+2+2\gamma)x^2+(7-2\beta\gamma)x+1-\gamma^2}{x^2\left(\sqrt{1-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}+\frac{1}{x^4}}+1+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}\right)}=x\dfrac{-2\beta-\frac{\beta^2+2+2\gamma}{x}+\frac{7-2\beta\gamma}{x^2}+\frac{1-\gamma^2}{x^3}}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}+\frac{1}{x^4}}+1+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}}$ το οποίο όταν το $x\to+\infty$ έχει όριο το $+\infty(-\beta)$, άρα αναγκαία συνθήκη για να είναι το αρχικό όριο μηδέν είναι η $\beta=0$.

Τελικά

$\sqrt{x^4-2x^2+7x+1}-x^2-\gamma=\dfrac{-(2+2\gamma)x^2+7x+1-\gamma^2}{x^2\left(\sqrt{1-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}+\frac{1}{x^4}}+1+\frac{\gamma}{x^2}\right)}=\dfrac{-(2+2\gamma)+\frac{7}{x}+\frac{1-\gamma^2}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}+\frac{1}{x^4}}+1+\frac{\gamma}{x^2}}$ το οποίο όταν το $x\to+\infty$ έχει όριο το $-1-\gamma$, το οποίο το θέλω μηδέν άρα πρέπει $\gamma=-1$.

Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^4-2x^2+7x+1}-x^2+1)=0$.

Πράγματι $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^4-2x^2+7x+1}-x^2+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{7}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}+\frac{1}{x^4}}+1-\frac{1}{x^2}}=0.$

Άρα $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=-1$.

Προσοχή

Η επαλήθευση ήταν απαραίτητη αφού οι συνθήκες $\alpha=1$ και $\beta=0$ ήταν καταρχήν αναγκαίες (χωρίς να γνωρίζουμε ότι ήταν και ικανές) για να είναι το όριο μηδέν.

6 Αν $\mu\in R$ να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{\mu x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1})$.

Λύση:

Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mu x^2+2x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\mu x^2)=-\infty$ όταν $\mu<0$. Επομένως για να έχει νόημα το ζητούμενο όριο πρέπει $\mu\geq 0$, αφού τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mu x^2+2x+1)=+\infty$.

Όμως $\sqrt{\mu x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1}=|x|\left(\sqrt{\mu+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$.

Επομένως $A=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{\mu x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[|x|\left(\sqrt{\mu+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right]$.

Άρα για $\mu>1$ ισχύει $A=+\infty\cdot\left(\sqrt{\mu}-1\right)=+\infty$, για $0\leq\mu<1$ $A=+\infty\cdot\left(\sqrt{\mu}-1\right)=-\infty$, ενώ για $\mu=1$ έχουμε την απροσδιόριστη μορφή $+\infty\cdot 0$.

Για να αρθεί η προηγούμενη απροσδιοριστία, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$\alpha-\beta=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta}$, με $\alpha=\sqrt{x^2+2x+1}$ και $\beta=\sqrt{x^2+1}$. Τότε ισχύει:

$$\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}\ \text{για } x>0.$$

Άρα $A=2$.

7 Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ να υπολογισθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\mu-2)x^3+\mu x^2+1}{(\mu-1)x^2+1}$.

Λύση:

Η συνάρτηση $f(x)=\frac{(\mu-2)x^3+\mu x^2+1}{(\mu-1)x^2+1}$ ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(-\infty,\alpha)$, όπου α κατάλληλος αριθμός ώστε να μην μηδενίζεται ο παρονομαστής.

- Έστω $(\mu-2)(\mu-1)\neq 0 \Leftrightarrow \mu\neq 1,2$. Τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\mu-2)x^3+\mu x^2+1}{(\mu-1)x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\mu-2)x^3}{(\mu-1)x^2}=$

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\mu-2)}{(\mu-1)}x$.

Όμως όταν $\frac{\mu-2}{\mu-1}>0 \Leftrightarrow (\mu-1)(\mu-2)>0 \Leftrightarrow \mu\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\mu-2)}{(\mu-1)}x=-\infty$.

Όταν όμως $\frac{\mu-2}{\mu-1}<0$ δηλαδή όταν $\mu\in(1,2)$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(\mu-2)}{(\mu-1)}x=+\infty$.

- Αν $\mu=1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3-x^2+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)=-(-\infty)=+\infty$.
- Αν $\mu=2$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$. Άρα

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\begin{cases}-\infty, & \text{αν } \mu\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)\\ +\infty, & \text{αν } \mu\in[1,2)\\ 2, & \text{αν } \mu=2\end{cases}.$$

8 Αν για τη συνάρτηση f ορισμένη στο R ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=1$, να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)\right]$.

Λύση:

α) Θέτουμε $f(x)+2x=g(x)$, προφανώς $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$. Όμως $f(x)=g(x)-2x$, επομένως $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)-2x\right)=1-(-\infty)=1+(+\infty)=+\infty$.

β) Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)=0$, το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)\right]$ έχει την απροσδιόριστη μορφή $+\infty\cdot0$.

Για να αρθεί η προηγούμενη απροσδιοριστία, θέτουμε στη θέση της f(x) την ίση της g(x)-2x (βλ. ερ. **α)**). Τότε:

$$f(x)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)=\left(g(x)-2x\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)=g(x)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)-2x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right).$$

Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)\right]=1\cdot0=0$.

Επίσης ισχύει:

$$2x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)=2x\cdot\frac{\cancel{1}+\frac{1}{x}-\cancel{1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}, \text{ επομένως } \lim_{x\to-\infty}\left[2x\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\right]=1.$$

Άρα τελικά $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)\right]=0-1=-1.$

9 Αν για την συνάρτηση f ισχύει $x^2-x+2\le xf(x)\le x^2-x+3$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\eta\mu x\right)$**.**

Λύση:

α) Επειδή $x^2-x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ ($\Delta=-7<0$, $\alpha=1>0$), συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Επομένως $0<\frac{x^2-x+2}{x}<f(x)<\frac{x^2-x+3}{x}$ ή $\frac{x}{x^2-x+2}>\frac{1}{f(x)}>\frac{x}{x^2-x+3}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-x+3}=0$, επομένως και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$.

Αλλά όμως αν $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ ισχύει $g(x)>0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{g(x)}=+\infty$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

β) Απο την ανισωτική σχέση της υποθέσεως διαιρώντας με x^2, παίρνουμε τη σχέση:

$\frac{x^2-x+2}{x^2}<\frac{f(x)}{x}<\frac{x^2-x+3}{x^2}$ και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+3}{x^2}=1$, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.

γ) Ισχύει $\frac{x^2-x+2}{x}<f(x)<\frac{x^2-x+3}{x}$ (1) και $-1\le\eta\mu x\le1 \Leftrightarrow -1\le-\eta\mu x\le1$ (2).

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη. Τότε

$0<\frac{x^2-2x+2}{x}<f(x)-\eta\mu x<\frac{x^2+3}{x}$, επομένως $\frac{x}{x^2-2x+2}>\frac{1}{f(x)-\eta\mu x}>\frac{x}{x^2+3}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-2x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+3}=0$, άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)-\eta\mu x}=0$.

Επειδή δε $0<f(x)-\eta\mu x$ συμπεραίνουμε όπως και στο ερώτημα β), πως $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\eta\mu x)=+\infty$.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Άλυτες Ασκήσεις

1 Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-x^5+x^4+1)$ **β)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(3x^7-x+1)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^8-1)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-3x^4-2x+1)$

2 Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x+5}{x^2+1}$ **β)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{7x^2+5x+1}{x^2+x+1}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^4+1}{-x^2+x+1}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^4+1}{x^3+x+1}$

3 Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}$.

4 Βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2-7x+12})$ **β)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x\sqrt{x^2+2x+2}-x)$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x\sqrt{x^2+1}+x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x(x+\alpha)}-x)$ όπου $\alpha>0$

5 Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x+2}{x+3}$ **β)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}}{x+3}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

6 Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[4]{x^4+1}-x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})$ **γ)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{x^2+1}-x)$

7 Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{x^2+1}$ **β)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

8 Αν $g(x)=\alpha x+\beta-\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$ να βρεθούν τα α,β έτσι ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=2$.

9 Να υπολογιστούν τα $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ ώστε:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x+5}-\alpha x-\beta)=0$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-\alpha x+\beta\right)=\dfrac{1}{4}$.

10 Αν $\alpha>0$ να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\alpha x}+1}$.

11 Αν κ είναι η ρίζα της εξισώσεως $x^7+x^5+x=0$ και $\lambda=\lim\limits_{x\to\kappa}\dfrac{\sqrt{x^3+4}-2}{\sqrt{x^3+1}-1}$, να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\mu\in\mathbf{R}$ το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2\lambda-\mu+1)x^3-(4\lambda+\mu-1)x^2+x-5}{(1-\kappa\lambda+\mu^2)x+1}$.

12 Αν $\mu\in\mathbf{R}$ να υπολογισθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+2\mu x)$.

13 Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln^4x+3\ln x-1}{3\ln^4x-3\ln x+1}$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x-3^x+1}{4^x+2^x}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x+\eta\mu x\right)-\ln x\right]$.

14 Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2f(x)-x\right)=1$ να υπολογισθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2f(x)+2x\right)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{f(x)}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3f(x)+5}{2x^4+x^2}$.

15 Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο **R**, τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^2}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-\lambda x^2+5}{2x^2+3}=0$. Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού λ.

16 Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ να υπολογισθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mu-2)x^3+\mu x^2+1}{(\mu-1)x^2+1}$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu x^2+x+2}{(\mu-1)x^2+1}$

17 Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|2x^3-x^2+1\right|+3}{\left|-x^3-x^2+1\right|}$ **β)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left|-x+1\right|+1}{\left|x+3\right|}$

18 Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\dfrac{1}{x}}{\sqrt{x^2+x+1}-1}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x+\eta\mu x}$

19 Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha^x+2^{x+1}}{\alpha^{x+1}+2^x}$ όπου $\alpha>0$.

Απαντήσεις - Υποδείξεις

$\boxed{1}$ **α)** $\mp\infty$, **β)** $\pm\infty$, **γ)** $+\infty$, **δ)** $-\infty$. $\boxed{2}$ **α)** 0, **β)** 7, **γ)** $-\infty$, **δ)** $\pm\infty$. $\boxed{3}$ Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=0$, κλπ, $+\infty$. $\boxed{4}$ **α)** Ισχύει $\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2-7x+12}=$

$$\frac{4x-10}{\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-7x+12}}=\frac{x\left(4-\frac{10}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{12}{x^2}}\right)}$$

κλπ. Το ζητούμενο όριο είναι 2 όταν $x\to+\infty$, ενω ισούται με -2 όταν $x\to-\infty$. **β)** Ισχύει $x\sqrt{x^2+2x+2}-x=$ $x\left(\sqrt{x^2+2x+2}-1\right)=x\left(|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right)$. Άρα το ζητούμενο όριο είναι $+\infty$ όταν $x\to+\infty$, ενω ισούται με $-\infty$ όταν $x\to-\infty$. **γ)** Ισχύει $x\sqrt{x^2+1}+x=x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)=$ $x\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)$. Επομένως το όριο ισούται με $-\infty\cdot(+\infty)=-\infty$. **δ)** Ισχύει $\sqrt{x(x+\alpha)}-x=$ $\sqrt{x^2+\alpha x}-x=|x|\sqrt{1+\frac{\alpha}{x}}-x$. Αν $x\to-\infty$ τότε το όριο ισούται με $+\infty$. Αν $x\to+\infty$, τότε $\sqrt{x^2+\alpha x}-x=\frac{\alpha x}{\sqrt{x^2+\alpha x}+x}$ και το όριό του ισούται με $\frac{\alpha}{2}$. $\boxed{5}$ **α)** Ισχύει $\frac{\sqrt{x^2+1}-x+2}{x+3}=$

$$\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x+2}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}$$

κλπ, 0 όταν $x\to+\infty$, -2 όταν $x\to-\infty$ **β)** Ισχύει $\frac{\sqrt{4x^2-2x+1}}{x+3}=$

$$\frac{|x|\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}$$

κλπ, 2 όταν $x\to+\infty$, -2 όταν $x\to-\infty$ **γ)** Ισχύει $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x\left(1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}}$$

, το όριο είναι 1. $\boxed{6}$ **α)** Είναι $\sqrt[4]{x^4+1}-x=$

$|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+1\right)$, επομένως το όριο είναι το $+\infty\cdot 2=+\infty$, **β)** Με τη βοήθεια της ταυτότητας $\alpha-\beta=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$ συμπεραίνουμε ότι:

$$\sqrt[3]{x^2}\,(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})=\sqrt[3]{x^2}\cdot\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2+x}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=$$

$\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1}$, επομένως το όριο είναι το $\frac{1}{3}$, **γ)** Για $x>0$ ισχύει $\sqrt[3]{x^2+1}-x=$

$\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}-x=x\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-1\right)$ που έχει όριο το $+\infty\cdot(-1)=-\infty$. Για $x<0$ ισχύει

$$\sqrt[3]{x^2+1}-x=\sqrt[3]{(-x)^3\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}-x=\sqrt[3]{(-x)^3}\,\sqrt[3]{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}-x=-x\sqrt[3]{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}-x=-x\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}+1\right)$$

που έχει όριο το $+\infty\cdot 1=+\infty$. $\boxed{7}$ **α)** Ισχύει $-1\le ημx\le 1$, $-1\le συνx\le 1$, επομένως $-2\le ημx+συνx\le 2$ άρα $\frac{-2}{x^2+1}\le\frac{ημx+συνx}{x^2+1}\le\frac{2}{x^2+1}$ κλπ, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ημx+συνx}{x^2+1}=0$. **β)** Ισχύει $\frac{x-1}{x+1}>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, επομένως για $x<-1$ ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$, ενώ για $x>1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$. $\boxed{8}$ Βλέπε από τις λυμένες την 4), $\alpha=1$, $\beta=2$. $\boxed{9}$ Βλέπε από τις λυμένες την 5), **α)** $\alpha=1$, $\beta=-1$, **β)** $\alpha=2,\beta=1$. $\boxed{10}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\alpha x}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=0$.

$\boxed{11}$ $x^7+x^5+x=0\Leftrightarrow x(x^6+x^4+1)=0\Leftrightarrow x=0$, άρα $\kappa=0$ και $\lambda=\frac{1}{2}$. Αν $\mu>2$, $-\infty$, αν $\mu<2$, $+\infty$, αν $\mu=2$, $+\infty$. $\boxed{12}$ Αν $\mu>-\frac{1}{2}$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, αν $\mu<-\frac{1}{2}$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, ενώ όταν $\mu=-\frac{1}{2}$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$. $\boxed{13}$ **α)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln^4x+3\ln x-1}{3\ln^4x-3\ln x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{\ln^3x}-\frac{1}{\ln^4x}}{3-\frac{3}{\ln^3x}+\frac{1}{\ln^4x}}=\frac{2}{3}$,

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x-3^x+1}{4^x+2^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x-1+\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)}{4^x\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^x\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1+\left(\frac{1}{3}\right)^x}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^x}\right]=0,$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x+\eta\mu x\right)-\ln x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\dfrac{x+\eta\mu x}{x}\right)\right]=0,$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0.$ **14** Θέτουμε $g(x)=2f(x)-x$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$ και $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}g(x)$, **α)** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}g(x)\right)$ $=+\infty$, **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2f(x)+2x\right)=+\infty$, **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{1+\frac{g(x)}{x}}=2$, **δ)** Διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με $\left(f(x)\right)^4$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3f(x)+5}{2x^4+x^2}=\dfrac{1}{4}$. **15** Θέτουμε $\dfrac{f(x)-x^2}{2x+1}=g(x)$, $x\neq-\frac{1}{2}$ και $\dfrac{f(x)-\lambda x^2+5}{2x^2+3}=h(x)$, $x\in\mathbf{R}$. Τότε $f(x)=g(x)(2x+1)+x^2=h(x)(2x^2+3)+\lambda x^2-5$ ή $g(x)\cdot\dfrac{2x+1}{2x^2+3}+\dfrac{x^2}{2x^2+3}=h(x)+\dfrac{\lambda x^2-5}{2x^2+3}$. Παίρνουμε τα όρια και των δύο μελών και τελικά $\lambda=1$. **16** **α)** Αν $\mu\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, αν $\mu\in[1,2)$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, αν $\mu=2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$, **β)** αν $\mu\neq0,1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{\mu}{\mu-1}$, αν $\mu=0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, αν $\mu=1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. **17** **α)** Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3-x^2+1\right)=+\infty$, υπάρχει $\alpha\in\mathbf{R}$, τέτοιο ώστε $2x^3-x^2+1>0$ για κάθε $x\in(\alpha,+\infty)$, ομοίως επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3-x^2+1\right)=-\infty$ υπάρχει $\beta\in\mathbf{R}$, τέτοιο ώστε $-x^3-x^2+1<0$ για κάθε $x\in(\beta,+\infty)$. Επομένως για x μεγαλύτερο του α και του β, ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|2x^3-x^2+1\right|+3}{\left|-x^3-x^2+1\right|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-x^2+4}{x^3+x^2-1}=2$, **β)** Ομοίως $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left|-x+1\right|+1}{\left|x+3\right|}=$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+2}{-x-3}=1$. **18** **α)** Ισχύει $-\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{\eta\mu x}{x}\leq\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x>0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$, **β)** Ομοίως, όπως προηγουμένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=0$, **γ)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+x+1}-1}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\eta\mu\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)=0,$$ **δ)** $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x+\eta\mu x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{1}-x^2-\cancel{1}}{(x+\eta\mu x)\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(1+\frac{\eta\mu\, x}{x}\right)\left(\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)}=-1$$ **19** Όταν α=1, τότε $A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha^x+2^{x+1}}{\alpha^{x+1}+2^x}=2$, αν α=2 τότε

A=1. Όταν α<2 $\Leftrightarrow\frac{\alpha}{2}<1$, τότε $A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^x+2}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^x\alpha+1}=2$, όταν α>2 $\Leftrightarrow$ $1>\frac{2}{\alpha}$, τότε A=

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2\left(\frac{2}{\alpha}\right)^x}{\alpha+\left(\frac{2}{\alpha}\right)^x}=\frac{1}{\alpha}$$

Ο Ρ Ι Ο Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Ε Ω Σ

Ερωτήσεις κατανοήσεως

- *Ερωτήσεις Σωστού Λάθους*

1 Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ell$ τότε $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = \ell + \lim\limits_{x\to 0} g(x)$. **Σ** **Λ**

2 Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \in \mathbf{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)$. **Σ** **Λ**

3 Αν f(x)=g(x) τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. **Σ** **Λ**

4 Αν $\lim\limits_{x\to 1} f(x) < \lim\limits_{x\to 1} g(x)$ τότε f(x)<g(x) κοντά στο 1. **Σ** **Λ**

5 Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο 0 και f(x)>g(x) κοντά στο 0, τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) > \lim\limits_{x\to 0} g(x)$. **Σ** **Λ**

6 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\eta\mu x} = 1$. **Σ** **Λ**

7 Το $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ δεν υπάρχει. **Σ** **Λ**

8 Το $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x^2-4} \in \mathbf{R}$. **Σ** **Λ**

9 $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$. **Σ** **Λ**

10 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sigma\upsilon\nu x - 1} = 1$. **Σ** **Λ**

11 $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\eta\mu x}{x} = \dfrac{2}{\pi}$. **Σ** **Λ**

12 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$. **Σ** **Λ**

13 Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο **R** τότε $\lim\limits_{x\to \pi} (\eta\mu x + f(x)) = f(\pi)$. **Σ** **Λ**

14 Αν f(x)≥0 για κάθε x∈**R** τότε $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{f(0)}$. **Σ** **Λ**

15 Αν $\left|\lim_{x\to 2} f(x)\right|=1$ τότε $\lim_{x\to 2} f(x)=1$ ή $\lim_{x\to 2} f(x)=-1$. **Σ** **Λ**

16 Αν για τις συναρτήσεις f,g,h ισχύει $f(x)\le g(x)\le h(x)$ για κάθε $x\ge 4$

και $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} h(x)=\lambda$ τότε $\lim_{x\to 3} g(x)=\lambda$. **Σ** **Λ**

17 Αν για τις συναρτήσεις f,g,h ισχύει $f(x)\le g(x)\le h(x)$ για κάθε $x\ge 4$

και $\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} h(x)=\lambda$ τότε $\lim_{x\to 4^+} g(x)=\lambda$. **Σ** **Λ**

18 Αν $\lim_{x\to 0}(f(x)-g(x))=0$ τότε $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} f(x)$. **Σ** **Λ**

19 Αν $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}=0$, τότε $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$. **Σ** **Λ**

20 Αν $f: A\to \mathbf{R}$ και $\lim_{x\to x_0} f(x)=k\in\mathbf{R}$, τότε $x_0\in A$. **Σ** **Λ**

21 Αν $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\ell\in\mathbf{R}$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)\in\mathbf{R}$. **Σ** **Λ**

22 Αν $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=m\in\mathbf{R}$ και $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=n\in\mathbf{R}$ τότε $n\le m$. **Σ** **Λ**

23 Αν $\lim_{x\to 0}(f(x)+\sigma\upsilon\nu x)\in\mathbf{R}$, τότε $\lim_{x\to 0}(f(x)+\sigma\upsilon\nu x)=\lim_{x\to 0} f(x)+1$. **Σ** **Λ**

24 Ισχύει $\lim_{x\to x_0} f^2(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=0$. **Σ** **Λ**

25 Ισχύει $\lim_{x\to x_0} f^2(x)=4 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=2$ ή $\lim_{x\to x_0} f(x)=-2$. **Σ** **Λ**

26 Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-1}$ κοντά στο 1 είναι θετική. **Σ** **Λ**

27 Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x^2}$ είναι μικρότερη από το 1 κοντά στο 0. **Σ** **Λ**

28 Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

τότε $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ **Σ** **Λ**

• *Ερωτήσεις Πολλαπλών Επιλογών*

Κυκλώστε ένα μόνο από τα γράμματα Α, Β, Γ, Δ, Ε υποδηλώνοντας την σωστή απάντηση σε κάθε μία από τις παρακάτω ασκήσεις.

1 Αν $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)g(x)) = \lambda \in \mathbf{R}$, τότε το λ ισούται με:

Α. $f(1)g(1)$ Β. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to 1} g(x)$ Γ. $f(1) \cdot \lim\limits_{x\to 1} g(x)$ Δ. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \cdot g(1)$

Ε. Τίποτα κατ' ανάγκην από τα προηγούμενα

2 Αν $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$, τότε:

Α. $f(1)=3$ Β. $f(1)=3$ κοντά στο 1 Γ. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -3$

Δ. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt[3]{2f^2(x)+9} = 3$ Ε. Τίποτα κατ' ανάγκην από τα προηγούμενα

3 Αν f,g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το **R** και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, τότε:

Α. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x))=0$ Β. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ Γ. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Δ. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{x^2-1} = 0$ Ε. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{x^2+x+1} = 0$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΕΩΣ

1 Λάθος. Δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

2 Λάθος. Για παράδειγμα αν $g(x)=x^2$, $f(x)=x$, τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, όμως $g(x)\neq f(x)$.

3 Λάθος. Δεν γνωρίζουμε αν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

4 Σωστό. Βλέπε την πρώτη ιδιότητα των ορίων (§ 3.2).

5 Λάθος. $f(x)=|x|^2$, $g(x)=|x|^3$, για $x\in(-1,1)$. **6** Σωστό, αφού $\dfrac{x}{\eta\mu x}=\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^{-1}$.

7 Λάθος. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$. **8** Λάθος, γιατί το x δεν μπορεί να πλησιάζει το 1 οσοδήποτε κοντά θέλουμε.

9 Λάθος, $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\eta\mu x}{x}=2/\pi$. **10** Λάθος, γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$. **11** Σωστό

12 Σωστό. **13** Λάθος, γιατί δεν γνωρίζουμε αν $\lim\limits_{x\to \pi} f(x)=f(\pi)$. **14** Λάθος, γιατί δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

15 Λάθος, παράδειγμα η $f(x)=\begin{cases}1 & \text{αν } x>2\\ -1 & \text{αν } x<2\end{cases}$. **16** Λάθος, η ανισοτική σχέση θα είχε αποτέλεσμα αν ίσχυε κοντά στο 3.

17 Σωστό. **18** Λάθος, γιατί δεν γνωρίζουμε αν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. **19** Λάθος, γιατί δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Πράγματι αν $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=1$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$, ενώ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=1$. **20** Λάθος, βλ. παρατήρηση στον ορισμό του ορίου, $f(x)=x$, $x\in\mathbf{R}^*$, $x_0=0$. **21** Λάθος. Πράγματι έστω $f(x)=\begin{cases}1 & \text{αν } x>x_0\\ -1 & \text{αν } x<x_0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-1 & \text{αν } x>x_0\\ 1 & \text{αν } x<x_0\end{cases}$. **22** Λάθος. Πράγματι έστω

$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{αν } x > x_0 \\ 1 & \text{αν } x < x_0 \end{cases}$. **23** Λάθος, γιατί δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

.**24** Σωστό αφού $|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$ και $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$. **25** Λάθος, παράδειγμα

η $f(x)=\begin{cases} 2, & x \ge x_0 \\ -2, & x<x_0 \end{cases}$. **26** Σωστό, **27** Λάθος, **28** Λάθος, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x+1}\right)=0$

• *Ερωτήσεις Πολλαπλών Επιλογών*

1 Ε. Δεν γνωρίζουμε αν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

2 Δ. **3** Το Ε, αφού δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, επίσης $x^2+x+1\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$. Το Δ απορρίπτεται γιατί είναι πιθανόν το x_0 να είναι ρίζα του x^2-1.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

α) Ελληνόγλωσση

Αγγελίδη Ε., (2005), *Οι δυσκολίες κατανόησης του ορίου σε μαθητές Γ΄ Λυκείου,* Διπλωματική Εργασία τμ. Μαθηματικό του ΕΚΠΑ.

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β. Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., (2010), *ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ.*

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β. Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., (2009), *ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ.*

Δημαράκης Ι., (2004), «Η έννοια του ορίου συνάρτησης, δυσκολίες και εμπόδια κατανόησης, μια πρόταση διδασκαλίας», Πρακτικά 21ου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Τρίκαλα 2004.

Θεοδοσίου Σ., Δανέζης Μ., (2010), *Στα χρόνια του Βυζαντίου - Οι θετικοί επιστήμονες, ιατροί, χρονολόγοι και αστρονόμοι,* Εκδ. Δίαυλος.

β) Ξενόγλωσση

Cornu, B. (1981), "Grandes lignes de l' evolution historique de la notion de limite", *Cahier du Seminaire de Didactique des Mathematiques et de l'Informatique,* 26, 305-326.

Robinson, A. (1966), *Non-Standard Analysis*, North Holland.

Schwarzenberger R.L.E. & Tall D.O. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits, *Mathematics Teaching* 82, 44-49.

Szydlik, E., J., (2000), "Mathematical Beliefs and Conceptual Understanding of the Limit of a Function", *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 3, 258-276.

Tall D., (1977), "Conflicts and Catastrophes in the Learning of Mathematics", *Mathematical Education for Teaching*, **2**, 4, 2-18.

Tall D., (1992), The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. Published in Grouws D.A. (ed.) *Handbook of Research on MathematicsTeaching and Learning*, Macmillan, New York, 495–511.

Tall D., Vinner S., (1981), "Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity", *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 151–169.

Szydlik, J. E. (2000), "Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol.31, no 3, 258-76.

Vinner S. and Hershkowitz R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts, *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Berkeley, California, 177-184.

Η βιβλιογραφία που ακολουθεί δεν αφορά στενά το θέμα των ορίων αν και μεγάλο μέρος της αναφέρεται σε αυτά. Άπτεται όμως θεμάτων σχετικών με τους προβληματισμούς του παρόντος βιβλίου γι' αυτό την παραθέτουμε:

Alibert D. (1987). Alteration of didactic contract in codidactic situation. *Proceedings of the 11th International Conference of PME*, Montréal, 379-385.

Alibert D. (1988a). Towards new customs in the classroom. *For The Learning of Mathematics*, 8, 2, 31-43.

Alibert D. (1988). Co-didactic system in the course of mathematics: how to introduce it. *.P.M.E. 12, Hungary*, 109-116.

Artigue M. (1986). The notion of differential for undergraduate students in the sciences. *P.M.E.10, London*, 235-240.

Ayers T., Davis G., Dubinsky E. & Lewin P. (1988). Computer experiences in learning composition of functions. *Journal for Research in Mathematical Education*, 19,3, 248-59.

Balacheff N. (1982). Preuve et démonstration. *Reserche en Didactique des Mathématiques*, vol 3. 3.

Barnes M (1988). Understanding the Function Concept: Some Results of Interviews with Secondary and Tertiary Students. *Research on Mathematics Education in Australia*, 24-33.

Bell A.W. (1978). The learning of process aspects of mathematics. *Proceedings of the second International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Osnabrück, 48-78.

Borasi, R. (1985). Intuition and rigor in the evaluation of infinite expressions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 7, 3-4, 65-75.

Buck R. C. (1970). Functions. In E.G. Begle (Ed.). *The sixty-ninth yearbook of the National Society for the Study of Education, Part I: Mathematics Education*. Chicago, IL: National Society for the Study of Education.

Breidenbach D., Dubinsky E., Hawks J, and Nichols D. (*in preparation*). Development of the Process Concept of Function.

Cornu B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres. *Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME*, Grenoble, 322-326.

Cornu B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: Conceptions et Obstacles*. Thèse de Doctorat, Grenoble.

Davis R.B. (1982). *Learning Mathematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics Education*. Croom-Helm, London.

Davis R.B. and Vinner S. (1986). The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. *Journal of Mathematical Behaviour*, 5, 3, 281-303.

Demana & Waits (1988). Pitfalls in graphical computation, or why a single graph isn't enough. *College Mathematics Journal*,19 (2) 177-183.

Desmond A.J. (1975). *The Hot-Blooded Dinosaurs*. Blond & Briggs, London.

Dorofeev, G. V. (1978). The concept of function in mathematics and in school. *Mathematics in School*, 2, 10 -27.

Dreyfus T. and Eisenberg T. (1982). Intuitive functional concepts: a Baseline Study on Intuitions. *Journal for Research in Mathematical Education*, 6,2, 18-24.

Dreyfus T. and Eisenberg T. (1987). On visualizing function transformations, (to appear)

Dreyfus T. and Vinner S. (1982). Some aspects of the function concept in college students and junior high school teachers. *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Antwerp, 12-17.

Dreyfus T. & Vinner S. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Dubinsky E. (1990). Computers in teaching and learning discrete mathematics and abstract algebra. *Advanced Technologies in the Teaching of Mathematics and Science* (ed. D. L. Ferguson). Springer-Verlag. (to appear).

Dugdale (1982). Green globs: A microcomputer application for graphing of equations. *Mathematics Teacher*, *75*, 208-214.

Dugdale S. & Kibbey D. (1989). Building a qualitative perspective before formalizing procedures: graphical representations as a foundation of trigonometric identities, *Proceedings of the 11th Meeting of PME-NA*. NJ.

Ervynck G. (1981). Conceptual difficulties for first year students in the acquisition of the notion of limit of a function, *Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME*, Grenoble, 330-333.

Even R. (1988). *Prospective secondary mathematics teachers' knowledge and understanding about mathematical function*, unpublished Ph.D. thesis, Michigan State University.

Fischbein E. (1978). Intuition and mathematical education, *Osnabrücker Schriften zür Mathematik 1*, 148-176.

Fischbein E., Tirosh D., Hess P. (1979). The intuition of infinity, *Educational Studies in Mathematics* 12, 491-512.

Fischbein E., Tirosh D., Melamed U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement?, *Educational Studies in Mathematics*, 12 491-512.

Goldenberg E. P. , Harvey W., Lewis P.G., Umiker R.J., West J. & Zodhiates P. (1988). *Mathematical, technical and pedagogical challenges in the graphical representation of functions* (Tech. Rep. No.88-4), Educational Technology Center, Harvard Graduate School of Education.

Janvier C. (1987). Representations and understanding: The notion of function as an example. In C. Janvier (ed.), *Problems of representation in mathematics learning and problem-solving.* Hilsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Keisler H.J. (1976). *Elementary Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston.

Kerslake D. (1977). The understanding of graphs, *Mathematics in School*, 6,2 22-25.

Kleiner I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, 20 (4), 282–300.

Leinhardt G, Zaslavsky O, Stein M. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning and Teaching. *Review of Educational Research*, *60* 1 1-64.

Malik M. A. (1980). Historical and pedagogical aspects of the definition of a function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 11(4), 489-492.

Mason J., Burton L. & Stacey K. (1982). *Thinking Mathematically*, Addison Wesley.

Markovits Z., Eylon B. & Bruckheimer M. (1986). Functions today and yesterday, *For the Learning of Mathematics,* 6, 18-24.

Markovits Z., Eylon B. & Bruckheimer M. (1988). Difficulties Students have with the Function Concept, *The Ideas of Algebra, K-12*, N.C.T.M. 1988 Yearbook, 43-60.

Monaghan J. D. (1986). *Adolescent's Understanding of Limits and Infinity*, unpublished Ph.D. thesis, Warwick University.

Orton A. (1977). Chords, secants, tangents & elementary calculus, *Mathematics Teaching*, 78 48-49.

Orton A. (1980). *A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults*, unpublished Ph.D., Leeds University. Papert S. (1980). *Mindstorms*, Harvester Press, Brighton.

Rich A., Rich J & Stoutemyer D.(1989). *Derive™ - A Mathematical Assistant*, Soft Warehouse, Honolulu.

Robert A. (1982). L'Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur, *Reserches en Didactique des Mathématiques,* vol 3, no 3, 307-341.

Schaaf W.A. (1930). Mathematics and World History. *Mathematics Teacher* 23 496-503.

Schwarzenberger R.L.E. & Tall D.O. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits, *Mathematics Teaching* 82, 44-49.

Schwartz J. L. (1990). Software to Think With: The Case of Algebra, *Advanced Technologies in the Teaching of Mathematics and Science* (ed. D. L. Ferguson). Springer-Verlag. (to appear).

Schwartz J.T., Dewar R.B.K., Dubinsky E. & Schonberg E. (1986). *Programming with Sets, An introduction to SETL*, Springer-Verlag.

Schwarz B. & Bruckheimer M. (1988). Representations of functions and analogies, *P.M.E. XII, Hungary*, 552-559.

Schwarz B., Dreyfus T. & Bruckheimer M. (1988). *The Triple Representation Model Curriculum for the Function Concept* (to appear).

Senk S. L. (1985). How well do students write geometry proofs?, *Mathematics Teacher*, 78,6, 448-456.

Sierpińska A. (1985a). Obstacles epistémologiques relatifs à la notion de limite, *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 6.1, 5-67.

Sierpińska A. (1985b). La notion d'un obstacle epistémologique dans l'enseignement, *Actes de la 37e Rencontre CIEAEM*, Leiden.

Sierpińska A. (1987). Humanities students and Epistemological Obstacles Related to Limits, *Educational Studies in Mathematics*, 18,4, 371-87.

Sierpińska A. (1988). Epistemological remarks on functions, *P.M.E. XII, Hungary*, 568-575.

Skemp R.R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*, Pelican, London.

Sullivan K. (1976). The teaching of elementary calculus: an approach using infinitesimals, *American Mathematical Monthly* 83,5 370-375.

Taback S. (1975). The child's concept of limit in *Children's Mathematical Concepts* (ed. Roskopff M.F.) Teachers' College Press, New York 111-114.

Tall D.O. (1977). Conflicts and catastrophes in the learning of mathematics, *Mathematical Education for Teaching* 2,4 2-18.

Tall D.O. (1979). Cognitive aspects of proof, with special reference to the irrationality of $\sqrt{2}$, *Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Warwick, 203-205.

Tall D.O. (1980a). The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity, *Educational Studies in Mathematics*, 11 271-284.

Tall D.O. (1980b). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes, *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley 170-176.

Tall D.O. (1981). Intuitions of infinity, *Mathematics in School* 10,3 30-33.

Tall D.O. (1986). *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using Interactive Computer Graphics*, Ph.D. Thesis in Education, University of Warwick.

Tall D. O. (1987). Constructing the concept image of a tangent, *Proceedings of the Eleventh International Conference of P.M.E.*, Montréal, III 69-75.

Tall D.O, Blokland P. & Kok D. (1990). *A Graphic Approach to the Calculus*, (for I.B.M. compatible computers), Sunburst.

Tall D.O. & Vinner S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12 151-169.

Thomas H.L. (1975). The concept of function. In M. Rosskopf (ed.) *Children's mathematical concepts*. New York: Teachers College, Columbia University.

Tirosh D. (1985). *The intuition of infinity and its relevance for mathematics education*, unpublished doctoral dissertation, Tel-Aviv University.

Vinner S. and Hershkowitz R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts, *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Berkeley, California, 177-184.

Vinner S. (1982). Conflicts between definitions and intuitions - the case of the tangent, *Proceedings of the 6th International Conference of P.M.E., Antwerp*, 24-28.

Vinner S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function, *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, 293-305.

Vinner S. (1988). Visual Considerations in College Calculus - Students and Teachers, *Theory of Mathematics Education, Proceedings of the Third International Conference, Antwerp*, 109-116.

Wheeler M.M. & Martin W.G. (1987). Infinity Concepts among pre-service elementary school teachers, *Proceedings of the Eleventh International Conference of P.M.E.*, Montréal.

Wheeler M.M. & Martin W.G. (1988). Explicit Knowledge of Infinity, *P.M.E.-N.A., Proceedings of the Tenth Annual Meeting*, Dekalb, Illinois.

Yerushalmy M. (1990). Understanding concepts in algebra using linked representation tools. *Advanced Technologies in the Teaching of Mathematics and Science* (ed. D. L. Ferguson). Springer- Verlag. (to appear).

Yerushalmy M. (1991). Students' Perceptions of Aspects of Algebraic Function Using Multiple Representation Software, *Journal of Computer Assisted Learning.* Blackwell Scientific Publications (to appear).

ΜΙΧΑΗΛ ΜΑΝΩΛΟΠΟΥΛΟΣ

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Προσεγγίσεις – Εννοιών - Δυσκολίες

Ασκήσεις

ΑΘΗΝΑ 2011

ISBN: 978-960-93-2781-7