Ασκήσεις – Τυχαίες μεταβλητές

1) Δύο παίχτες στρίβουν ένα νόμισμα και εάν πέσει «γράμματα» τότε ο πρώτος παίκτης δίνει 1 ευρώ στον δεύτερο, ενώ εάν πέσει «κορώνα» τότε ο δεύτερος παίκτης δίνε στον πρώτο 2 ευρώ. Ορίστε την τυχαία μεταβλητή Χ που δίνει το κέρδος του πρώτου παίκτη μετά από το στρίψιμο του νομίσματος.

2) Ρίχνουμε ένα ζάρι του οποίου κάθε πλευρά δεν έχει την ίδια πιθανότητα εμφάνισης. Δίνεται η τ.μ. Χ: ο αριθμός που εμφανίζεται μετά τη ρήψη στην πάνω πλευρά. Αν ισχύει ο παρακάτω πίνακας να βρεθεί το α.

k	1	2	3	4	5	6
P(X=k)	α	2α	3α	3α	2α	α

Να υπολογισθεί το $P(2 \leq X \leq 4)$ (α=1/12).

3) Σε ένα πείραμα τύχης ρίχνουμε ένα ζάρι. Ο παίκτης κερδίζει το διπλάσιο της τιμής που εμφανίζεται κατά την ρίψη αν είναι άρτια και χάνει το διπλάσιο της τιμής αν είναι περιττή. Έστω Χ η τ.μ που δείχνει το κέρδος ή τη ζημιά του παίκτη μετά από κάθε ρίψη. Αν Ω είναι ο δ.χ του πειράματος να υπολογισθούν οι τιμές της τ.μ Χ (δηλ. να βρεθεί το X(k), όπου $k \in \Omega$).

Να συμπληρωθεί ο πίνακας

k						
P(X=k)						

(X(1)=−2, X(2)=4, X(3)=−6, X(4)=8, X(5)=−10 και X(6)=12)

4) Διαθέτουμε 32 κάρτες αριθμημένες από το 1 έως το 8 τεσσάρων διαφορετικών χρωμάτων. Επιλέγουμε στην τύχη μια κάρτα, και σε κάθε επιλογή αντιστοιχούμε την παρακάτω τιμή Χ:

α) αν η κάρτα έχει τον αριθμό 1 αντιστοιχούμε την τιμή 4

β) αν η κάρτα έχει τον αριθμό 2 αντιστοιχούμε την τιμή 3,

γ) αν η κάρτα έχει τον αριθμό 3 αντιστοιχούμε την τιμή 1 και τέλος

δ) αντιστοιχούμε την τιμή 0 αν η κάρτα έχει οποιοδήποτε άλλο νούμερο.

Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας για την τ.μ Χ που δημιουργήσαμε.

k				
P(X=k)				

k	0	1	3	4
P(X=k)	5/8	1/8	1/8	1/8

5) Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Μετά τη δεύτερη ρίψη καταγράφουμε τη μεγαλύτερη από τις δύο ενδείξεις έστω Χ. Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα να βρείτε όλες τις τιμές του Χ. Η $1^η$ κάθετη στήλη παριστάνει την $1^η$ ρίψη, ενώ η $1^η$ γραμμή παριστάνει τη δεύτερη στήλη.

$1^η$ / $2^η$	1	2	3	4	5	6
1	1	2				
2	2	2	3			
3						
4						
5						
6						

Να διαπιστώσετε με επαλήθευση ότι: $P(X=n)=\dfrac{2n-1}{36}$, $1\le n\le 6$.

6) Σε μία κάλπη υπάρχουν 8 αριθμημένες σφαίρες από το 1 έως το 8. Βγάζουμε δύο στην τύχη. Πόσα στοιχεία έχει ο δ.χ του πειράματος; Έστω Χ η τ.μ που παριστάνει το μικρότερο νούμερο από τις δύο σφαίρες που εξήχθησαν. Ποιες τιμές παίρνει το Χ. Να υπολογισθεί το P(X=k), όπου k οι τιμές που μπορεί να πάρει το Χ. Κατόπιν να επαληθεύσετε ότι ισχύει $P(X=k)=\dfrac{\binom{8-k}{1}}{\binom{8}{2}}$.

7) Μια ομάδα 8 ταξιδιωτών χωρίς να έχουν κλείσει εισιτήρια μπαίνουν στην τύχη σε ένα τραίνο που έχει 5 βαγόνια. Είναι γνωστό πως σε κάθε βαγόνι υπάρχουν δύο κενές θέσεις. Έστω Χ ο αριθμός των ταξιδιωτών από τους 8 που θα βρουν θέση να κάτσουν. Να καταγράψετε και τις 18 περιπτώσεις που μπορεί να συμβούν και να βρείτε σε κάθε περίπτωση την τιμή του Χ.

(Παράδειγμα: μπαίνουν 4 σε ένα βαγόνι, 3 σε ένα δεύτερο και 1 σε ένα τρίτο. Θα καθίσουν 2+2+1=5 άτομα κλπ).

8) Μέσα σε μια κάλπη υπάρχουν 5 πούλια αριθμημένα από το 1 έως το 5. Επιλέγουμε τρία στην τύχη. Πόσα στοιχεία έχει ο δ.χ. να καταγραφούν. Έστω Χ ο μικρότερος από τους 3 αριθμούς κάθε φορά. Ποιες τιμές παίρνει το Χ. Να υπολογισθεί το P(X=k), όπου k οι τιμές που μπορεί να πάρει το Χ.

(P(X=1)=0.6, P(X=2)=0.3 και P(X=3)=0.1).

9) Ρίχνουμε 2 ζάρια. Έστω Χ το άθροισμα των ενδείξεων των δύο αυτών ζαριών. Να γραφεί ο δ.χ. του πειράματος. Να υπολογισθούν οι τιμές τις τ.μ. Χ, καθώς και οι πιθανότητες: P(X=2), P(X=3), ..., P(X=12).

Άσκηση με τη βοήθεια μικροϋπολογιστή.

1) Στον παρακάτω πίνακα καταγράφεται ο αριθμός των τηλεοράσεων που βρέθηκαν σε σπίτια σε μία δειγματοληπτική έρευνα στις ΗΠΑ:

Αριθμός Τηλεοράσεων	Αριθμός σπιτιών
0	1 218
1	32 379
2	37 961
3	19 387
4	7 714
5	2 842

Η πιθανότητα ένα σπίτι να έχει πχ 3 τηλεοράσεις προκύπτει από τη σχετική συχνότητα: $\frac{\text{Αριθμός σπιτιών με 3 τηλεοράσεις}}{\text{Συνολικός αριθμός ερωτηθέντων σπιτιών}}$.

Να συμπληρωθεί (με τη βοήθεια του TI) ο πίνακας σχετικών συχνοτήτων. Να γίνει στρογγυλοποίηση των αποτελεσμάτων στο 3^{ο} δεκαδικό ψηφίο. Έστω X ο αριθμός των τηλεοράσεων για κάθε σπίτι. Να υπολογισθούν τα:

$P(X=0)$, $P(X=3)$, $P(1\le X\le 3)$, $P(X\le 5)$. (0.012-0.191-0.884-1)

Χρήσιμες εντολές: =b[]*1./(sum(b[]))   =round(fi,3)

2) Το επίπεδο νέφους σε μια μεγάλη πόλη θεωρείται μη αποδεκτό περίπου το 15% των ημερών. Αν επιλεγούν τυχαία 100 μέρες, ποιες είναι οι πιθανότητες να εμφανιστούν:

α) Ακριβώς 15 ημέρες με μη αποδεκτό επίπεδο νέφους. (0.1111)

β) Όχι περισσότερες από 15 ημέρες με μη αποδεκτό επίπεδο νέφους. (0.5683)

γ) Λιγότερες από 15 ημέρες με μη αποδεκτό επίπεδο νέφους. (0.4572)

δ) Περισσότερες από 15 ημέρες με μη αποδεκτό επίπεδο νέφους. (0.4317)

ε) Μεταξύ 12 και 18 ημέρες με μη αποδεκτό επίπεδο νέφους. (0.6737)

ς) Ακριβώς 88 ημέρες με αποδεκτό επίπεδο νέφους. (0.838)

ζ) Τουλάχιστον 82 ημέρες με αποδεκτό επίπεδο νέφους. (0.8372)

Χρήσιμες εντολές: binomPdf(3,0.4,2) (=P(X=2), με n=3, π=0.4)

binomCdf(100,0.14,0,15) (=P(0≤X≤15), με n=100, p=0.14)

3) Είναι γνωστό ότι ένας αριθμός επιβατών ακυρώνει το αεροπορικό ταξίδι την τελευταία στιγμή. Προκειμένου να μην υπάρχουν κενές θέσεις οι αεροπορικές εταιρείες εκδίδουν μεγαλύτερο αριθμό εισιτηρίων από τις θέσεις του αεροπλάνου. Έστω ότι οι θέσεις του αεροπλάνου είναι 100 και η πιθανότητα μη εμφάνισης ενός επιβάτη είναι 0.15.

Αν η εταιρία αποφασίσει να εκδώσει 115 εισιτήρια ποιες είναι οι πιθανότητες να εμφανιστούν (α) περισσότεροι από 100 επιβάτες, (β) περισσότεροι από 105 επιβάτες, (γ) τουλάχιστον 95 επιβάτες και (δ) τουλάχιστον 90 επιβάτες; (0.2410-0.0159-0.8045-0.9805)

4) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της διωνυμικής κατανομής για n=10: α) όταν p=0.1, β) p=0.5.

5) Να γίνει η γραφική παράσταση της τυποποιημένης κανονικής κατανομής (μ=0, σ=1). Να βρεθεί η πιθανότητα $P(-1<x<2)$:

α) Με τη βοήθεια του εμβαδού από τη γραφική παράσταση (0.818).

β) Με τη βοήθεια του ολοκληρώματος.

γ) Με τη βοήθεια της εντολής: **normCdf**.