Ασκήσεις στις κατανομές και ειδικά στην διωνυμική κατανομή και κανονική κατανομή

Όπου χρειάζεται να γίνει χρήση του μικροϋπολογιστή

1) Για την τυχαία διακριτή μεταβλητή X ισχύει $P(X=x_i)=\frac{3x_i-2}{45}$, $x_i=1,2,3,4$.

α) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$				

β) Να βεβαιωθείτε ότι πρόκειται για συνάρτηση πιθανότητας.

γ) Να βρεθούν η μέση τιμή, η διασπορά και η τυπική απόκλιση.

2) Για τη τυχαία διακριτή μεταβλητή X ισχύει ο παρακάτω πίνακας:

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	2/5	1/6	1/3	3/10

α) Να βεβαιωθείτε ότι πρόκειται για συνάρτηση πιθανότητας.

γ) Να βρεθούν η μέση τιμή, η διασπορά και η τυπική απόκλιση.

Επιλέγουμε ένα τυχαίο δείγμα τεσσάρων μεταχειρισμένων ραδιοφώνων. Αν γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να μην υπάρχει ελαττωματικό ραδιόφωνο στο δείγμα είναι ίση με την πιθανότητα να είναι όλα ελαττωματικά, να βρεθεί η κατανομή πιθανότητας της τ.μ. που δηλώνει τον αριθμό των ελαττωματικών ραδιοφώνων. Να υπολογισθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της κατανομής.

3) Για τις τυχαίες διακριτές μεταβλητές X και Y ισχύουν οι παρακάτω πίνακες:

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	1/8	2/8	3/8	2/8

y_i	-20	1	10	30
$P(X=x_i)$	2/8	2/8	3/8	1/8

α) Να βεβαιωθείτε ότι πρόκειται για συναρτήσεις πιθανότητας.

β) Να βρεθούν η μέση τιμή, η διασπορά και η τυπική απόκλιση. (2.75-0.9375-242.69)

4) Αν $f(x)=\frac{1}{4}x+k$, $x\in[0,2]$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας τ.μ. X να βρεθεί το k. Στη συνέχεια να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της X. ($k=1/4$, $\mu=7/6$, $\sigma^2=11/36$)

5) Αν X συνεχής τ.μ. με $f(x)=e^{-x}$, $x\in[0, +\infty)$ να υπολογισθεί η $P(1\leq x\leq 4)$. ($e^{-1}-e^{-4}$)

6) Επιλέγουμε ένα τυχαίο δείγμα τεσσάρων μεταχειρισμένων ραδιοφώνων. Αν γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να μην υπάρχει ελαττωματικό ραδιόφωνο στο δείγμα είναι ίση με την πιθανότητα να είναι όλα ελαττωματικά, να βρεθεί η κατανομή πιθανότητας της τ.μ. που δηλώνει τον αριθμό των ελαττωματικών ραδιοφώνων. Να υπολογισθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της κατανομής.

Λύση:

Έστω X η τ.μ που παριστάνει τον αριθμό των ελαττωματικών ραδιοφώνων στο δείγμα των τεσσάρων. Τότε η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με n=4 και πιθανότητα επιτυχίας δηλαδή να είναι ελαττωματικό p. Τότε η συνάρτηση πιθανότητας είναι:

$$P(X=x)=\binom{4}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

Πρέπει να βρεθεί το p. Από την υπόθεση του προβλήματος ισχύει:

$P(X=0)=P(X=4) \Leftrightarrow \binom{4}{0}p^0(1-p)^4=\binom{4}{4}p^4(1-p)^0 \Leftrightarrow (1-p)^4=p^4 \Leftrightarrow 1-p=p$ ή $1-p=-p \Leftrightarrow$ $p=0.5$.

Επομένως η συνάρτηση πιθανότητας είναι η $P(X=x)=\binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}=\binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

Ισχύει επομένως ο παρακάτω πίνακας:

X	0	1	2	3	4
P(X=x)	0.0625	0.25	0.375	0.25	0.0625

Για τη μέση τιμή έχουμε $E(X)=np=4\cdot 0.5=2$ και την τυπική απόκλιση $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{4\cdot 0.5^2} = 1$.

7) Ίδια άσκηση όπως η προηγούμενη όπου:

α) Η πιθανότητα να υπάρχει ένα ελαττωματικό στο δείγμα είναι ίση με την πιθανότητα να υπάρχουν τρία ελαττωματικά. (p=0.5)

β) Η πιθανότητα να υπάρχει ένα ελαττωματικό στο δείγμα είναι τετραπλάσια από την πιθανότητα να μην υπάρχει κανένα. (p=0.5)

γ) Η πιθανότητα να υπάρχει δύο ελαττωματικά στο δείγμα είναι ίση με τα 3/2 της πιθανότητας να υπάρχει ένα ελαττωματικό. (p=0.5)

8) Ποια είναι η πιθανότητα σε μια παρέα 3 ατόμων οι δύο να έχουν κινητό τηλέφωνο όταν είναι γνωστό ότι το 40% των ατόμων έχουν κινητό τηλέφωνο; (0.288)

9) Η πιθανότητα ελαττωματικού εξαρτήματος σε μία παρατήρηση είναι 0.1.

α) Ποια η πιθανότητα να μη βρεθεί κανένα ελαττωματικό σε δείγμα τεσσάρων; (0.656)

β) Ποια η πιθανότητα να βρεθεί ένα ελαττωματικό σε δείγμα τεσσάρων; (0,292)

γ) Ποια η πιθανότητα να βρεθεί το πολύ ένα σε δείγμα τεσσάρων; (94,7%)

10) Αν X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με n=3 και p=0.5 τότε να υπολογιστούν οι πιθανότητες f(x) = P(X=x) για x=0, 1, 2, 3. (1/8, 3/8, 3/8, 1/8)

11) Ένας παίκτης που παίζει ρουλέτα ποντάρει συνέχεια στο μαύρο. Η πιθανότητα να έρθει μαύρο σε ένα οποιοδήποτε γύρισμα της ρουλέτας είναι ίση με 18/37. Ποιά η πιθανότητα να κερδίσει 4 φορές σε 10 γυρίσματα της ρουλέτας; (0.21568)

12) Ο γεωπόνος ισχυρίζεται ότι ποσοστό 90% ενός συγκεκριμένου είδους φυτών δίνει περισσότερους από 5 καρπούς ανά φυτό. Ένας γεωργός επέλεξε τυχαία 52 φυτά και μέτρησε τους καρπούς. Βρήκε 38 να έχουν περισσότερους από 5 καρπούς. Με δεδομένο ότι αληθεύει ο ισχυρισμός του γεωπόνου πόσο πιθανό ήταν αυτό που συνέβη στον αγρότη; (0.0003)

13) Μια βιομηχανία κατασκευάζει μεταλλικά ελάσματα για να αντέχουν σε συγκεκριμένη καταπόνηση. Κάθε τέτοιο έλασμα αντέχει στη συγκεκριμένη καταπόνηση με πιθανότητα 0.8. Επιλέγουμε τυχαία 9 τέτοια ελάσματα και τα υποβάλλουμε στη συγκεκριμένη καταπόνηση. Ποιά είναι η πιθανότητα να αντέξουν α) το πολύ 2 ελάσματα, β) περισσότερα από 7 ελάσματα, γ) τουλάχιστον 2 ελάσματα και δ) λιγότερο από 6 και τουλάχιστον 4 ελάσματα. ($P(X\leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$ 0.0003, 0.436207,0.999981,0.0825754)

14) Έστω ότι η τ.μ. X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p. Να δειχθεί ότι $P(X=x)=\frac{n-x+1}{x}\cdot\frac{p}{1-p}P(X=x-1)$.

15) Ρίχνουμε ένα ζάρι 4 φορές. Ποιά είναι η πιθανότητα α) να μην έρθει καμιά φορά άσσος, β) να έρθει μια φορά άσσος, γ) να έρθει 2 φορές άσσος, δ) να έρθει 3 φορές άσσος και ε) να έρθει 4 φορές άσσος. (0.4824-0.3857-0.0154-0.0008)

16) Μια αεροπορική εταιρεία γνωρίζει ότι το 5% των ατόμων που κάνουν κράτηση για να ταξιδέψουν δεν εμφανίζονται. Αν η εταιρεία κάνει κράτηση για 52 άτομα σε μια πτήση που γίνεται με ένα μικρό αεροσκάφος χωρητικότητας 50 ατόμων, ποιά είναι η πιθανότητα να υπάρχει διαθέσιμο κάθισμα για καθένα επιβάτη που εμφανίζεται για να ταξιδέψει; ($P(X\leq 50=1-0.26=0.74$)

17) Πόσα παιδιά πρέπει να αποκτήσει μια οικογένεια ώστε να έχει ένα τουλάχιστον αγόρι και ένα τουλάχιστον κορίτσι με πιθανότητα μεγαλύτερη από α) 90%, β) 99% (6-8)

18) Μία κάλπη περιέχει 7 άσπρα και 4 μαύρα σφαιρίδια. Εξάγουμε 6 σφαιρίδια με επανατοποθέτηση. Ποιά η πιθανότητα να μην βρεθεί άσπρο σφαιρίδιο; (0.0072)

19) Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα 10 φορές. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να εμφανιστεί η ένδειξη κορόνα 3 φορές. Στη συνέχεια να υπολογιστεί η πιθανότητα να εμφανιστεί η ένδειξη κορόνα από 3 έως και 7 φορές. (15/178-506/512)

20) Μια κάλπη περιέχει 10 σφαιρίδια, 6 άσπρες και 4 μαύρες. Εξάγουμε πέντε σφαίρες με επανατοποθέτηση. Ποιά η πιθανότητα:

1) Να μην εμφανισθεί άσπρο σφαιρίδιο. (256/25000)

2) Να εμφανισθεί ένα άσπρο σφαιρίδιο. (48/625)

3) Να εμφανισθούν δύο άσπρα σφαιρίδια. (36/25000)

4) Να εμφανισθούν τρία άσπρα σφαιρίδια (216/625)

5) Να εμφανισθούν τέσσερα άσπρα σφαιρίδια (162/625)

6) Να εμφανισθούν πέντε άσπρα σφαιρίδια (243/6250)

21) Ένα διαγώνισμα πολλαπλής επιλογής αποτελείται από 15 ερωτήσεις. Για κάθε ερώτηση, υπάρχουν 5 πιθανές απαντήσεις μια μόνο από τις οποίες είναι σωστή. Η βαθμολογία είναι 1 για κάθε σωστή απάντηση και 0 για κάθε λάθος απάντηση. Ένας φοιτητής διαλέγει την απάντηση σε κάθε ερώτηση στην τύχη. Να υπολογισθεί η πιθανότητα:

α) Ο παραπάνω φοιτητής να πάρει το πολύ οκτώ. (0.9992)

β) Ο φοιτητής αυτός να βαθμολογηθεί με οκτώ. (0.0035)

γ) Να πάρει βαθμό μεγαλύτερο από 3 και μικρότερο από οκτώ. (0.3476)

δ) Να βρεθεί ο μέσος αναμενόμενος βαθμός των φοιτητών που απαντούν στην τύχη. (3)

22) Αυτοκίνητα φθάνουν σε μια διασταύρωση όπου θα πρέπει υποχρεωτικά να στρίψουν δεξιά ή αριστερά. Έστω ότι τα αυτοκίνητα που φθάνουν στην διασταύρωση διαλέγουν την κατεύθυνση που θα στρίψουν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Έστω ότι η πιθανότητα p να στρίψει ένα αυτοκίνητο αριστερά είναι 0.7. Να υπολογισθεί η πιθανότητα:

α) Τουλάχιστον 10 από τα επόμενα 15 αυτοκίνητα να στρίψουν αριστερά. (0.7216)

β) Μέσα στα επόμενα 15 αυτοκίνητα τουλάχιστον 10 να στρίψουν στην ίδια κατεύθυνση. (0.7253)

23) Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι 300 φορές. Να υπολογισθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου να εμφανισθεί 1 ή 2 λιγότερες από 70 φορές. (0.00006)

24) Σε ένα διαγώνισμα πολλαπλών επιλογών οι πιθανές απαντήσεις σε κάθε ερώτημα είναι 4 εκ των οποίων η μία μόνο είναι σωστή. Η πιθανότητα ο μαθητής να βρει τη σωστή απάντηση είναι p=0.25. Αν οι ερωτήσεις είναι 20 να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, όπου η δεύτερη γραμμή είναι η πιθανότητα να απαντηθούν σωστά, αλλά τυχαία πλήθος ερωτήσεων που δηλώνει η πρώτη γραμμή.

Αριθμός Ορθών απαντήσεων	<3	3	4	5	6	7	>7
Πιθανότητα							

25) Ένας πωλητής διενεργεί τηλεφωνικές πωλήσεις για το προϊόν της εταιρείας στην οποία εργάζεται. Από ιστορικά στοιχεία που τηρούνται στο τμήμα πωλήσεων της εταιρείας προκύπτει ότι η πιθανότητα επίτευξης πώλησης για το συγκεκριμένο πωλητή είναι 28%. Έστω ότι ο πωλητής σε μια τυχαία επιλεγμένη ημέρα τηλεφωνεί σε 12 άτομα.

Να υπολογισθούν:

i) Η πιθανότητα να επιτύχει 4 πωλήσεις. (0.2197)

ii) Η πιθανότητα να μην επιτύχει καμία πώληση. (0.0194)

iii) Η πιθανότητα να επιτύχει το πολύ 2 πωλήσεις. (0.3037)

iv) Η πιθανότητα να επιτύχει τουλάχιστον 3 πωλήσεις. (0.6963)

v) Ο αναμενόμενος αριθμός και η τυπική απόκλιση των πωλήσεων. (3.36-1.554)

26) Η πιθανότητα η διάρκεια ζωής (σε μέρες) ενός εξαρτήματος μιας μηχανής να είναι μεγαλύτερη του 12 είναι 36%. Σε ένα τυχαίο δείγμα 5 εξαρτημάτων να βρεθεί η πιθανότητα 3 ακριβώς να διαρκέσουν πάνω από 12 μέρες. Να βρεθεί ο μέσος αριθμός και η τυπική απόκλιση των εξαρτημάτων στο δείγμα που θα επιζήσουν πάνω από 12 μέρες. (0.1911-1.8-1.07)

27) Η πιθανότητα ένα bit το οποίο στέλνεται από ένα κανάλι, να λαμβάνεται λανθασμένα είναι 0.05. Επίσης είναι γνωστό ότι οι αποστολές των bit είναι ανεξάρτητες. Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός των λανθασμένων bit που λαμβάνονται σε μια μετάδοση ενός κειμένου 3000 bit από το παραπάνω κανάλι. Ακόμη να βρεθεί η τυπική απόκλιση του αριθμού των λανθασμένων bit από κείμενο σε κείμενο όταν όλα τα κείμενα που μεταδίδονται είναι τα ίδια. (150-11.94)

28) Ένας ασφαλιστής ασφαλίζει 10 άτομα με την ίδια ηλικία και κατάσταση υγείας. Αν κάθε άτομο αυτής της κατηγορίας έχει πιθανότητα 60% να ζει μετά από 30 χρόνια τότε να υπολογιστεί η πιθανότητα να ζουν μετά από 30 χρόνια:

1) Κανένας. (0.00011)

2) Το πολύ 3 άτομα. (0.0548)

3) Τουλάχιστον 7 άτομα. (0.3823)

Ποιός είναι ο μέσος αριθμός ατόμων που θα ζουν μετά από 30 χρόνια; (6)

29) Η πιθανότητα να έχει κάποιος ατύχημα σε ένα επικίνδυνο σημείο της εθνικής οδού είναι 0.0001. Αν κατά τη διάρκεια του Σαββατοκύριακου διέρχονται από το σημείο αυτό 1000 αυτοκίνητα ποιά είναι η πιθανότητα να γίνουν δύο ή περισσότερα ατυχήματα; (0.00468)

Συνεχείς Κατανομές – Κανονική Κατανομή

1) Σε δείγμα 100 ατόμων έγινε το ίδιο τεστ IQ (τεστ νοημοσύνης) Τα αποτελέσματα ακολουθούν κανονική κατανομή με $\mu=100$ και $\sigma^2=225$. Να βρεθεί η πιθανότητα κάποιο άτομο να έχει δείκτη IQ:

α) Μικρότερο του 115. (0.8413)

β) Μικρότερο του 85. (0.1587)

γ) Μεταξύ 100 και 130. (0.4773)

2) Η κατανομή των βαρών των μαθητών ενός σχολείου είναι η κανονική με $\mu=60$ kg και $\sigma=5$ kg. Να υπολογιστεί η πιθανότητα επιλέγοντας τυχαία ένα μαθητή να είναι βαρύτερος από 70 kg. (0.02275)

3) Σε μια παραλία το βάρος X των χαλικιών ακολουθεί κανονική κατανομή με $\mu=30$g και $\sigma=10$ g.

α) Αν πάρουμε τυχαία ένα χαλίκι ποια η πιθανότητα να έχει βάρος:

1) μεγαλύτερο των 30 g; (0.5)

2) μεταξύ 28 και 40 g; (0.4206)

β) Αν πάρουμε 4 χαλίκια τυχαία ποια η πιθανότητα να βρούμε 2 ακριβώς με βάρος μεταξύ 28 και 40 g; (0.3563)

4) Να επαληθεύσετε με δικά σας παραδείγματα ότι αν η Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ τότε:

1) $P(\mu-\sigma<x<\mu+\sigma)=0.6828$

2) $P(\mu-2\sigma<x<\mu+2\sigma)=0.9544$

3) $P(\mu-3\sigma<x<\mu+3\sigma)=0.9972$

5) Τα αποτελέσματα σε ένα τεστ δεξιοτήτων ακολουθούν κανονική κατανομή με $\mu=500$ και $\sigma=100$. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος βαθμός που μπορεί να έχει ένας μαθητής, ώστε να βρίσκεται στο 20% της μικρότερης βαθμολογίας της κατανομής; (416)

6) Από το αρχείο ενός ιατρού προκύπτει ότι ο χρόνος αναμονής ενός ασθενούς στο ιατρείο του ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\mu=12.56$ min και $\sigma=3.75$ min. Να βρεθεί η πιθανότητα ένας ασθενής να περιμένει στο ιατρείο χρόνο μεταξύ 10 και 15 λεπτών. (0.495)

7) Τα ανδρικά πουκάμισα ταξινομούνται ανάλογα με το μέγεθός τους σε 4 κατηγορίες S, M, L, και XL που αντιστοιχούν σε μήκος περιφέρειας λαιμού ανδρών λιγότερο από 15 ίντσες για το S, μεταξύ 15 ιντσών και 16 ιντσών για το M, μεταξύ 16 ιντσών και 17 ιντσών για το L, και περισσότερο από 17 ίντσες για το XL. Έστω ότι το μήκος της περιφέρειας του λαιμού των ανδρών σε ίντσες είναι τ.μ. Χ που ακολουθεί την κατανομή με $\mu=15.75$ και $\sigma=07$.

(α) Να βρεθεί πόσα πουκάμισα ανά κατηγορία πρέπει να κατασκευάσει μια βιοτεχνία αν η παραγωγή της είναι 10000 πουκάμισα. (0.142, 10000·0.142=1420-0.4975, 4975-0.3234, 3234-371)

(β) Να καθορισθούν τα όρια του μήκους της περιφέρειας του λαιμού των ανδρών για κάθε μια από τις 4 κατηγορίες S, M, L, και XL, έτσι ώστε σε κάθε μια κατηγορία να αντιστοιχεί το 25% του πληθυσμού των ανδρών. ($P(X<\alpha)=0.5$ κλπ 15.2779-15.75-16.2221)