Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΞΕΡΕΙ ΓΙΑ ΤΙ ΜΙΛΑΕΙ

Ευάγγελος Γερονικόλας[1], Μιχάλης Μυτιληναίος[2]

> Αλλά στην πραγματικότητα, αν κανείς θεωρήσει τον μαθηματικό στην εργασία, μπορεί να πεί ότι εξακολουθεί να καθοδηγείται απ' αυτό το ιδεώδες της εξαντλητικής πληρότητας.
>
> Suzanne Bachelard

1. Εισαγωγή: το γενικό πλαίσιο τοποθέτησης της IF λογικής

1.1. Γενικά

Για τη φιλοσοφία τα *Θεμέλια της Γεωμετρίας* του Hilbert (1902) απετέλεσαν σταθμό διότι έδειξαν πως το οτιδήποτε διαισθητικό που μπορεί να χρειάζεται ένας μαθηματικός από την *καθαρή εποπτεία,* μπορεί να διατυπωθεί σαφώς σε αυστηρή μαθηματική γλώσσα. Αυτό που τόσο είχε απασχολήσει τους αναλυτικούς φιλόσοφους του 19^{ου} αιώνα, το πώς δηλαδή η γεωμετρία θα απελευθερωθεί από την αναφορά της στην Καντιανή εποπτεία, είχε επιτευχθεί. Υπήρχε βέβαια ένα τίμημα. Αποκομμένο από τη νοηματοδώτρα εποπτεία, ένα αξιωματικό σύστημα δεν φαίνεται να είναι παρά ένα σύστημα συντακτικά καλώς διατυπωμένων τύπων συμβόλων χωρίς κανένα νόημα. Πως τότε έχει νόημα να μιλάμε για σημεία, ευθείες και επίπεδα; Και αντίστοιχα για το αξιωματικό σύστημα Peano, πως αυτό μιλάει για τους αριθμούς που ξέρουμε;

Ως γνωστόν, για την επίλυση αυτού του προβλήματος ερμηνείας, στα πλαίσια του λογικισμού εστρατεύθη η συνολοθεωρία. Αυτή όμως με τη σειρά της βρέθηκε να κατατρύχεται από παράδοξα, κι' αν κάναμε κάτι να διορθώσουμε το ένα, σύντομα παρουσιαζόταν κάποιο άλλο. Φυσικά, ο απλούστερος τρόπος επίλυσης του προβλήματος θα ήταν να εγκαταλείψουμε τον λογικισμό και κάθε προσπάθεια σημασιολογίας, και να αρκεσθούμε θεμελιακά στον *συντακτισμό* και στους καθαρά μηχανικούς τρόπους μαθηματικής παραγωγής. Τελικά, κι' αυτή η συντακτική φορμαλιστική κατεύθυνση με τη σειρά της έπεσε θύμα του θεωρήματος της μη πληρότητας του Gödel. Έτσι φάνηκε σαν η φιλοσοφία να είχε παγιδευτεί από δύο διαφορετικές κατευθύνσεις, χωρίς εμφανή διέξοδο.

1.2. Περί αυτονομίας του μαθηματικού λόγου

Φυσικά, ούτε ο φορμαλιστής ούτε ο λογικιστής ισχυρίζονται ότι η μαθηματική πρακτική είναι μια μονοδιάστατη εμπειρία μηχανικής παραγωγής. Η ψυχολογική κατάσταση ενός μαθηματικού εν' ώρα εργασίας είναι μια εξαιρετικά πολύπλοκη υπόθεση. Χαρακτηρίζεται από την έντονη παρουσία της διαίσθησης και προχωρά τις περισσότερες φορές με λογικά άλματα. Για πολλούς (ίσως όλους), «…είναι πολύ κοντύτερα στην ψυχολογία του ποιητή, του μουσικοσυνθέτη ή του ζωγράφου που τον

[1]Ο Ε. ΓΕΡΟΝΙΚΟΛΑΣ είναι διδάκτωρ φιλοσοφίας του Πανεπιστημίου της Βοστώνης.
[2] Ο Μ. ΜΥΤΙΛΗΝΑΙΟΣ είναι Αναπληρωτής Καθηγητής στο Τμήμα. Πληροφορικής του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών.

απασχολεί η δημιουργία του Ωραίου, του Τέλειου, του Αρμονικού».[3] Ύστερα, τα μαθηματικά δεν ξεκινούν σαν *a priori* αξιωματικά συστήματα. Υπάρχουν πρώτα συγκεκριμένα προβλήματα, αναζητούνται πρακτικές λύσεις, υπάρχουν διαρκώς *πέρα δώθε*, εντοπίζονται ασυνέπειες, παράδοξα, κλπ. Τέλος, ο καθένας έχει την δική του προσωπική εμπειρία εκμάθησης των μαθηματικών. Καταλαβαίνουμε και μαθαίνουμε με τη βοήθεια του δασκάλου, και γι' αυτόν τον σκοπό η παιδαγωγική των μαθηματικών μπορεί να δανεισθεί το οτιδήποτε.

Όλα αυτά δείχνουν προς τη γενετική μιας *a posteriori* επιστήμης. Και πράγματι, πρόσφατα, πολλά έχουν γραφτεί και έχουν διαλευκάνει αυτή τη σημαντική διάσταση της μαθηματικής εμπειρίας. Ενδεικτικά μόνο υπενθυμίζουμε τα γνωστά ονόματα των Polya (1954) και Lakatos (1991), καθώς και πιο πρόσφατα αυτό του Gian Carlo Rota (1997).

Εν' τούτοις, και χωρίς βέβαια να αναιρείται τίποτα από τα παραπάνω, η μαθηματική αλήθεια διαφέρει από την αλήθεια της φυσικής και της χημείας. Τα μαθηματικά δεν είναι διαψεύσιμα. Όσο εφευρετικός σε έννοιες και καινούργιες τεχνικές να είναι ένας φυσικός, τα μαθηματικά του δεν ικανοποιούν ένα μαθηματικό. Χρειάζεται ακόμα και κάτι άλλο για να μπορούμε να μιλήσουμε για καθαρά μαθηματικά, κάποιες επιπρόσθετες *πράξεις ιδεατότητας* (ο όρος εδώ είναι του Husserl), οι οποίες αποβλέπουν σε μια μεταμόρφωση προς μια ορισμένη κατεύθυνση. Ο μαθηματικός αναζητά την *a priori* υπόσταση των μαθηματικών η οποία απουσιάζει όσο τα μαθηματικά παραμένουν ένα χρήσιμο εργαλείο. Αυτό δεν σημαίνει ότι θα πρέπει να ξεχάσουμε ή να αποσιωπήσουμε τις γενετικές ρίζες των μαθηματικών, το οποίο σήμερα άλλωστε έτσι κι' αλλιώς δεν συμβαίνει. Όμως, τελικά, τα καθαρά μαθηματικά απαρτίζουν τον δικό τους αυτόνομο χώρο αντικειμενικών ιδεατοτήτων. Χρειάζεται επιπρόσθετα να υπογραμμισθεί εδώ ότι ακόμα και αν δεχθούμε ότι αυτές οι πράξεις ιδεατότητας, τις όποιες προαναφέραμε, αποτελούν μια υπερβατολογική προϋπόθεση συγκρότησης των μαθηματικών αρχών, τελικά κι' αυτές δεν έχουν θέση στον καθαρό μαθηματικό λόγο. Ο καθαρός μαθηματικός λόγος έχει κερδίσει πλήρως την αυτονομία του και θα πρέπει να δείχνει ο ίδιος τα θεμέλιά του.

Για να συνοψίσουμε: τα μαθηματικά δεν γεννιόνται *ex nihilo*. Ούτε και κανείς βλέπει μια κι' έξω τις Πλατωνικές ιδέες. Ακόμα και σε εξαιρετικές περιπτώσεις, όπως αυτή του Ινδού μαθηματικού Ramanujan, τα αποτελέσματα της «Πλατωνικής εποπτείας» του έπρεπε ακόμα να βρουν

τη θέση τους μέσα σε κάποιο μαθηματικό σύστημα, μέσα σε ένα ολοκληρωμένο μαθηματικό λόγο.

1.3. Η λογική μέσα απ' τις ανάγκες των μαθηματικών

Τελικά η αυτονομία του μαθηματικού λόγου, δηλαδή η καθαρότητά του δεν μπορεί να είναι παρά ζήτημα τυπικής γλώσσας και λογικής. Αν και σ' αυτό μπορεί να συμφωνούν οι περισσότεροι, η επόμενη ερώτηση εξακολουθεί να παραμένει και είναι πιο προβληματική. Επαρκεί η δεδομένη κατηγορηματική λογική (Frege –Russell) φιλοσοφικά; Για πολλούς φιλόσοφους, όπως λ.χ. για τον Quine, ακριβώς επειδή αυτή η λογική είναι πλήρης θεωρείται αδιαπραγμάτευτη. Αλλά τότε για τις εκφραστικές απαιτήσεις των μαθηματικών χρειαζόμαστε τη συνολοθεωρία οπότε συν το θεώρημα

[3] Υπάρχουν πρακτικά άπειρες αναφορές με το ίδιο νόημα. Για το συγκεκριμένο απόσπασμα βλ. ΔΟΞΙΑΔΗ, «Ο Θείος Πέτρος και η Εικασία του Goldbach», (1993). Θα έχουμε περισσότερα να πούμε για τον 'μαθηματικό θείο Πέτρο' παρακάτω.

της μη πληρότητας του Gödel, και το αρνητικό αποτέλεσμα του Tarski, είναι δύσκολο να καταλάβουμε πως θα μπορούσαμε αυστηρά να στηρίξουμε τον *a priori* χαρακτήρα των μαθηματικών. Ίσως γι' αυτό και ο Keith Devlin οδηγείται να κάνει την περίεργη παρατήρηση ότι δεν μπορούμε να ελέγξουμε την αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης για μεγάλους αριθμούς, για να προσθέσει τελικά: «σίγουρα δεν υπάρχει λογική βάση γι' αυτή τη πράξη πίστης» (1994). Φυσικά διερωτάται κανείς για το πώς εννοεί ο Devlin αυτόν τον έλεγχο της αντιμεταθετικής ιδιότητας της πρόσθεσης και τι ακριβώς περιμένει ότι έτσι θα μπορούσε να διαψεύσει.

Για τον Hintikka οι προτεραιότητες δεν ιεραρχούνται όπως στον Quine. Περισσότερο και από την πληρότητα της λογικής βαραίνει η διαπίστωση ότι η σύνταξη της γνωστής κατηγορηματικής λογικής Frege-Russell περιορίζει τις εκφραστικές δυνατότητες των μαθηματικών. Αυτός δε ο περιορισμός είναι κυρίως ο λόγος για τον οποίο αναγκαζόμαστε να καταφύγουμε στη συνολοθεωρία. Εκεί βρίσκουμε τις επί πλέον εκφραστικές δυνατότητες που λείπουν από τη λογική.

Όπως θα δούμε παρακάτω, η προσέγγιση του Hintikka μας υποχρεώνει να επανεξετάσουμε τη σημασία της λογικής. Λογική και μαθηματικά διαφέρουν. Ενώ στα μαθηματικά ο κάθε κλάδος έχει το δικό του μοντελοθεωρητικό αντικείμενο μελέτης, στη λογική τα αξιώματα δεν μιλούν για κάτι. Για τον θεμελιακό της ρόλο η λογική θα πρέπει να ξεπηδά μέσα από την ίδια την πρακτική των μαθηματικών. Άλλωστε, για τους μαθηματικούς η λογική είναι πρώτιστα εργαλείο (το χρησιμοποιούσαν επιτυχώς και πολύ πριν τυποποιηθεί η πρωτοβάθμια λογική), και σαν κάθε εργαλείο θα πρέπει να είναι κατασκευασμένο σύμφωνα με τις απαιτήσεις της δουλειάς για την οποία είναι προορισμένο.

Τελικά ο Hintikka προτείνει μια νέα λογική. Την ονομάζει *λογική φιλική της ανεξαρτησίας* (independence friendly logic), ή IF λογική για συντομία, και αυτήν θεωρεί σαν πιο κατάλληλο θεμελιακό εργαλείο για τα μαθηματικά. Ότι αποδεικνύεται στην λογική Frege-Russell αποδεικνύεται και στην IF λογική. Η τελευταία έχει περισσότερες εκφραστικές δυνατότητες, δεν είναι όμως αξιωματικοποιήσιμη, και άρα αυτόματα δεν είναι πλήρης. Από αυτό έπεται αμέσως η μη πληρότητα των μαθηματικών. Στο πλαίσιο λοιπόν της IF λογικής το βάρος της μη πληρότητας μετατοπίζεται από τα μαθηματικά στη λογική. Γύρω από αυτό το σημείο στρέφεται όλη η φιλοσοφία των μαθηματικών του Hintikka.

Είναι μέσα σ' αυτά τα πλαίσια που εξετάζουμε την *καθοδηγητική επίδραση* του ιδεώδους της πληρότητας για το οποίο μιλάει η Suzanne Bachelard, στο απόσπασμα που επιλέξαμε στην αρχή αυτής της εργασίας.

2. Ο φιλοσοφικός στόχος του θεωρήματος του Gödel

2.1. Η απάθεια των μαθηματικών

Ακούγεται πράγματι πολύ σοβαρό να λέγεται ότι τα μαθηματικά δεν είναι πλήρη. Διότι μέσα στα όρια ενός ιδεώδους γνώσης, αυτό που λέγεται αρνητικά για τα μαθηματικά αφορά και την επιστήμη εν γένει.

Στην ενδιαφέρουσα νουβέλα του Απόστολου Δοξιάδη *Ο Θείος Πέτρος και η Εικασία του Goldbach*, ο χαρισματικός μαθηματικός Πέτρος Παπαχρήστου, όταν μια μέρα μαθαίνει από τον Alan Turing για το θεώρημα της μη πληρότητας του Gödel, μετά το πρώτο σοκ, αρχίζει σταδιακά να αδιαφορεί για το μεγάλο πρόβλημα στο οποίο είχε τάξει τη ζωή του, δηλαδή στην απόδειξη της εικασίας του Goldbach. Πολύ λίγο τον επηρέασε η απάθεια των Littlewood και Hardy. Για τους τελευταίους, η σημασία του θεωρήματος ήταν μάλλον πολύ περιορισμένη. Αφορούσε κάποια εσωτερικά προβλήματα της μαθηματικής λογικής, και ήταν σαν να μίλαγε για πράγματα που πολύ λίγο ενδιαφέρουν τον μάχιμο μαθηματικό.

Ο Πέτρος Παπαχρήστου είναι πρόσωπο φανταστικό. Αλλά οι Littlewood και Hardy είναι γνωστοί μαθηματικοί, και η στάση που αποδίδεται σ' αυτούς, όσο μπορούμε να ξέρουμε, είναι η πραγματική στάση των μαθηματικών. Τελικά, ο ήρωας της νουβέλας γύρω από τον οποίο δραματοποιείται η σημασία του θεωρήματος του Gödel είναι φανταστικός όχι μόνο σαν πρόσωπο αλλά και σαν μαθηματικός. Δυστυχώς η αρνητική σημασία του θεωρήματος του Gödel δεν δραματοποιείται μόνο σε νουβέλες. Σαν δείγμα αυτής της γενικότερης τάσης μπορούμε να πάρουμε το παρακάτω απόσπασμα, όπου διαβάζουμε:

> Ο Gödel απέδειξε ότι οι μαθηματικοί μέθοδοι που χρησιμοποιούνται ήδη από την εποχή του Ευκλείδη δεν επαρκούν για να ανακαλυφθεί ότι είναι αληθές γύρω από τους φυσικούς αριθμούς. Η ανακάλυψη που υπέσκαψε τα θεμέλια πάνω στα οποία έχει χτισθεί όλο το οικοδόμημα των μαθηματικών έως τον εικοστό αιώνα απετέλεσε το ερέθισμα να αναζητηθούν εναλλακτικές λύσεις … (Dawson, 1999)

Αλλά ποιες είναι οι μέθοδοι εκείνες που από τον καιρό του Ευκλείδη χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί για να βρούνε την αλήθεια; Και ύστερα, πως έδειξε ο Gödel ότι αυτές οι μέθοδοι δεν επαρκούν; Τέλος, ποια είναι τα θεμέλια που υπέσκαψε το θεώρημα του Gödel, και τι είδους ζημιά έκανε;

> Για να δώσουμε έστω και μια πρώτη απάντηση σ' αυτές τις ερωτήσεις θυμόμαστε ότι το θεώρημα προϋποθέτει πλήρως αξιωματικά μαθηματικά καθώς επίσης και αξιωματική λογική. Εν τούτοις, α) μέχρι το 1889 η αριθμητική δεν είχε αξιωματικοποιηθεί. β) Μέχρι το 1899 ούτε η Ευκλείδεια γεωμετρία είχε πλήρως αξιωματικοποιηθεί, και γ) μέχρι τους Frege και Russell δεν υπήρχε καν επαρκής λογική των μαθηματικών. (Ακόμη και μέσα στα *Θεμέλια της Γεωμετρίας* του Hilbert δεν υπάρχει ούτε ένα λογικό σύμβολο.) Κατά συνέπεια δεν υπάρχουν οι προϋποθέσεις για να δραματοποιήσουμε το θεώρημα του Gödel όπως παραπάνω.

Αλλά και ο ίδιος ο Dawson μερικές σελίδες πιο κάτω αναγνωρίζει ότι

Ο Gödel δεν θεώρησε ότι τα θεωρήματα του περί μη πληρότητας αποδεικνύουν την ανεπάρκεια της αξιωματικής μεθόδου, αλλά ότι η εξαγωγή των θεωρημάτων δεν μπορεί να γίνει τελείως μηχανικά. Είχε την άποψη ότι τα θεωρήματά του δικαιώνουν τον ρόλο της ενόρασης στα μαθηματικά. (ο.π., σ. 99)

Να λοιπόν ο στόχος του θεωρήματος του Gödel (τουλάχιστον κατά τον ίδιο τον Gödel): φιλοσοφικά το θεώρημα στρέφεται κατά *της μηχανιστικής θεμελίωσης των μαθηματικών* και παράλληλα ωθεί προς μια Πλατωνική κατεύθυνση. Αλλά αν τα πράγματα έχουν έτσι (και ο Πλατωνισμός του Gödel είναι πράγματι γνωστός), τότε τελικά το θεώρημα μπορεί να στηρίζει πολύ πιο παραδοσιακές αντιλήψεις περί μαθηματικών απ' ότι συνήθως λέγεται ή υπονοείται.

Αν ο φιλοσοφικός στόχος του θεωρήματος του Gödel είναι *η μηχανιστική θεμελίωση των μαθηματικών*, τότε γιατί αυτό το θεώρημα θεωρήθηκε τόσο αρνητικά σημαντικό; Ήθελε μήπως ποτέ κανένας να γίνει μαθηματικός για να εφαρμόζει αυστηρούς συντακτικούς κανόνες στα τυφλά; Ή ισχυρίζεται κανείς ότι ξέρει γεωμετρία απλώς και μόνο επειδή έμαθε τα αξιώματα της; Όταν λέμε ότι ξέρουμε μαθηματικά αυτό που εννοούμε είναι ότι ξέρουμε κάποια βασικά θεωρήματα των μαθηματικών. Αυτή η επιλογή των θεωρημάτων μέσα από το σύνολο των αληθών προτάσεων μιας μαθηματικής θεωρίας δείχνει καθαρά την ύπαρξη μιας μη μηχανιστικής λειτουργίας αξιολόγησης η οποία δεν είναι άσχετη με την μαθηματική πρακτική και εμπειρία. Τελικά, η μαθηματική γνώση μας συνίσταται κυρίως στην αφομοίωση εκείνων ακριβώς των επιλεγμένων προτάσεων των οποίων ο θεωρηματικός χαρακτήρας μας παρέχει την εποπτική σύλληψη κάποιας 'σημαντικής πλευράς' του μαθηματικού χώρου, είτε εκεί βρίσκονται φυσικοί αριθμοί, είτε σημεία, ευθείες και επίπεδα, είτε συναρτήσεις, είτε οτιδήποτε άλλο. Έτσι, ενώ μπορούμε να φαντασθούμε κάποιον που να 'ξέρει' γεωμετρία χωρίς να θυμάται τα αξιώματα της, είναι αδύνατο να φαντασθούμε αυτόν τον ίδιο χωρίς να θυμάται λ.χ., το θεώρημα του Πυθαγόρα, ή το θεώρημα του Θαλή, ή ότι ένας κύκλος και μία ευθεία δεν μπορούν να έχουν παραπάνω από δύο κοινά σημεία.

Όποιο μαθηματικό βιβλίο και ν' ανοίξουμε, πουθενά δεν βλέπουμε ένα κατάλογο από αληθείς προτάσεις σαν συντακτικές συνέπειες των αξιωμάτων. Αντίθετα, διαρκώς υπάρχουν και νέες έννοιες γύρω από τις οποίες αρθρώνονται νέα θεωρήματα. Χωρίς αυτές τις έννοιες, η αντίληψη μας για το ουσιαστικό περιεχόμενο των αξιωμάτων είναι ελλιπής, αν όχι ανύπαρκτη. Βλέπουμε παντού τον περιγραφικό χαρακτήρα των μαθηματικών να συνοδεύει τον παραγωγικό. Περίπου δηλαδή όπως θα συνέβαινε αν θέλαμε να περιγράψουμε κάποιο νέου τύπου συμβάν για το οποίο θα έπρεπε πρώτα να βρούμε τις νέες κατάλληλες λέξεις περιγραφής πριν είναι δυνατόν να βγάλουμε τα οποιαδήποτε συμπεράσματα.

Ένας μαθηματικός δεν κάνει έγκυρες αλλά άσκοπες λογικές πράξεις. Δεν παίρνει λ.χ. δύο τυχούσες αληθείς προτάσεις Α και Β και συνεχίζει για να συμπληρώσει με άλλες αληθείς προτάσεις όπως $(\mathrm{A} \to \mathrm{B})$, $(A \to \mathrm{B} \vee \Gamma)$, ή $(\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{B}) \to (\Gamma \to (A \,\&\, \mathrm{B}))$ για μια τυχούσα πρόταση Γ. Ούτε παίρνει μια οποιαδήποτε ψευδή πρόταση Δ για να γράψει την αληθή πρόταση $(\Delta \to \mathrm{B})$, και φυσικά δεν συνεχίζει καταγράφοντας τις λογικές συνέπειες όλων των παραπάνω. Για την λειτουργία του μαθηματικού ο Hintikka αναφέρει συχνά μια ιστορία. Κάποτε κάποιος ρώτησε τον Hilbert για κάποιο παλιό μαθητή του: 'ο κακομοίρης, απάντησε ο Hilbert, δεν είχε αρκετή φαντασία για μαθηματικός και έγινε μυθιστοριογράφος![4]

2.2. Η μηχανιστική φιλοσοφία των μαθηματικών

Τα παραπάνω δείχνουν πως αν η σημασία του θεωρήματος του Gödel υπερεκτιμάται, και μάλιστα προς τη λάθος κατεύθυνση, αυτό συμβαίνει επειδή ακόμα και σήμερα με τον ένα ή τον άλλο τρόπο παίρνουμε σαν δεδομένο ότι τα θεμέλια της επιστήμης θα πρέπει να ταυτίζονται με κάποιου είδους μηχανιστικές διεργασίες. Θεωρείται σαν αυτονόητο ότι αν υπάρχει αυστηρή επιστημονική 'κατανόηση' τότε αυτή θα πρέπει να μπορεί να προγραμματισθεί σ' ένα ηλεκτρονικό υπολογιστή. Γιατί διαφορετικά αντί για φιλοσοφικά θεμέλια της επιστήμης μιλάμε για ψυχολογία.

Γι' αυτό το τελευταίο συμπέρασμα, σημαντικό ρόλο παίζει ο διαχωρισμός *πλαίσιο ανακάλυψης- πλαίσιο δικαιολόγησης* (context of discovery- context of justification), ο οποίος μας έρχεται από τον Frege. Με βάση αυτόν το διαχωρισμό η επιστημο-νική εμπειρία εξοστρακίζεται. Την κατατάσσουμε στα πλαίσια ανακάλυψης και έτσι έχουμε το 'φιλοσοφικό δικαίωμα' να την αγνοήσουμε. Αλλά αν αγνοήσουμε την μαθηματική εμπειρία, τότε περί τίνος θα μιλήσει η φιλοσοφία των μαθηματικών;[5]

---

[4] Σύμφωνα με τον Hintikka, ο Hilbert δεν μπορεί να θεωρηθεί σαν καθαρός μαθηματικός φορμαλιστής. Τους λόγους θα τους παρουσιάσουμε παρακάτω. Για τον Hilbert είναι η λογική αυτή που δεν λέει τίποτα. Άρα ο Hilbert είναι *λογικός* (και όχι μαθηματικός) *φορμαλιστής*. (1998).

[5] Φυσικά εδώ δεν απορρίπτουμε τον διαχωρισμό *πλαίσιο ανακάλυψης-πλαίσιο δικαιολόγησης*. Είναι χρησιμότατος. Ούτε αρνούμεθα την λειτουργία της ψυχολογίας σ' ένα σημαντικό επίπεδο μέσα στα

Συνήθως το πρόγραμμα του Hilbert εκλαμβάνεται σαν το κυρίως θύμα του θεωρήματος της μη πληρότητας. Αλλά ενώ τουλάχιστον συμπερασματικά αυτή η θέση είναι σωστή, υπάρχουν διάφορα ουσιώδη που παραβλέπονται. Κατ' αρχάς, το φιλοσοφικό πρόγραμμα του Hilbert προϋποθέτει την αξιωματική λογική Frege-Russell, η οποία φυσικά είναι στενά συνδεδεμένη με το πρόγραμμα του λογικισμού. Η αξιωματικο-ποίηση της λογικής έχει ισχυρές φιλοσοφικές ρίζες και δεν είναι άμεση απαίτηση της ίδιας της μαθηματικής εμπειρίας. Ακόμα και στα *Θεμέλια της Γεωμετρίας* του Hilbert (έργο το οποίο θεωρείται καθ' όλα μοντέρνο), δεν θα βρούμε ούτε ένα λογικό σύμβολο. Αρκούν όμως, όπως παρατηρεί ο Hintikka, μόνο 15 λεπτά για να ξαναγράψουμε τα αξιώματα σε πρωτο-βάθμια γλώσσα. Από εκεί και πέρα η επαναδιατύπωση των αποδείξεων σύμφωνα με τις απαιτήσεις της αξιωματικής λογικής είναι κάτι το λίγο πολύ άμεσο.

Ο λογικισμός, και σε αντιδιαστολή με το φορμαλισμό, ευθύς εξ' αρχής ξεκίνησε σαν μια φιλοσοφία όπου το νόημα των μαθηματικών αναζητάται πίσω από την ίδια την τυπική πρακτική των μαθηματικών. Αυτός ακριβώς δε είναι ο λόγος για τον οποίο ο διαχωρισμός *πλαίσιο ανακάλυψης - πλαίσιο δικαιολόγησης* πρωτοεφευρίσκεται μέσα στα πλαίσια του λογικισμού. Για διάφορους λόγους, που δεν είναι και τόσο σημαντικό να υπεισέλθουμε, βγαίνει το συμπέρασμα ότι ο ίδιος ο μαθηματικός σαν μαθηματικός δεν ξέρει αυστηρά τι σημαίνουν οι βασικές έννοιες που χρησιμοποιεί, τι σημαίνει λ.χ. 'αριθμός'.[6] Αυτό πρόκειται να το μάθει από την αναγωγή της αριθμητικής στη λογική. Κατά την αυστηρή άποψη του λογικιστή, τα μαθηματικά στο βαθμό που περιορίζονται στην ίδια την τυπική μαθηματική εμπειρία, δεν είναι παρά σύμβολα χωρίς νόημα. Αν ο λογικιστής κατηγορεί λίγο πολύ γι' αυτές ακριβώς τις θέσεις τον φορμαλιστή, αυτό γίνεται γιατί ο τελευταίος αρνείται να τον ακολουθήσει στο φιλοσοφικό ερμηνευτικό βήμα προς το νόημα των μαθηματικών πίσω από τα μαθηματικά.[7]

Χρειάζεται όμως να πούμε δυο λόγια παραπάνω. Η αναγωγή των μαθηματικών στη λογική είχε, ως γνωστόν, σαν στόχο της να ελευθερώσει τα μαθηματικά από την ανάγκη μιας Καντιανού τύπου εποπτείας. Αλλά αναγωγή στη λογική δεν ισοδυναμεί με φιλοσοφική ουδετερότητα, όπως ίσως το όνομα υπονοεί. Οι Frege και Russell ήταν και οι δύο Πλατωνιστές, κι' ο δεύτερος πιο ακραίος από τον πρώτο. Μέχρι το 1905, (όπως αυτό φαίνεται και από το 'Οι Αρχές των Μαθηματικών' του 1903), για τον νεαρό τότε Russell, ακόμα και οι *τετράγωνοι κύκλοι* θα έπρεπε κάπως να υπάρχουν. Γιατί αν δεν υπήρχαν κάπως, τότε δεν θα είχε καν νόημα να λέμε ότι 'τετράγωνοι κύκλοι δεν υπάρχουν'. Παρόμοια και για τις λογικές σταθερές: τη σύζευξη, τη διάζευξη κτλ. Θα έπρεπε κι' αυτές να αναφέρονται σε κάποια αντίστοιχα Πλατωνικά αντικείμενα. Εδώ η μαθηματική αλήθεια γίνεται αντιληπτή σαν μια κατ' ευθείαν σχέση μεταξύ γλώσσας και πραγματικότητας (πιο συγκεκριμένα, Πλατωνικής πραγματικότητας), με τρόπο ξεκάθαρα ρεαλιστικό. Η φιλοσοφία του λογικισμού ωριμάζει έξω από μοντελο-θεωρητικές αντιλήψεις για τη γλώσσα των μαθηματικών.[8]

πλαίσια ανακάλυψης. Μιλάμε απλώς για την κακή χρήση αυτού του διαχωρισμού, έτσι που τελικά να αφήνει την φιλοσοφία χωρίς γνήσιο αντικείμενο. Δεν δεχόμαστε ότι οι συζητήσεις γύρω από ιδεατούς γνώστες οι οποίοι με τον ένα ή τον άλλο τρόπο είναι παντογνώστες συνιστά γνήσιο αντικείμενο της φιλοσοφίας.

[6] Βλέπε λ.χ. Russell (1919).

[7] Βλέπε Russell, πρόλογος β΄έκδ. (1937) *The Principles of Mathematics*.

[8] Αξίζει εδώ να σημειωθεί η μεγάλη διαφορά που χωρίζει τις σημασιολογικές θέσεις του Boole από αυτές του Russell. Στο 'Αναζητήσεις των νόμων της σκέψης' (1854), η άλγεβρα είναι το τυπικό σύστημα το οποίο ο Boole επανερμηνεύει με διάφορες φαινομενολογικού τύπου παρατηρήσεις για να

Αυτή η γνωσιολογική στάση έχει και γνωσιολογικές συνέπειες. Αν η αλήθεια αναφέρεται σ' ένα Πλατωνικό κόσμο Ιδεών, αυτό από μόνο του καθόλου δεν μας κατοχυρώνει γνωσιολογικά. Το να υποθέσουμε λ.χ. ότι το αξίωμα των παραλλήλων αναφέρεται σημασιολογικά στον κόσμο των Ιδεών, εγείρει το πρόβλημα της γνώσης της αλήθειας του (ακόμα οξύτερα και από την γνώση ύπαρξης πολλών γεωμετριών). Εκεί που από μοντελοθεωρητικής πλευράς δεν τίθεται πρόβλημα καν, για το λογικισμό χρειάζονται δραστικές λύσεις. Εδώ ακριβώς έρχεται το φορμαλιστικό μέρος του λογικισμού να δώσει λύσεις, τουλάχιστον όσον αφορά την πρακτική των μαθηματικών. Πράγματι, ήδη από το 1901 ο Russell έγραφε:

> Τα καθαρά μαθηματικά αποτελούνται εξ΄ ολοκλήρου από διαβεβαιώσεις του τύπου, αν μια έτσι κι΄ έτσι πρόταση είναι αληθής για οτιδήποτε, τότε μια έτσι κι΄ έτσι διαφορετική πρόταση είναι αληθής για 'κείνο το πράγμα'. Είναι ουσιώδες το να μην συζητάμε για το εάν η πρώτη πρόταση είναι πράγματι αληθής, και να μην αναφέρουμε τι είναι το *οτιδήποτε* που υποτίθεται ως αληθές.… Εάν η υπόθεσή μας είναι για το *οτιδήποτε* και όχι για κάποιο ή για πιο συγκεκριμένα πράγματα, τότε οι παραγωγές μας συγκροτούν μαθηματικά. Άρα τα μαθηματικά μπορούν να ορισθούν σαν το αντικείμενο στο οποίο ποτέ δεν ξέρουμε για το τι μιλάμε, ούτε για το αν αυτό που λέμε είναι αληθές.[9]

Έστω Α η σύζευξη των προτάσεων που αποδεικνύουν την πρόταση Β. Δεν μπορούμε να ξέρουμε αν η πρόταση Α είναι αληθής (ή το πώς είναι αληθής), πριν λύσουμε το πρόβλημα της λογικής αναγωγής των εννοιών που υπεισέρχονται στην Α. Μ' αυτή τη λογική αναγωγή ο μαθηματικός, ή ίσως ακριβέστερα, ο φιλόσοφος των μαθηματικών, κάνει ένα βήμα πίσω από τα μαθηματικά για να μπορεί να ξέρει για τι μιλάει. Αλλιώς η σημασία που δίνουν οι μαθηματικοί στα μαθηματικά παραμένει σε προσωπικό επίπεδο, ή στο επίπεδο της ψυχολογίας, και δεν αφορά την αυστηρή 'επιστήμη' της φιλοσοφίας.[10]

Σαν συνέπεια έρχεται η ταύτιση λογικής και μαθηματικών. Έστω ότι ένας μαθηματικός ξέρει την αλήθεια της πρότασης $(A \to B)$. Αλλά αφού δεν ξέρει το νόημα της Α, δεν μπορεί φυσικά να ξέρει αν αυτή είναι αληθής, και άρα η αλήθεια της $(A \to B)$ του είναι γνωστή όπως και η κάθε λογική αλήθεια, λ.χ. η $a \to (b \to a)$ η οποία σύμφωνα με την τρέχουσα ορολογία λέγεται *αληθοσυναρτησιακή ταυτολογία*. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο ο Russell ταυτίζει λογική και μαθηματικά. Και όπως οι λογικά αληθείς προτάσεις, δεν παρέχουν καμία πληροφορία για τον κόσμο, το ίδιο ακριβώς ισχύει και τα μαθηματικά.

της δώσει σημασία λογικής. Εφ' όσον πρόκειται για αληθοτιμές θα πρέπει να ισχύει $x^2 = x$, με ρίζες 0 και 1. Βλέπουμε εδώ το πόσο πολύ για τον Boole η λογική είναι αλληλένδυτη με τα μαθηματικά.

Γι' αυτό το βιβλίο ο Russell σχολιάζει: «[Ο Boole] έκανε λάθος να υποθέσει ότι το αντικείμενο του ήταν οι νόμοι της σκέψης: η ερώτηση για το πώς οι άνθρωποι σκέφτονται του ήταν εντελώς αδιάφορη … Στην πραγματικότητα το αντικείμενο του βιβλίου είναι η τυπική λογική και αυτό είναι το ίδιο πράγμα με τα μαθηματικά». (1901).
Φυσικά και ήταν αδιάφορο για τον Boole το πώς οι άνθρωποι τυχαίνει να σκέπτονται (όταν λχ είναι εκνευρισμένοι, ή υπό την επήρεια ναρκωτικών, ή οτιδήποτε άλλο). Αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι στόχος του Boole δεν ήταν η τυπική μορφή της σκέψης όπως αυτή παρουσιάζεται συμβολικά σαν λογισμός, και άρα μπορεί να αντλεί έτσι την αντικειμενικότητά της μέσα από τους κανόνες λογισμού των συμβόλων.

[9] Ο.π. (1901) σ. 366

[10] Αξίζει να σημειωθεί ότι στον πρόλογο της δεύτερης έκδοσης του 'Οι Αρχές των Μαθηματικών' (1937), ο Russell κατηγορεί με σχεδόν τα ίδια λόγια που παραθέσαμε το πρόγραμμα του Hilbert. Το νόημα αυτής της κατηγορίας δεν μπορεί να είναι άλλο από το ότι ο Hilbert δεν ανεζήτησε το φιλοσοφικό νόημα των μαθηματικών πίσω από τα μαθηματικά. Και πράγματι, σύμφωνα με τον Hilbert θα μπορούσαν ακόμα και ποτήρια τραπέζια και καρέκλες να θεωρηθούν σαν σημεία, ευθείες και επίπεδα αν αυτά ικανοποιούν τα αξιώματα της γεωμετρίας.

2.3. Προτάσεις Gödel

Αν μιλήσαμε παραπάνω κάπως εκτενώς για τον λογικισμό, αυτό το κάναμε γιατί πιστεύουμε ότι η μηχανιστική φιλοσοφία των μαθηματικών δεν απλώνει τις ρίζες της μόνο στον φορμαλισμό. Παίζει σημαντικό ρόλο και μέσα στη φιλοσοφία του λογικισμού, και αυτό της δίνει ακόμα μεγαλύτερη εγκυρότητα. Τόσο, που για πολλούς τελικά η φιλοσοφία να ταυτίζεται με την συντακτική-μηχανιστική προσέγγιση.

Έχοντας με τα παραπάνω κερδίσει μια κριτική στάση απέναντι στη μηχανιστική-συντακτική φιλοσοφία, χρειάζεται να έχουμε μια πιο συγκεκριμένη φιλοσοφική εικόνα για το τι απέδειξε ο Gödel. Να δούμε δηλαδή γιατί ο ίδιος ο Gödel θεώρησε πως το θεώρημά του στρέφεται κυρίως κατά της μηχανιστικής θεμελίωσης των μαθηματικών. Νομίζουμε πως για τους σκοπούς αυτής της εργασίας ο τρόπος παρουσίασης του θεωρήματος από τον John Findlay (1941), αν όχι πρωτότυπος, είναι φιλοσοφικά τουλάχιστον ο πιο κατάλληλος. Ο Findlay δεν χρησιμοποιεί ο ίδιος αριθμούς, νομίζουμε όμως ότι έστω και η μη τεχνική αναφορά στην αρίθμηση Gödel βοηθάει, και κάνει την παρουσίαση κατά πολύ κομψότερη.

Ας ξεκινήσουμε με μια πρόταση η οποία εκφράζει μια αριθμητική ιδιότητα, λ.χ.,

ο x είναι άρτιος (π)

Αυτή η πρόταση μπορεί να εκφρασθεί αυστηρά στην πρωτοβάθμια αριθμητική Peano, όπως και όλες οι άλλες προτάσεις που θα αναφέρουμε παρακάτω, αλλά εδώ θα παραμείνουμε όσο το δυνατόν κοντύτερα στη φυσική μας γλώσσα.

Θεωρούμε εν συνεχεία ένα λεξικό όπου βρίσκονται σύμφωνα με κάποιο κωδικό σύστημα απαριθμημένοι όλοι οι συντακτικά καλώς διατυπωμένοι τύποι της γλώσσας της αριθμητικής Peano (όχι μόνο οι αληθείς). Άρα, κάπου μέσα σ' αυτό το λεξικό βρίσκεται η παραπάνω πρόταση (π) με κάποιο κωδικό 'π'. Λέμε ότι 'π' είναι ο αριθμός Gödel της (π).

Τώρα, αν στη θέση της μεταβλητής x αντικαταστήσουμε τον αριθμό 'π', παίρνουμε την πρόταση

ο 'π' είναι άρτιος (τ)

Αυτή η πράξη αντικατάστασης της μεταβλητής μιας πρότασης από τον κωδικό της ίδιας της πρότασης μπορεί να εκφρασθεί στην ίδια τη γλώσσα της αριθμητικής. Δηλαδή, η πρόταση

αντ ('π', *μτβλ* 'π', 'π') (φ)

η οποία λέει να αντικαταστήσουμε στον τύπο με κωδικό 'π' τη μεταβλητή αυτού του τύπου δια του αριθμού 'π', είναι τύπος καλώς διατυπωμένος, και βρίσκεται μέσα στο λεξικό με κωδικό 'φ'. Παρατηρούμε δε ότι στην πρόταση (φ), τον ρόλο της μεταβλητής παίζει πλέον ο αριθμός 'π', εφ' όσον η (π) είναι μια τυχαίος ανοικτός τύπος και την πράξη της αντικατάστασης *αντ(-)* μπορούμε να την εφαρμόσουμε σε οποιοδήποτε ανοιχτό τύπο της αριθμητικής.

Τώρα, αν η λογική είναι αξιωματική, υπάρχει τρόπος να κωδικοποιή-σουμε κάθε αποδεικτική αλυσίδα συμβόλων. Κάθε τέτοια, θεωρούμενη σαν μια έκφραση της γλώσσας της αριθμητικής, βρίσκεται και αυτή στο λεξικό με κάποιο κωδικό. Το σημαντικό εδώ είναι ότι η γνώριμή μας έννοια της *απόδειξης* εκφράζεται αυστηρά στη γλώσσα την αριθμητικής, και το ίδιο ισχύει και για την έννοια της *μη-αποδειξιμότητας*. Αξίζει βέβαια να επαναλάβουμε ότι αυτό είναι δυνατό μόνο στη περίπτωση που η λογική είναι αξιωματική. Ώστε, η πρόταση

δεν αποδ αντ (‘π’, *μτβλ* ‘π’, ‘π’*)* (σ)

βρίσκεται μέσα στο λεξικό με κωδικό ‘σ’ και μεταβλητή το ‘π’. Αν όπου ‘π’ αντικαταστήσουμε με ‘σ’, παίρνουμε την πρόταση

δεν αποδ αντ (‘σ’*, μτβλ* ‘σ’ ‘σ’) (g)

με κωδικό ‘g’. Αυτό που η (g) λέει είναι ότι η πρόταση

αντ (‘σ’*, μτβλ* ‘σ’ ‘σ’)

δεν αποδεικνύεται. Ας δούμε ποια είναι η πρόταση αυτή. Σύμφωνα με την κατασκευαστική εντολή που έχουμε, πρέπει να αντικαταστήσουμε στην μεταβλητή της πρότασης που αντιστοιχεί στον κωδικό ‘σ’ τον αριθμό ‘σ’. Η πρόταση που αντιστοιχεί στον ‘σ’ είναι η (σ), της οποίας η μεταβλητή είναι ο ‘π’. Αντικαθιστούμε λοιπόν στην (σ) το ‘π’ με το ‘σ’, οπότε βρίσκουμε την πρόταση

δεν αποδ αντ (‘σ’*, μτβλ* ‘σ’ ‘σ’)

η οποία δεν είναι άλλη από την πρόταση (g), με τον κωδικό ‘g’. Η πρόταση λοιπόν με κωδικό ‘g’ λέει ότι

δεν αποδ ‘g’ (g)

δηλαδή ότι δεν αποδεικνύεται η ίδια.

Τώρα, σύμφωνα με τη σημασιολογική θεώρηση της πρωτοβάθμιας λογικής, οι προτάσεις οι οποίες διατυπώνονται σ’ αυτή τη γλώσσα θα πρέπει να είναι αληθείς ή ψευδείς, *tertium non datur*. Αν η ‘g’ είναι αληθής, τότε όπως η ίδια εκ κατασκευής λέει δεν αποδεικνύεται και άρα το συμπερασματικό μας σύστημα, (η αξιωματική λογική Frege-Russell μαζί με την πρωτοβάθμια γλώσσα Peano) δεν είναι πλήρες. Αν η (g) είναι ψευδής, σημαίνει ότι αποδεικνύεται, οπότε το συμπερασματικό σύστημα δεν είναι συνεπές.

Αυτό είναι το θεώρημα της μη πληρότητας του Gödel, διατυπωμένο με τρόπο που νομίζουμε πιο κατάλληλο για τη φιλοσοφική εκτίμηση αυτού του θεωρήματος. Πόσο λοιπόν τραγική είναι η κατάσταση για τα θεμέλια των μαθηματικών;

2.4. Προτάσεις Gödel και το ιδεώδες της γνώσης

Σ’ αυτή την παράγραφο αναζητούμε μια πρώτη φιλοσοφική αίσθηση της απόδειξης που παρουσιάσαμε. Είδαμε πως για την κατασκευή των προτάσεων Gödel οι αριθμοί παίζουν διπλό ρόλο. Άλλοτε χρησιμοποιούνται κανονικά σαν αριθμοί, και άλλοτε σαν ονόματα προτάσεων. Το θεώρημα της μη πληρότητας είναι άμεση συνέπεια αυτής της δυνατότητας ενός ταυτόχρονα διπλού και ασύμμετρου ρόλου για τους αριθμούς. Οι αριθμοί σαν οντότητες που κωδικοποιούν προτάσεις δεν είναι βέβαια εκείνες οι οντότητες οι οποίες ενδιαφέρουν τους μαθηματικούς, και μάλιστα όταν κάπως ανεξέλεγκτα αυτοί οι κωδικοί αναμειγνύονται με νόμιμους αριθμούς. Το γεγονός ότι ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής δεν έχει τη δυνατότητα να ξεχωρίσει αυτές τις δύο περιπτώσεις δεν σημαίνει ότι αυτόματα ο διαχωρισμός μεταξύ κωδικών και αριθμών στερείται νομιμότητας. Ούτε ο Littlewood, ούτε ο Hardy πρόκειται ποτέ να μπερδέψουν κωδικούς με αριθμούς. Γι' αυτό και όπως είπαμε παραπάνω το θεώρημα της μη πληρότητας στρέφεται κυρίως κατά της μηχανιστικής θεμελίωσης των μαθηματικών. Ένας μαθηματικός θα' θελε εδώ καλύτερα να ξέρει για τι μιλάει: ή μιλάει για κωδικούς, ή μιλάει απλώς για αριθμούς:

Ίσως βοηθήσει αν δούμε αυτή τη σημασιολογική εμπλοκή σ΄ ένα ευρύτερο πλαίσιο. Έστω ότι κάναμε κάτι παρόμοιο με την κατασκευή των προτάσεων Gödel για προτάσεις μιας φυσικής γλώσσας όπως τα ελληνικά. Ας πάρουμε για παράδειγμα την πρόταση

κάτι τι ζει στη θάλασσα (κ)

όπου το 'κάτι τι' παίζει το ρόλο της μεταβλητής. Όλες οι συντακτικά καλά διατυπωμένες προτάσεις μιας γλώσσας είναι αριθμήσιμες, οπότε μπορούμε και εδώ πάλι να θεωρήσουμε ένα μεγάλο λεξικό όπου βρίσκονται καταχωρημένες όλες οι λέξεις (και οι εκφράσεις) της γλώσσας. Όπως και προηγουμένως, μπορούμε να κατασκευάζουμε τα ονόματα των προτάσεων μέσα στη γλώσσα βάζοντας την ίδια την πρόταση σε εισαγωγικά. Οπότε αντικαθιστώντας στην (κ) το 'κάτι τι' με το όνομα της ίδιας της πρότασης έχουμε

'κάτι τι ζει στη θάλασσα' ζει στη θάλασσα (μ)

η οποία από συντακτικής πλευράς είναι καλώς διατυπωμένη (εφ' όσον το όνομα βρίσκεται στη σωστή του θέση), ενώ βέβαια δεν εκφράζει παρά μια ανοησία. Ονόματα ούτε ζουν ούτε δεν ζουν στη θάλασσα, και άρα σαν ανοησία η πρόταση δεν μπορεί να είναι ούτε αληθής ούτε ψευδής.

Φυσικά πολύ λίγο μας ενδιαφέρει αν ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής μπορεί να αναγνωρίσει την (μ) σαν ανόητη πρόταση ή όχι. Αν όχι, τότε αυτό δεν το καταλαβαίνουμε σαν κάτι το αρνητικό για μας αλλά σαν μια ανεπάρκεια για το μηχάνημα

Βέβαια δεν μπορούμε να πούμε για τις προτάσεις Gödel πως πρόκειται για μια ανοησία. Εν τούτοις, ο στόχος των αξιωμάτων Peano (όπως θα δούμε παρακάτω, και ιδιαίτερα στη §4), δεν ήταν να μιλήσει για ένα μείγμα αριθμών και ονομάτων. Το σημασιολογικό μπέρδεμα πάνω στο οποίο στηρίζεται η κατασκευή της πρότασης (g) είναι δυνατό γιατί μέσα σε μια μηχανιστική προσέγγιση των μαθηματικών τα σύμβολα δεν ξεχωρίζονται σύμφωνα με το για τι μιλάνε.

3. Η λειτουργία της λογικής

3.1. Η επιστήμη σαν γνώση σχέσεων

Στην προηγούμενη ενότητα υπογραμμίσαμε το γεγονός ότι το θεώρημα της μη πληρότητας του Gödel προϋποθέτει ότι η λογική είναι αξιωμα-τική. Σ' αυτή ακριβώς την προϋπόθεση θέλουμε τώρα να στρέψουμε την προσοχή μας. Θα πρέπει οπωσδήποτε η λογική να είναι αξιωματική;

Αξίζει κατ' αρχάς να παρατηρήσουμε ότι κανείς σήμερα δεν εξετάζει το αν η Αριστοτελική λογική είναι αξιωματική ή όχι. Κάτι τέτοιο δεν χρειάζεται από τη στιγμή που γίνεται αντιληπτό ότι οι εκφραστικές δυνατότητες αυτής της λογικής είναι φτωχές για τις ανάγκες της σύγχρονης επιστήμης. Σύμφωνα με το ιδεώδες που αναζήτησε τη γνώση σαν γνώση ουσιών, αναπτύχθηκε παράλληλα και μια λογική με βάση τη σύνταξη *υποκείμενο-κατηγόρημα* (Υ-Κ). Στόχος τότε ήταν να γνωρίσουμε το υποκείμενο σαν ουσία. Αλλά σήμερα το ιδεώδες της επιστήμης έχει αλλάξει. Οι φυσικοί νόμοι με τον ένα ή τον άλλο τρόπο εκφράζουν σχέσεις. Αυτό βέβαια δεν απαγορεύει την οποιαδήποτε προσπάθεια οντολογικής ερμηνείας των φυσικών νόμων.[11] Μας υποχρεώνει όμως σε συσχετίσεις αυτών των οντολογικών αντιλήψεων από τη μια, με τα γνωσιολογικά θεμέλια της επιστήμης από την άλλη, όπου κάποιες σχέσεις γίνονται αντιληπτές σαν εξ' ίσου πραγματικές με τις ατομικές οντότητες που συσχετίζουν.

Σήμερα η ιδέα της γνώσης σαν γνώσης σχέσεων μπαίνει από νωρίς στη ζωή μας. Πολύ πριν μάθουμε λ.χ. για τη φυσική του ηλεκτρονικού δεσμού μαθαίνουμε τον τύπο **H:O:H** σαν τη μοριακή δομή του νερού. (Οι δύο τελείες συμβολίζουν την ηλεκτρονική σχέση του καθενός από τα δύο υδρογόνα με το άτομο του οξυγόνου.) Ο γνωστότερος μοριακός τύπος $\mathbf{H_2O}$ μας δίνει μόνο την ατομική σύσταση του μορίου. Παρα-τηρούμε ότι κάποια επί πλέον πληροφορία μας δίδεται από αυτήν τη διαφορά στην σύνταξη.

Κάπως παράλληλα βλέπουμε να λειτουργούν και οι αυξημένες συντακτικές δυνατότητες της πρωτοβάθμιας λογικής, όπου η Αριστοτε-λική σύνταξη επεκτείνεται ώστε να επιτρέπεται η έκφραση σχέσεων. Ας πάρουμε για παράδειγμα την πρόταση «ο Σωκράτης είναι ο άνδρας της Ξανθίππης». Μπορούμε αν θέλουμε να δούμε το όνομα 'Σωκράτης' σαν το υποκείμενο, και το 'ο άνδρας την Ξανθίππης' σαν το κατηγόρημα του Σωκράτη. Αλλά μπορούμε, όταν θέλουμε, να ερμηνεύσουμε αυτήν την ίδια πρόταση σαν έκφραση σχέσεως ανάμεσα στον Σωκράτη και την Ξανθίππη. Η πρωτοβάθμια γλώσσα μας επιτρέπει αυτήν τη δυνατότητα επιλογής. Στην πρώτη περίπτωση γράφουμε τυπικά

$$As$$

Όπου, s: ο Σωκράτης, και Α_ το κατηγόρημα «_ είναι άνδρας της Ξανθίππης». Στη δεύτερη περίπτωση γράφουμε

$$s\Sigma\xi$$

όπου ξ: η Ξανθίππη, και _Σ_ συμβολίζει τη συζυγική σχέση μεταξύ του Σωκράτη και της Ξανθίππης, δηλαδή «_ είναι άνδρας της _».

3.2. Η λογική (και τα μαθηματικά) σαν γραμματική

Πίσω από τον συνοπτικό τρόπο παρουσίασης της πρωτοβάθμιας λογικής βρίσκεται η *απεικονιστική θεώρηση της λογικής* (picture theory of logic). Πρόκειται για μια θέση κλειδί στην φιλοσοφία του Wittgenstein με κεντρική ιδέα την αντίληψη ότι στη γλώσσα θα πρέπει να απεικονίζονται συντακτικά επιτυχώς οι σχέσεις που υπάρχουν στην πραγματικότητα. Δεν θα ακολουθήσουμε όμως περισσότερο τον Wittgenstein. Το συμπέρασμα του Wittgenstein ότι τελικά η λογική και τα μαθηματικά δεν λένε τίποτα στηρίζεται πάνω στον διαχωρισμό μεταξύ του *λέγω* και του *δείχνω*. Το πρώτο εφαρμόζεται όταν περιγράφουμε κάτι που υπάρχει στον κόσμο. Αλλά η λογική και τα μαθηματικά είναι *a priori* επιστήμες. Άρα δεν μπορούν να νοηθούν ότι περιγράφουν κάτι στον κόσμο (είτε τον φυσικό, δηλαδή τον χωροχρονικό, είτε τον Πλατωνικό κόσμο των Ιδεών), διότι έτσι θα ήταν διαψεύσιμες. Και αφού ο Wittgenstein δεν έχει

[11] Άλλωστε, και σαν επιστήμονες, εξακολουθούμε να σκεφτόμαστε πιο φυσικά και άμεσα Αριστοτελικά.

καμία μοντελοθεωρητική αντίληψη για την σημασία της γλώσσας πρέπει ‘λογικά’ να συμπεράνει ότι τελικά δεν υπάρχει αντικείμενο για το οποίο η λογική και τα μαθηματικά μιλάνε. Άρα, δεν λένε τίποτα, και το μόνο που μπορούμε σημασιολογικά να κάνουμε είναι να δείξουμε το πώς αυτά λειτουργούνε. Κάτι που σε τελευταία ανάλυση θα πρέπει να το μάθουμε στην πράξη.

Έτσι, ο χαρακτήρας μιας *a priori* γλώσσας γίνεται παρόμοιος με αυτόν της γραμματικής, με την έννοια ότι και οι γραμματικοί κανόνες (και τα γλωσσικά παιχνίδια δια των οποίων αυτοί σημασιολογικά ενεργο-ποιούνται), δεν έχουν σκοπό να μας πούνε κάτι για τον κόσμο αλλά απλώς να μας εξοικειώσουν με τη σωστή χρήση της γλώσσας. Λέγει σχετικά ο Wittgenstein

> Δεν μπορούμε καθόλου να αμφιβάλουμε ότι σε ορισμένα παιχνίδια της γλώσσας οι μαθηματικές προτάσεις παίζουν τον ρόλο κανόνων αναπαράστασης εν αντιθέσει με προτάσεις που περιγράφουν.[12]

Ή και ακόμη

> Αυτός που γνωρίζει μια μαθηματική πρόταση δεν χρειάζεται ακόμα να ξέρει τίποτα. Δηλαδή η μαθηματική πρόταση οφείλει μόνο να δίνει τη δομή μιας περιγραφής.[13]

Ακριβώς επειδή δεν λένε τίποτα οι προτάσεις της λογικής και των μαθηματικών χαρακτηρίζονται σαν ψευδοπροτάσεις. Μιλούν για τον τρόπο χρήσης της γλώσσας, για τους κανόνες της. Συμπεραίνουμε, αν δεχθούμε αυτή την άποψη, ότι ο λόγος για τον οποίο οι Frege και Russell έψαχναν για τα αντικείμενα αναφοράς των στοιχείων των λογικών και μαθηματικών προτάσεων σε μια Πλατωνική πραγματικότητα ήταν γιατί μπέρδευαν ψευδοπροτάσεις για προτάσεις.

Τι μπορούμε τώρα να πούμε υπέρ αυτής της θέσεως; Είναι αλήθεια ότι, σε πολύ μεγάλο βαθμό, όταν μη μαθηματικοί χρησιμοποιούν τα μαθηματικά δεν πρόκειται παρά για την αναγκαία χρήση μιας γλώσσας για την περιγραφή των φυσικών φαινομένων, περίπου δηλαδή όπως περιγράφει τα πράγματα ο Wittgenstein. Ένας φυσικός λ.χ., μαθαίνει από χώρους Hilbert ακριβώς ότι του χρειάζεται σαν γλώσσα για να μιλήσει για φαινόμενα κβαντομηχανικής. Και κατά συνέπεια, δεν τίθεται καν θέμα για το σημασιολογικό αντικείμενο αυτής της ίδιας της γλώσσας. Τα περισσότερα βιβλία μαθηματικής φυσικής, μάλλον για να μην επιβαρύνουν επιπρόσθετα τον αναγνώστη, είναι γραμμένα με πνεύμα που ενισχύει αυτές τις θέσεις.

3.3. Η μοντελοθεωρητική διάσταση

Για όσους είναι λίγο δύσκολο να πιστέψουν ότι πριν τον Wittgenstein οι μαθηματικοί μπέρδευαν προτάσεις και ψευδο-προτάσεις, και επειδή κάθε πραγματικό πρόβλημα μπορεί για πολλούς και διάφορους λόγους να ερμηνευθεί ανεπαρκώς σαν ψευδοπρόβλημα, θα πρέπει να υπάρχει κάποια άλλη εναλλακτική διέξοδος.

Κατά γενική ομολογία, τουλάχιστον εν ώρα εργασίας, οι μαθηματικοί έχουν την άμεση αίσθηση (και γι’ αυτό πιστεύουν), ότι μιλούν για κάποια πραγματικότητα, αντικείμενο της μαθηματικής γλώσσας. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο, και παρά τις μεγάλες γνωσιολογικές δυσκολίες, ο Πλατωνισμός, παραμένει προσφιλής και είναι πηγή φιλοσοφικής αναζήτησης για τους περισσότερους μαθηματικούς.[14] Η

[12] *Παρατηρήσεις για τα Θεμέλια των Μαθηματικών*, § 6, 7ο μέρος [1941-44]
[13] ο.π. § 2
[14] Υπάρχουν περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα αυτή του Ινδού μαθηματικού Ramanujan όπου είναι αδύνατο να φαντασθεί κανείς ότι κάτι άλλο εκτός από τον Πλατωνισμό αποδίδει επαρκώς την μαθηματική εμπειρία του συγκεκριμένου μαθηματικού. Εν τούτοις, για να πάρουν οι φόρμουλες του

παραδοσιακή φιλοσοφία, με τον ένα ή τον άλλο περίτεχνο τρόπο προσπαθεί να σεβασθεί αυτή την αδιαμφισβήτητη εμπειρία του μαθηματικού. Για τον Kant, οι μαθηματικές ιδέες εξατομικεύονται δια σχημάτων στον χώρο της καθαρής εποπτείας, και από εκεί αντλείται η γνωσιολογική εγκυρότητα των μαθηματικών. Και για να φθάσουμε στον Hintikka του οποίου τη φιλοσοφία, απ' αυτή την άποψη, θα μπορούσαμε να ονομάσουμε κλασσική και παραδοσιακή, η προτεινόμενη λύση είναι μοντελοθεωρητική. Το αντικείμενο των μαθηματικών είναι το οποιοδήποτε μοντέλο που ικανοποιεί τα αξιώματα. Άρα το αυστηρό αντικείμενο των μαθηματικών καθορίζεται από την τυπική γλώσσα των μαθηματικών. Δεν χρειάζεται να ψάξουμε να βρούμε τα αντικείμενα των μαθηματικών στον ένα και μοναδικό πραγματικό κόσμο (στον φυσικό κόσμο ή στον κόσμο των Πλατωνικών Ιδεών). Αυτό δεν σημαίνει βέβαια ότι τα μαθηματικά δεν μιλούν και για τον πραγματικό κόσμο, αλλά μόνο ότι δεν μιλούν απ' ευθείας για τον πραγματικό κόσμο.[15]

Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο στην αποδεικτικοθεωρητική μέθοδο πίνακα (tableau method) των Beth και Hintikka, η σημασιολογία έχει απόλυτη προτεραιότητα επί της σύνταξης.[16] Πρώτα όμως δυο λόγια ακόμα για το θέμα της 'υπόστασης' του μοντέλου όπου συνδυάζονται δύο διαφορετικές ιδέες. Την πρώτη την έχουμε ήδη αναφέρει, είναι η ιδέα του Wittgenstein, σύμφωνα με την οποία η επιστημονική σημασία μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας βρίσκεται στην ισομορφική σχέση μεταξύ γλώσσας και πραγματικότητας.[17] Κρατάμε εδώ ότι η γλώσσα πρέπει να είναι ισομορφική με το αντικείμενό της και δανειζόμαστε μια παλιά φορμαλιστική αντίληψη σύμφωνα με την οποία σαν αντικείμενα των μαθηματικών μπορούμε να θεωρήσουμε αυτά τα ίδια τα σύμβολα των μαθηματικών στο χαρτί, νοούμενα τώρα σαν φυσικά αντικείμενα (το φυσικό αντικείμενο με το συγκεκριμένο σχήμα από μελάνι στο χαρτί, ή το παρόμοιο με κιμωλία στον πίνακα, ή το οποιοδήποτε άλλο φυσικό αντικείμενο που έχουμε επιλέξει για τον ρόλο ενός συγκεκριμένου συμβόλου). Τώρα μπορούμε να πούμε ότι μπροστά μας έχουμε ένα πραγματικό φυσικό μοντέλο το οποίο ικανοποιεί κάποιο αξιωματικό σύστημα από τον τρόπο από τον οποίο έχουν νοηματοδοτηθεί τα αντικείμενα-σύμβολα του μοντέλου.[18] Για να δούμε για τι μιλάνε τα μαθηματικά σύμβολα το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να δούμε αυτά τα ίδια τα σύμβολα σαν φυσικές οντότητες στο χαρτί (αν πρόκειται για σύμβολα στο χαρτί), με σχέσεις ακριβώς εκείνες τις συντακτικές σχέσεις που βλέπουμε στο χαρτί. Τέλος, κάθε άλλο μοντέλο το οποίο ικανοποιεί τους ίδιους τύπους θα είναι ισομορφικό με αυτό ακριβώς το μοντέλο που έχουμε μπροστά μας, και στην ουσία θα είναι σαν να μιλάμε για το ίδιο μοντέλο.

Ramanujan γνήσια μαθηματική υπόσταση, χρειάζονται να τεθούν υπό την συνήθη αποδεικτική κρίση ενός συστήματος.

[15] Θα έχουμε πολύ περισσότερα να πούμε γι' αυτό το θέμα στο «Η Κρίση και η Κατανόηση στις Φυσικές Επιστήμες» (προς δημοσίευση από Ε. Γ.)

[16] Πολλοί φιλόσοφοι, κυρίως λόγω Quine, ταυτίζουν την έννοια του *τυπικού συστήματος* με αυτήν του *συντακτικού συστήματος*. Απόρροια της μοντελοθεωρητικής φιλοσοφίας του Hintikka είναι ο σαφής διαχωρισμός μεταξύ σύνταξης και τυπικού συστήματος. Ένα τυπικό σύστημα μπορεί να μιλάει για το οτιδήποτε ικανοποιεί τις σχέσεις του. Σ' αυτό το σημείο ο Hintikka συχνά υπενθυμίζει τα λόγια του Hilbert: εάν ποτήρια τραπέζια και καρέκλες ικανοποιούν τα αξιώματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας, τότε αυτά είναι σημεία, ευθείες και επίπεδα αντίστοιχα.

[17] Για την αυστηρή σημασία αυτής της έννοιας ισομορφισμού βλέπε Hintikka (1973), chapter II.

[18] Προς αποφυγή συγχύσεως ας υπενθυμίσουμε ότι εδώ μιλάμε μοντελοθεωρητικά, δηλαδή σημασιολογικά. Δεν τίθεται καν θέμα για το αν αυτές οι θέσεις είναι ιδεαλιστικές ή όχι.

3.4. Παράδειγμα

Υπό αυτές τις προϋποθέσεις ένας πίνακας Beth-Hintikka (λίγο πολύ γνώριμος σαν λογικό δέντρο), παίζει τον ρόλο της Καντιανής εποπτείας, και μάλιστα ακόμα καλύτερα, εφ' όσον τώρα έχει αφαιρεθεί το υποκειμενικό στοιχείο που λιγότερο ή περισσότερο μπορεί να ενοχλεί (έστω και αν στον Kant αυτό το υποκειμενικό στοιχείο έχει υπερβατολογική υπόσταση). Τα φυσικά σύμβολα στο χαρτί δεν έχουν τίποτα το περισσότερο υποκειμενικό από ότι οποιοδήποτε άλλο αντικείμενο στο φυσικό χώρο του οποίου η ύπαρξη είναι αδιαμφισβήτητη.

Έστω τώρα ότι θέλουμε λ.χ. να παράγουμε την πρόταση Raa (C_3) από τις προτάσεις

$$\forall x \forall y \forall z((Rxy \mathbin{\&} Ryz) \rightarrow Rxz) \qquad (C_1)$$

$$\exists x(Rxa \mathbin{\&} Rax) \qquad (C_2)$$

τις οποίες αν θέλουμε μπορούμε να δούμε σαν τις αυστηρές διατυπώσεις κάποιων πρότερα ασαφών ιδεών. Η (C_1) εκφράζει την μεταβατική ιδιότητα κάποιας σχέσης R, και η (C_2) ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο για το οποίο ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα ως προς την σχέση R για κάποιο συγκεκριμένο στοιχείο στοιχείο α.

Η σημασία της τυπικής απόδοσης αυτών των ιδεών σε πρωτοβάθμια γλώσσα φαίνεται αν δια των γνωστών λογικών κανόνων των ποσοδεικτών περάσουμε στην παράσταση μιας γενικής αλλά συγκεκριμένης καταστάσεως (ή σε περισσότερο Καντιανή γλώσσα αν σχηματοποιήσουμε τις ιδέες). Απαλείφουμε πρώτα τον υπαρκτικό ποσοδείκτη της (C_2) με την αντικατάσταση της δεσμευμένης μεταβλητής x με το β. Εν συνεχεία εισάγουμε μια πρόταση όπου έχουμε αντικαταστήσει τις μεταβλητές x, y, z, της (C_1) με α, β, α αντίστοιχα. Φυσικά, αφού αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε είναι ότι ισχύει η πρόταση Raa, θα ήταν ανόητο να εισαγάγουμε άλλα άσχετα σύμβολα.[19]

Μετά τις αντικαταστάσεις έχουμε

$$R\alpha\beta \qquad (C_4)$$

$$R\beta\alpha \qquad (C_5)$$

$$(R\alpha\beta \mathbin{\&} R\beta\alpha) \rightarrow R\alpha\alpha \qquad (C_6)$$

Δεν θα χρησιμοποιήσουμε εδώ αμέσως τον κανόνα modus ponens, για λόγους που θα γίνουν εμφανείς αμέσως παρακάτω. Σκοπός μας είναι να δείξουμε μια συγκεκριμένη ιδέα λειτουργίας της λογικής. Το πώς δια της πρωτοβάθμιας ποσοδεικτικής θεωρίας μπορούμε να περάσουμε από γενικές και αφηρημένες παραστάσεις περί μεταβατικότητας και αντιμεταθετικότητας σε προτάσεις, και ως εκ τούτου καταστάσεις, οι οποίες είναι εντελώς συγκεκριμένες. Ως γνωστόν, για τον Kant αυτή η αρετή ήταν το χαρακτηριστικό γνώρισμα των μαθηματικών, και ο κατ' εξοχήν λόγος διαχωρισμού μεταξύ των θετικών επιστημών και της φιλοσοφίας. Στη μοντελοθεωρητική προσέγγιση που παρουσιάζουμε εδώ, αυτό είναι κατ' εξοχήν το γνώρισμα της λογικής.

---

[19] Αν χρειάζεται αυτό να το πούμε είναι γιατί ακολουθώντας μια αυστηρή και συνεπή συντακτική μέθοδο δεν θα είχαμε κανένα λόγο να κάνουμε αυτές τις επιλογές. Επιπρόσθετα, δεν θα είχαμε κανένα λόγο να επιλέξουμε τη πρόταση Raa και να προσπαθήσουμε εν συνεχεία να την αποδείξουμε.

Μετά από αυτές τις γενικές παρατηρήσεις συνεχίζουμε με την σημασιολογική ανάλυση της συνεπαγωγής (C_6). Η αλήθεια της συνεπαγωγής εξασφαλίζεται είτε όταν η ηγουμένη είναι ψευδής, είτε όταν η επόμενη είναι αληθής. Άρα η συνθήκη αλήθειας των παραπάνω προτάσεων διαχωρίζει τα μοντέλα που τις ικανοποιούν σε δύο κλάσεις σύμφωνα με το παρακάτω λογικό δέντρο

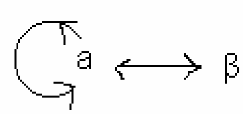
$$R\,\alpha\beta$$
$$R\beta\alpha$$
$$\neg(R\alpha\beta\ \&\ Rba) \quad \Big| \quad R\alpha\alpha$$

(όπου, φυσικά, οι δύο πρώτες προκείμενες ανήκουν και στις δύο ομάδες μοντέλων). Εν συνεχεία (λαμβάνοντας υπ' όψιν την σημασία της άρνησης της σύζευξης), έχουμε

$$R\,\alpha\beta$$
$$R\beta\alpha$$
$$\neg R\alpha\beta \quad \Big| \quad \neg R\beta\alpha \quad \Big| \quad R\alpha\alpha$$

δηλαδή, τρεις διαφορετικές κλάσεις μοντέλων. Αλλά τα μοντέλα των δύο αριστερών κλάδων είναι αδύνατα. Μας μένει μόνο ο δεξιός κλάδος με μοντέλο (κλάση μοντέλων) που ικανοποιεί την Raa.

Τώρα, ας δούμε τα 'α' και 'β' σαν πραγματικά αντικείμενα στο χαρτί, και το 'R' σαν μια φυσική σχέση μεταξύ τους. Τότε, μπροστά στα μάτια μας έχουμε όχι απλώς μια συμβολική απεικόνιση που αναφέρεται κάπου αλλού, αλλά ένα από τα πραγματικά μοντέλα που ικανοποιούν τις προκείμενες (C_1) και (C_2). Αυτό μπορούμε να το δούμε ακόμα καλύτερα αν αντί για το γράμμα R χρησιμοποιήσουμε ένα βέλος και μ' αυτόν τον τρόπο κατασκευάσουμε μια πιο γνώριμη σχηματική παράσταση όπως παρακάτω:



Ότι βλέπουμε σ' αυτό το σχήμα ακριβώς το ίδιο μπορούμε να δούμε και στο λογικό δέντρο παραπάνω στους τύπους Rαβ, Rβα, και Rαα.

Τέλος, ας σημειώσουμε ότι σύμφωνα με την παραπάνω προσέγγιση η λογική άρνηση ερμηνεύεται σαν διαγραφή. Οπότε βλέπω (κατά κυριολεξία 'βλέπω'), ότι όταν πρέπει να κατασκευάσω ένα μοντέλο που να ικανοποιεί ταυτόχρονα τις Rαβ και ¬Rαβ δεν μπορώ να κατασκευάσω το σχήμα της μεταξύ των α και β σχέσεως εφ' όσον η μία κατά-σκευαστική εντολή αναιρεί την άλλη.

3.5. Προς τι η αξιωματική λογική;

Στόχος του παραπάνω παραδείγματος ήταν να τονίσει την μοντελο-θεωρητική σπουδαιότητα της πρωτοβάθμιας λογικής για τα θεμέλια των μαθηματικών. Διακρίναμε τρεις διαφορετικού επιπέδου κινήσεις. Ξεκινήσαμε από κάποια ή κάποιες γενικές ιδέες των οποίων η αυστηρή τυπική έκφραση σε γλώσσα ποσοδεικτικών μας επέτρεψε δια αντικαταστάσεως να πάρουμε ένα συγκεκριμένο γενικό δείγμα (δηλαδή ένα σχήμα), του περιεχομένου αυτών των εννοιών. Απ' εδώ και μπρος, απόδειξη και άμεση εποπτεία (των συγκεκριμένων οντοτήτων στο χαρτί), μας λειτούργησαν σαν δύο σύστοιχες έννοιες πλήρως αλληλο-εξαρτώμενες. Είναι μέσα από αυτό το πλαίσιο που εξετάζουμε την λειτουργία και εγκυρότητα των τυπικών αποδείξεων. Και σαν λίγο πολύ άμεση συνέπεια τίθεται το ερώτημα για το αν και κατά πόσο μας χρειάζονται πράγματι κάποια αξιώματα λογικής για να παράγουμε τις αποδείξεις. Γιατί το μόνο που χρειάσθηκε παραπάνω δεν ήταν παρά η αναφορά στην τυπική σημασία των λογικών συμβόλων.

Αυτή η προσέγγιση γενικεύεται. Κατά συνέπεια κάθε τυπική απόδειξη δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια πλήρης και ξεκάθαρη κατασκευή όλων των δυνατών κλάσεων μοντέλων τα οποία ικανοποιούν τις δοθείσες προκείμενες, οπότε εν συνεχεία *βλέπουμε* αν ή όχι είναι δυνατόν σε κάποιο από τα δυνατά μοντέλα να μην ισχύει το συμπέρασμα. Το αν αυτό που *βλέπουμε* (και για το οποίο δεν έχουμε καμία αμφιβολία) μπορεί ή όχι να προγραμματισθεί σε ένα μηχάνημα, αυτό είναι μάλλον θέμα ελάσσονος σημασίας για τα θεμέλια των μαθηματικών.

Οι κινήσεις κατασκευής λοιπόν των μοντέλων γίνονται με βάση την άμεση σημασία των λογικών συμβόλων, και απ' εδώ προέρχεται κάθε αποδεικτική εγκυρότητα. Άλλωστε, και στην αξιωματική προσέγγιση της θεωρίας αποδείξεων, τα αξιώματα της λογικής και πάλι πρέπει να αντλήσουν την εγκυρότητά τους από κάπου, και φυσικά αυτό το κάπου δεν βρίσκεται πουθενά αλλού εκτός από την σημασία των λογικών συμβόλων. Τελικά η αποδεικτική εγκυρότητα της σημασιολογικής μεθόδου δεν θα πρέπει να μας εκπλήσει από αποδεικτικοθεωρητικής πλευράς καθόλου. Δεν είναι τυχαίο ότι οι τυπικοί σημασιολογικοί κανόνες ανάπτυξης των λογικών δέντρων είναι ανεστραμμένοι κανόνες Gentzen.

3.6. Περί των αξιωμάτων των μαθηματικών

Όσα είπαμε παραπάνω περί λογικής δεν ισχύουν για τα μαθηματικά. Δεν μπορούμε να κάνουμε χωρίς αξιώματα στα μαθηματικά.[20]. Χρειαζόμαστε κάποιες προτάσεις οι οποίες να μας λένε ποια είναι τα μοντέλα για τα οποία μιλάμε. Λ.χ., οι (C_1) και (C_2) θα μπορούσαν να θεωρηθούν σαν αξιώματα (ή κάποια από τα αξιώματα) μιας μαθηματικής θεωρίας με το στοιχείο *α* σαν ένα σταθερό στοιχείο αυτής της θεωρίας.

Ο τρόπος με τον οποίο χειριστήκαμε τη λογική παραπάνω μας δείχνει παράλληλα ότι η σημασία των αξιωμάτων των μαθηματικών βρίσκεται πρώτιστα στην περιγραφική τους λειτουργία. Ένα επιτυχές αξιωματικό σύστημα περιγράφει αυστηρά τα μοντέλα για τα οποία θέλουμε να μιλήσουμε. Έπεται ότι δεν θα πρέπει να υπάρχει αμφιβολία για το αν μια ομάδα μοντέλων ικανοποιεί ή όχι, τα συγκεκριμένα αξιώματα. Από αυτή την άποψη τα αξιώματα θα πρέπει να είναι *περιγραφικά πλήρη*. Σαν παράδειγμα μπορούμε να διαλέξουμε το απλούστερο. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι δύο ορθές. Αλλά τι αν δεν είχαμε ήδη διατυπώσει το πέμπτο αξίωμα του Ευκλείδη, ή κάτι ισοδύναμο; Θα φθάναμε τελικά σ' ένα σημείο όπου θα έπρεπε να θεωρήσουμε δύο κλάσεις μοντέλων όπως παρακάτω.

[20] Εκτός αν μιλάμε για εφαρμοσμένα 'μαθηματικά' (όπως λ.χ. χρησιμοποιεί τα μαθηματικά ένας φυσικός στη πράξη) το οποίο όμως είναι κάτι άλλο. Παρόμοια, μία αξιωματική λογική μπορεί καθ' όλα να θεωρηθεί σαν ένας συγκεκριμένος κλάδος των μαθηματικών. Δεν πρόκειται όμως για τη λογική που μας ενδιαφέρει εδώ, δηλαδή τη λογική που παίζει τον ρόλο του θεμελίου των μαθηματικών, και κατ' επέκταση και των άλλων θετικών επιστημών.

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\exists x(Ax \,\&\, x//c) \quad \Big| \quad \neg\exists x(Ax \,\&\, x//c)$$

όπου Ax: η ευθεία x διέρχεται από το σημείο A (την κορυφή του τριγώνου ΑΒΓ), και c είναι η ευθεία που ορίζεται από τη βάση ΒΓ. Στον αριστερό κλάδο έχουμε μοντέλα στα οποία από το A μπορούμε να φέρουμε τουλάχιστον μια παράλληλο προς τη ΒΓ. Αυτή η κλάση διαχωρίζεται σε δύο κλάσεις μοντέλων. Αυτά στα οποία μπορούμε να φέρουμε ακριβώς μια παράλληλο προς τη ΒΓ

$$\exists x(Ax \,\&\, x//c \,\&\, \forall y((Ay \,\&\, y//c) \rightarrow x = y)) \qquad \text{(Ε)}$$

και σε εκείνα που μπορούμε να φέρουμε τουλάχιστον δύο

$$\exists x \exists y(Ax \,\&\, Ay \,\&\, x \neq y \,\&\, x//c \,\&\, y//c) \qquad \text{(Π)}$$

Η απόδειξη ισχύει μόνο για την κλάση μοντέλων που ικανοποιούν την (Ε). Εκείνη δηλαδή για την οποία θεωρούμε (και εντελώς ανεξάρτητα από το αν αυτό ισχύει στον ένα και μοναδικό πραγματικό κόσμο ή όχι), ότι από την μία κορυφή ενός τριγώνου μπορούμε να φέρουμε μία και μόνο μία παράλληλη προς την απέναντι πλευρά. Για ιστορικούς λόγους, για αυτή τη κλάση, έχουμε διατηρήσει το όνομα Ευκλείδεια γεωμετρία.

3.7. Οι τρεις έννοιες την πληρότητας

Ο πρωταρχικός ρόλος των αξιωμάτων, όπως τον παρουσιάσαμε παραπάνω, είναι να εκφράσει την *περιγραφική πληρότητα* ενός προτιθέμενου μοντέλου. Είναι ο αυστηρά τυπικός τρόπος του μαθηματικού για να ξέρει για τι μιλάει. Στην παράγραφο 4.1 παρακάτω θα επανέλθουμε στο ίδιο θέμα, εκεί σε αναφορά στα αξιώματα του Peano. Φυσικά ο αναγνώστης θα έχει ήδη αντιληφθεί ότι η έννοια της *περιγραφικής πληρότητας* για την οποία μιλάμε δεν είναι η ίδια έννοια της *πληρότητας* για την οποία μιλάει το θεώρημα του Gödel.

Στο βιβλίο του *Οι αρχές των μαθηματικών επανεξεταζόμενες*,[21] ο Hintikka διαχωρίζει τέσσερις έννοιες πληρότητας.

α) <u>Περιγραφική πληρότητα</u>: Αναφέρεται σε μη λογικά αξιωματικά συστήματα. Σημαίνει ότι οι προτάσεις ενός τέτοιου συστήματος T μιλούν ακριβώς και μόνο για τα προτιθέμενα μοντέλα. Εάν στην ουσία το προτιθέμενο μοντέλο είναι μόνο ένα modulo ισομορφισμό (δηλαδή αν όλα τα μοντέλα που ικανοποιούν το σύστημα T είναι ισομορφικά μεταξύ τους), τότε η περιγραφική πληρότητα ταυτίζεται με την *κατηγορηκότητα*.

β) <u>Σημασιολογική (ή συμπερασματική)</u> <u>πληρότητα</u>: Αναφέρεται αποκλειστικά σε λογικά αξιωματικά συστήματα. Σημαίνει ότι όλες οι λογικά έγκυρες προτάσεις μιας υποκείμενης γλώσσας μπορούν να παραχθούν σαν θεωρήματα από τα λογικά αξιώματα. Εάν υποθέσουμε τα συνήθως επιτρεπόμενα πρότυπα αξιωματικοποίησης, τότε υπάρχει μια πλήρης αξιωματικοποίηση ενός μέρους της λογικής αν και μόνον αν

[21],σ. 91-92, 1996.

το σύνολο των λογικά αληθών (έγκυρων) προτάσεων (αυτού του μέρους της λογικής) είναι αναδρομικά απαριθμήσιμο.

γ) Παραγωγική πληρότητα: συνδυάζει στοιχεία της περιγραφικής και σημασιολογικής πληρότητας. Αν μια μαθηματική θεωρία Σ συνδυασθεί με κάποιο λογικό αξιωματικό σύστημα, τότε μπορούμε να πούμε ότι η Σ είναι παραγωγικά πλήρης αν και μόνο αν για κάθε πρόταση φ της υπό εξέταση γλώσσας μπορεί δια της αξιωματικής λογικής να αποδειχθεί είτε ότι φ είτε ότι ¬ φ.[22]

3.8. Γνωρίζω το μοντέλο: οι συναρτήσεις Skolem

Εν τούτοις, για να μπορούμε να πούμε ότι ξέρουμε ένα μοντέλο όπως αυτό περιγράφεται από τα αξιώματα χρειαζόμαστε και κάτι άλλο ακόμη. Αυτό δεν είναι άμεσα ορατό από τα απλά παραδείγματα που συζητήσαμε. Συγκεκριμένα, δεν είχαμε να αντιμετωπίσουμε περιπτώσεις εναλλαγής ποσοδεικτών που είναι και το σημαντικότερο στίγμα της πρωτοβάθμιας λογικής.[23] Σ' αυτή την περίπτωση, οι συνηθισμένοι κανόνες χειρισμού των ποσοδεικτών δι' αντικαταστάσεως αποτυγχάνουν.

Έστω λοιπόν ένα μοντέλο ***μ*** το οποίο ικανοποιεί τον τύπο

$$\forall x \exists y S[x, y] \qquad (\iota)$$

όπου S[x,y] εκφράζει μια οποιαδήποτε αλληλεξάρτηση μεταξύ των x και y. Πως μπορούμε με βάση αυτόν τον τύπο να πούμε ότι ξέρουμε το μοντέλο ***μ*** που τον ικανοποιεί; Πως ξέρουμε αν το ***μ*** ικανοποιεί τον τύπο S[α, β] για δύο δεδομένα στοιχεία α και β;

Φυσικά από τον τύπο (ι) παίρνουμε δια αντικαταστάσεως

$$\exists y S[a, y] \qquad (\iota\iota)$$

αλλά, δεν ξέρουμε αν ο τύπος (ιι) ικανοποιείται αν για y βάλουμε β. Άρα, σύμφωνα με τα όσα λέγαμε παραπάνω δεν ξέρουμε το μοντέλο αφού δεν ξέρουμε αν $S[\alpha, \beta]$ ή $\neg S[\alpha, \beta]$.

Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα βρίσκεται μέσα στην κατάλληλη παιγνιοθεωρητική ερμηνεία της σημασίας των ποσοδεικτών. Θα προσπαθήσουμε να είμαστε όσο το δυνατόν συντομότεροι. Τελικά, αυτό που χρειάζεται επί πλέον να ξέρουμε όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε περιπτώσεις εναλλαγής ποσοδεικτών είναι η συναρτησιακή εξάρτηση της μεταβλητής y από την μεταβλητή x. Κι' αυτό το ξέρουμε όταν ξέρουμε την αντίστοιχη συνάρτηση Skolem.

---

[22] Υπάρχει και μια άλλη έννοια πληρότητας η οποία μπορεί να ονομαστεί πληρότητα κατά Hilbert. Εμφανίσθηκε ως αξίωμα πληρότητας και πρωτοχρησιμοποιήθηκε στη δεύτερη έκδοση (1902) του βιβλίου *Τα Θεμέλια της Γεωμετρίας*. Δεν μας αφορά εδώ άμεσα εκτός από το γεγονός ότι κατά τον Hintikka αυτή η έννοια της πληρότητας έχει μπερδευτεί στη βιβλιογραφία με τις υπόλοιπες τρεις. Σημειώνουμε ότι πρόκειται για μια υπόθεση μεγιστοποίησης, ότι δηλαδή τα προτιθέμενα μοντέλα των αξιωμάτων είναι τέτοια που αν σ' αυτά προστεθούν άλλα αντικείμενα θα πρέπει να παραβιάζονται κάποια από τα αξιώματα του συστήματος.

[23] Αν θεωρήσουμε την Αριστοτελική λογική σαν ποσοδεικτική θεωρία, αυτό που κυρίως δεν έχουμε είναι εναλλαγή ποσοδεικτών.

Αν ο τύπος (ι) είναι αληθής για κάποιο μοντέλο $\boldsymbol{\mu}$, τότε θα πρέπει να υπάρχει μία συνάρτηση f τέτοια ώστε η

$$\exists f \forall x S[x, f(x)] \quad \text{(ιιι)}$$

να ικανοποιεί το μοντέλο $\boldsymbol{\mu}$. Τότε για κάθε στοιχείο x ξέρουμε το πώς να διαλέξουμε το κατάλληλο στοιχείο y το οποίο να ικανοποιεί την (ι). Δεν είναι τυχαίο ότι η μετάβαση από την (ι) στην (ιιι) εκφράζει την μεθοδο-λογική βάση της πειραματικής φυσικής.[24]

3.9. Η IF λογική

Τα παραπάνω εύκολα επεκτείνονται και για πιο πολύπλοκες καταστάσεις. Για να γνωρίζω λ.χ. το μοντέλο που ικανοποιεί τον τύπο

$$\forall x \exists y \forall z \exists w S[x, y, z, w] \quad \text{(ιν)}$$

χρειάζονται δύο συναρτήσεις Skolem, f και g έτσι ώστε

$$\exists f \exists g \forall x \forall z S[x, f(x), z, g(x, z)] \quad \text{(ν)}$$

Σύμφωνα με τους κανόνες σύνταξης της κατηγορημακής λογικής, μια υπό υπαρκτικό ποσοδείκτη μεταβλητή εξαρτάται από όλες τις υπό γενικό ποσοδείκτη μεταβλητές που προηγούνται. Άρα η y στον τύπο (ιν) εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή x, ενώ η w εξαρτάται και από την x και από την z. Αυτό δε ακριβώς δείχνει και ο τύπος (ν), όπου η g παρουσιάζεται σαν συνάρτηση δύο μεταβλητών. Από την άλλη, αν αντί για τον (ιν) είχαμε τον τύπο

$$\forall x \forall z \exists y \exists w S[x, y, z, w] \quad \text{(νι)}$$

τότε και οι δύο συναρτήσεις Skolem θα έπρεπε να είναι συναρτήσεις δύο μεταβλητών, δηλαδή

$$\exists f \exists g \forall x \forall z S[x, f(x, z), z, g(x, z)] \quad \text{(νιι)}$$

Τώρα, οι τύποι (ιιι), (ν) και (νιι) δια των οποίων γνωρίζουμε τα όποια μοντέλα ικανοποιούν τους τύπους (ι), (ιν) και (νι), αν ξέρουμε τις αντίστοιχες συναρτήσεις, δεν είναι πρωτοβάθμιοι τύποι εφ' όσον έχουμε υπαρκτικούς ποσοδείκτες όχι σε ατομικές οντότητες αλλά πάνω σε συναρτήσεις. Σύμφωνα με την τεχνική ορολογία, οι τύποι (ιιι), (ν) και (νιι) είναι τύποι σε γλώσσα Σ_1^1. Αποδεικνύεται ότι οι τύποι σε γλώσσα Σ_1^1 μπορούν να μεταφρασθούν πάντοτε σε πρωτοβάθμια γλώσσα, και αυτή ακριβώς είναι η ιδιαίτερη σημασία της σαν τμήμα της δευτερο-βάθμιας λογικής. Στην

---

[24] Αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση f γνωρίζουμε το μοντέλο. Αλλά για τη θεωρητική διατύπωση των συνθηκών αλήθειας εν γένει δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε την f. Αρκεί μόνο η υπόθεση ότι υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση. Απ' αυτή την άποψη τα μαθηματικά θεμέλια για το οποία μιλάμε είναι κλασσικά και όχι κατασκευαστικά. Αυτό πρέπει να λεχθεί (έστω και έτσι τηλεγραφικά) για να μη δημιουργηθεί σύγχυση ταύτισης της φιλοσοφίας του Hintikka με τον ιντουϊσιονισμό, ή την κατασκευασιοκρατία. Μια σύγχυση που μπορεί να ενισχυθεί από το γεγονός ότι στην IF λογική (βλ. αμέσως παρακάτω), δεν ισχύει η αρχή της του τρίτου αποκλίσεως.

ουσία η $\Sigma_1^{\,1}$ είναι η γλώσσα που χρειαζόμαστε για να εκφράσουμε το αξίωμα επιλογής, εφ' όσον οι συναρτήσεις Skolem δεν είναι παρά συναρτήσεις επιλογής.

Αλλά αν οι τύποι της $\Sigma_1^{\,1}$ μπορούν να μεταφρασθούν πάντοτε σε πρωτοβάθμια γλώσσα αυτό δεν σημαίνει ότι μεταφράζονται πάντα σε τύπους της λογικής Frege-Russell (της γνωστής κατηγορηματικής λογικής). Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι έχουμε το τύπο

$$\exists f \exists g \forall x \forall z S[x, f(x), z, g(z)] \qquad \text{(viii)}$$

όπου και οι δύο συναρτήσεις Skolem είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Είναι εύκολο να πεισθεί κανείς ότι δεν υπάρχει αντίστοιχος τύπος της λογικής Frege-Russell, ή οποιασδήποτε άλλης πρωτοβάθμιας λογικής με γραμμική σύνταξη. Ας προσπαθήσουμε: κατ' αρχάς ο ποσοδείκτης $(\exists y)$ θα πρέπει να είναι μετά τον ποσοδείκτη $(\forall x)$, αλλά πριν από τον $(\forall z)$. Παρόμοια, ο ποσοδείκτης $(\exists w)$ θα πρέπει να είναι μετά τον $(\forall z)$ αλλά πριν από τον $(\forall x)$. Δεν είναι δυνατόν να ικανοποιηθούν και οι δύο απαιτήσεις μαζί όταν η διάταξη θα πρέπει να είναι γραμμική. Γι' αυτό για την πρωτοβάθμια έκφραση της (viii) χρειαζόμαστε τους διακλαδιζόμενους ποσοδείκτες Henkin (branching quantifiers)

$$\begin{matrix} \forall x \exists y & \\ & S[x, y, z, w] \\ \forall z \exists w & \end{matrix} \qquad \text{(ix)}$$

Πιο εύχρηστος είναι ο παρακάτω συμβολισμός του Hintikka

$$(\forall x)(\forall z)(\exists y / \forall z)(\exists w / \forall x) S[x, y, z, w] \qquad \text{(x)}$$

όπου ο γενικός ποσοδείκτης ο οποίος ακολουθεί την κάθετο μετά από ένα υπαρκτικό ποσοδείκτη μας δείχνει την μεταβλητή, ή τις μεταβλητές (αν υπάρχουν περισσότεροι του ενός γενικοί ποσοδείκται), από τις οποίες η μεταβλητή του υπαρκτικού ποσοδείκτη είναι ανεξάρτητη.

Η πρωτοβάθμια λογική η οποία επιτρέπει το παραπάνω είδος σύνταξης ονομάζεται από τον Hintikka *λογική φιλική της ανεξαρτησίας* (independence friendly logic), ή IF λογική για συντομία. Για την IF λογική ισχύουν όλα τα βασικά μεταθεωρήματα της πρωτοβάθμιας λογικής: συμπάγεια, το προς τα κάτω θεώρημα Löwenheim-Skolem, και το θεώρημα παρεμβολής του Craig. Αλλά αυτή η λογική δεν είναι αξιωματικοποιήσιμη. Έχουμε όμως ήδη πει αρκετά ώστε πλέον αυτό να είναι ένα συγκριτικά μικρό μειονέκτημα. Πολύ μεγαλύτερη σημασία έχει η αυξημένη περιγραφική ικανότητα της IF λογικής. Ελπίζουμε ότι με την σχετικά λεπτομερή συζήτηση που ακολουθεί γύρω από το θεώρημα του Goodstein ο αναγνώστης θα μπορέσει να εκτιμήσει σε μεγαλύτερο βάθος τις αρετές αυτής της νέας προσέγγισης.

4. Το θεώρημα του Goodstein

4.1. Το περιγραφικό περιεχόμενο των αξιωμάτων του Peano

Μιλήσαμε σε προηγούμενη ενότητα για τον θεωρηματικό χαρακτήρα των θεωρημάτων, δηλαδή για την αμεσότητα της αλήθειας που τελικά πρέπει να χαρακτηρίζει ένα θεώρημα που λέμε ότι καταλαβαίνουμε. Αυτό είναι το πνεύμα με το οποίο προσεγγίζουμε και την απόδειξη του θεωρήματος του Goodstein.

Το κύριο στοιχείο που θα μετατρέψει αυτό το εκ' πρώτης όψεως τεχνικό θεώρημα (για τη διατύπωση του βλέπε παρακάτω), σε μια λίγο πολύ άμεση αλήθεια είναι η εξοικείωση μας με τους λεγόμενους διατακτικούς αριθμούς. Προϋποτίθεται όμως ότι ήδη έχουμε μια καθαρά μοντελο-θεωρητική αντίληψη για τους φυσικούς αριθμούς. Ας ξεκινήσουμε με το να θεωρήσουμε τα αξιώματα του Peano μοντελοθεωρητικά.

Οι ιδέες πάνω στις οποίες χτίζεται το αυστηρό τυπικό οικοδόμημα της αριθμητικής, αναφέρονται σε πράξεις τόσο βασικές, που είναι αδύνατο να θεωρήσουμε την γνωσιακή αλληλεπίδρασή μας με τον κόσμο, έξω από αυτές. Τα οποιαδήποτε διακριτά αντικείμενα μπορεί να θεωρηθούν διατεταγμένα σε σειρά (με οποιαδήποτε έννοια διακριτής διατακτικής διαδικασίας) σε *πρώτο, δεύτερο, τρίτο κτλ,* ή αλλιώς σε *προηγούμενο* και σε *επόμενο*. Οι φυσικοί αριθμοί εκφράζουν τυπικά αυτήν την ιδέα κατά την οποία ένα αντικείμενο θεωρείται ότι παρατίθεται μετά από ένα άλλο και γι' αυτό τα αξιώματα του Peano διατυπώνονται με βάση την πράξη, *επόμενος*. Εφ' όσον αυτή η ιδέα έχει καθολική εφαρμογή δεν είναι παράδοξο ότι και η αριθμητική έχει καθολική εφαρμογή.

Οι φυσικοί αριθμοί

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

μπορούν να θεωρηθούν όχι σαν ονόματα αφηρημένων οντοτήτων ή Πλατωνικών Ιδεών, αλλά σαν ονόματα τα οποία έχουν τη δυνατότητα να προσάπτονται στα οποιαδήποτε αντικείμενα τα οποία έχω θελήσει να βάλω στη σειρά, και βέβαια αυτό κάνουμε όταν μετράμε ανθρώπους, δέντρα ή καρέκλες. Υπάρχει βέβαια η διαφορά ότι όποια κι' αν είναι αυτά τα αντικείμενα που θέλουμε να διατάξουμε είναι πάντα πεπερασμένα. Ενώ οι αριθμοί από την άλλη είναι ένα σύστημα κατασκευασμένο ώστε να επεκτείνεται επ' άπειρον. Τώρα, μέσα στα πλαίσια της φορμαλιστικής ιδέας που παρουσιάσαμε προηγουμένως αυτό δεν μας δημιουργεί κανένα πρόβλημα, εφ' όσον τα ίδια τα αριθμητικά σύμβολα μπορούν να πάρουν ένα καλώς καθορισμένο χαρακτήρα πραγματικών, δηλαδή φυσικών αντικειμένων. Φυσικά δεν υπάρχει τίποτα το ιδιαίτερο στον συνήθη συμβολισμό των αριθμών. Μια σειρά απο τόνους όπως λ.χ.,

$$/,\ //,\ ///,\ ////,\ \ldots.$$

κάνει ακριβώς την ίδια δουλειά. Ακόμα πιο ξεκάθαρα ο συμβολισμός κατά Peano

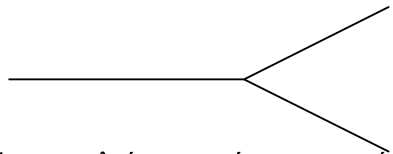
$$0,\ \ s0,\ \ ss0,\ \ sss0,\ \ \cdots.$$

όπου *s* η συνάρτηση *επόμενος* (successor) δίνει τον τρόπο θεώρησης αυτών των αντικειμένων σε *προηγούμενο* και σε *επόμενο*. Ο προηγούμενος του πρώτου αντικειμένου της θεώρησης μας (s0), είναι το αρχικό στοιχείο 0 (μηδέν). Πράγματι, δεν θεωρούμε τίποτα πριν από το πρώτο αντικείμενο της θεώρησης μας, και δεν έχει νόημα να αναζητήσουμε τον προηγούμενο του 0. Αυτό ακριβώς διατυπώνει αυστηρά σε ποσοδεικτική γλώσσα το πρώτο αξίωμα

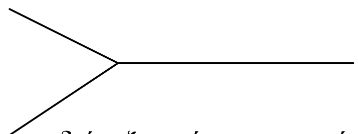
$$\forall x(sx \neq 0) \tag{1}$$

Βλέπουμε και εδώ το πώς η ποσοδεικτική γλώσσα στη πρωτοβάθμια λογική λειτουργεί ώστε να μπορούμε να εκφράζουμε μια ιδέα δια συγκεκριμένων αντικειμένων.

Αλλά η (1) δεν εξαντλεί την ιδέα της διάταξης που έχουμε όπου εννοείται ότι κάθε αντικείμενο στη σειρά έχει ένα μόνο επόμενο. Δεν θέλουμε επίσης στη διάταξη να υπάρχουν διακλαδώσεις της μορφής



Αλλά μια τέτοια διάταξη αποκλείεται από το γεγονός ότι ο *επόμενος* (s) είναι συνάρτηση. Επίσης, αφού εννοούμε ότι διαφορετικά αντικείμενα θα έχουν διαφορετικούς επόμενους, αποκλείονται διακλαδώσεις της μορφής



Ακριβώς τέτοιους τύπους διάταξης είναι που στόχο έχει να αποκλείσει το δεύτερο αξίωμα Peano,

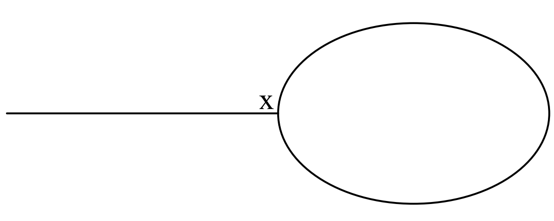
$$\forall x \forall y (sx = sy \to x = y) \qquad (2)$$

Περνάμε τώρα στο αξίωμα της επαγωγής. Η ιδέα της διάταξης, όπως την περιγράψαμε, έμμεσα τουλάχιστον εμπεριέχει και την ιδέα της επαγωγής. Για να δείξουμε οτι όλοι οι φυσικοί έχουν μια ιδιότητα, τότε εφ' όσον στους φυσικούς έχουμε συμπεριλάβει και το 0 προφανώς θα πρέπει να ελέγξουμε αν το μηδέν έχει αυτήν την ιδιότητα. Υποθέτοντας μετά ότι ο τυχαίος αριθμός k την έχει, ελέγχουμε αν και ο επόμενός του s(k) την έχει. Αν αυτά ισχύουν, τότε το 0 θα έχει την εν λόγω ιδιότητα, το s0 παρόμοια, το ss0, το sss0, κ.ο.κ.

Πρέπει επίσης να αποκλειστεί η διάταξη να έχει *κύκλους*. Ότι δεν πρόκειται δηλαδή να *επανεμφανιστεί* ο ίδιος αριθμός στην ακολουθία μετά από κάποια βήματα. Αυτό μας το εξασφαλίζει η επαγωγή, έχουμε δηλαδή

$$\forall x (\underbrace{sss\ldots s}_{n-\phi o \rho \varepsilon \varsigma} x \neq x)$$

για κάθε n. Αποκλείεται δηλαδή μια διάταξη όπως το επόμενο σχήμα



Οι πράξεις τώρα της αριθμητικής μπορούν να γίνουν αντιληπτές σαν πράξεις επί των αντικειμένων που μόλις περιγράψαμε, και ορίζονται στη γλώσσα αυτής της περιγραφής (δηλαδή στη γλώσσα των αξιωμάτων). Ακολουθώντας την ίδια στάση προσέγγισης, ο ορισμός των πράξεων δεν μπορεί να είναι παρά η αυστηρή περιγραφή τους. Για τον ορισμό της πρόσθεσης έχουμε

$$\forall x(0 + x = x) \qquad (3)$$

και

$$\forall x \forall y(s(x + y) = (x + sy)) \qquad (4)$$

Η σημασία αυτού του ορισμού γίνεται εμφανής αμέσως και από την απλούστερη περίπτωση, 0+1=1. Φυσικά αυτό μας το εξασφαλίζει αμέσως ο (3). Περισσότερο ενδιαφέρον έχει η εφαρμογή του τύπου (4). Για τη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε

$$0 + s0 = s(0 + 0) = s0 \qquad (5)$$

Με άλλα λόγια, σύμφωνα με τον ορισμό, το να προσθέσουμε το 0 στο 1 ισοδυναμεί απλώς με το να θεωρήσουμε τον επόμενο του 0, δηλαδή κατ' ευθείαν το πρώτο στοιχείο τη ακολουθίας. Παρόμοια για το 1+1=2.

$$s0 + s0 = s(s0 + 0) = ss0 \qquad (6)$$

δηλαδή, 1+1 δεν είναι παρά ο επόμενος του 1, κ.ο.κ. Γενικά το άθροισμα x+y είναι ο y-στός επόμενος μετά τον x,

$$x + y = \underbrace{sss\ \dots\ s}_{y-\varphi o\rho \varepsilon \varsigma}x \qquad (7)$$

Αν σκεφτούμε στα σοβαρά το αβάκιο, αυτό το λίγο ξεπερασμένο σήμερα όργανο με το οποίο τα παιδιά μάθαιναν πρόσθεση, τότε αντιλαμβανόμαστε ότι αυτό που επιτυγχάνουμε κατ' αρχάς δια των αξιωμάτων Peano είναι την αυστηρή περιγραφή εκείνων των πράξεων δια των οποίων το παιδί μαθαίνει τα εντελώς στοιχειώδη, όπως παίρνει μια χάντρα από δεξιά, την επόμενη φυσικά (στην προκειμένη περίπτωση δεν μπορεί να κάνει και αλλιώς), και την σύρει αριστερά όσο γίνεται. Κι' αν θέλει να προσθέσει τον αριθμό 2, τότε ξεχωρίζει πρώτα δύο χάντρες από δεξιά και τις σύρει μετά μαζί προς τα αριστερά. Τέλος για να βρει το αποτέλεσμα πρέπει να μετρήσει. Ψάχνει με άλλα λόγια να βρει το σωστό όνομα. Τα αξιώματα Peano μας εξασφαλίζουν ότι το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο και εάν η πράξη γίνει αλλιώς δηλαδή αν μετακινήσουμε προς τα αριστερά μία μία, χάντρα ξεχωριστά. Ο αναγνώστης εύκολα μπορεί να διαπιστώσει ότι οι ιδιότητες της πρόσθεσης αποδεικνύονται ακριβώς μέσα στο ίδιο πνεύμα φαινομενολογικής αυστηρότητας το οποίο μόλις παρουσιάσαμε.

Ανάλογα για τον πολλαπλασιασμό το γινόμενο $x \cdot y$, είναι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης του x με τον εαυτό του y φορές. Άρα

$$x \cdot y = \underbrace{x + x + \ \dots\ + \mathrm{x}}_{\mathrm{y}\text{-}\varphi o\rho \varepsilon \varsigma} \qquad (8)$$

Συνεπώς ο πολλαπλασιασμός ορίζεται:

$$\begin{aligned} &\forall \mathrm{x}(\mathrm{x} \cdot 0 = 0) \\ &\forall \mathrm{x} \forall \mathrm{y}(\mathrm{x} \cdot \mathrm{sy} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{y} + \mathrm{x}) \end{aligned} \qquad (9)$$

Η διάταξη που επιβάλλεται στους φυσικούς μέσω της s μπορεί να ορισθεί σαν σχέση '$\leq$' και από τον τύπο

$$\mathrm{x} \leq \mathrm{y} \leftrightarrow \exists \mathrm{z}(\mathrm{x} + \mathrm{z} = \mathrm{y}) \qquad (10)$$

Σαν αξιώματα του Peano για την αριθμητική παίρνουμε συνήθως τους τύπους (1), (2), τους ορισμούς της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και τον (10) μαζί με το πρωτοβάθμιο σχήμα της επαγωγής. Θα είναι ήδη προφανές ότι για τη διάταξη των αντικειμένων για την οποία μιλήσαμε, επειδή υπάρχει το μηδέν, δηλαδή αρχίζει από κάπου, δεν μπορεί να υπάρχει μια άπειρη γνησίως φθίνουσα ακολουθία. Η σημασία αυτής της ιδιότητας θα φανεί καθαρά παρακάτω.

4.2. Επεκταση της διάταξης των φυσικών αριθμών. Οι διατακτικοί

Σύμφωνα με το πρώτο αξίωμα του Peano (1) το μηδέν είναι το μόνο στοιχείο που δεν έχει άμεσο προηγούμενο. Αλλά αυτό δεν αποκλείει τη δυνατότητα μοντέλα των αξιωμάτων να έχουν στοιχεία τα οποία ενώ δεν έχουν άμεσο προηγούμενο εν τούτοις να έχουν προηγούμενους. Ας δούμε τώρα τον τρόπο με τον οποίο φθάνουμε σ’ αυτή την ιδέα.

Ας φανταστούμε μια διάταξη όπου πρώτα έχουμε τους άρτιους και μετά τους περιττούς, δηλαδή

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots \qquad (\delta_1)$$

Σε αυτή τη διάταξη ούτε το μηδέν ούτε το 1 έχουν άμεσο προηγούμενο. Αλλά ενώ το μηδέν δεν έχει κανένα προηγούμενο το 1 έχει άπειρους μη άμεσους προηγούμενους. Το 1 ονομάζεται *οριακός* αριθμός γιατί εδώ εμφανίζεται σαν το όριο της ακολουθίας των αρτίων $0,\ 2,\ 4,\ 6, \ldots .$

Στο αμέσως παραπάνω μοντέλο ισχύει επίσης (όπως και για την κανονική διάταξη των φυσικών), η ιδιότητα ότι κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία αριθμών είναι πεπερασμένη. Πράγματι, έστω ότι

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ \ldots\ > a_n > \ \ldots$$

είναι μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία. Στη περίπτωση που το a_1 είναι άρτιος η ακολουθία θα είναι προφανώς πεπερασμένη. Στη περίπτωση που το a_1 είναι περιττός τότε μετά από πεπερασμένα το πλήθος βήματα θα βρεθούμε στον τελευταίο περιττό όρο της ακολουθίας, έστω a_k. Τότε ο επόμενος όρος a_{k+1} θα πρέπει να είναι κάποιος άρτιος. Από κει και πέρα, μετά από πεπερασμένα το πλήθος βήματα η ακολουθία θα μηδενιστεί.

Η παραπάνω ιδέα γενικεύεται ως εξής. Ξεκινάμε με τους πρώτους

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ \ldots$$

και κατασκευάζουμε τις παρακάτω ακολουθίες δυνάμεων:

$$\begin{array}{l} 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ \ldots\ 2^n,\ \ldots \\ 3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ \ldots\ 3^n,\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p,\ p^2,\ p^3,\ p^4,\ \ldots\ p^n,\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

όπου p πρώτος. Αν όλες τις παραπάνω γραμμές τις θεωρήσουμε στη σειρά τη μια μετά την άλλη έχουμε το μοντέλο:

$$2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots,\ 3,\ 3^2,\ 3^3,\ \ldots,\ 5,\ 5^2,\ 5^3,\ \ldots,\ p,\ p^2,\ p^3,\ \ldots \ (\delta_2)$$

όπου η άπειρη ακολουθία των δυνάμεων του 3 έπεται αυτής των δυνάμεων του 2, αυτής του 5 έπεται των δυνάμεων του 3, κ.ο.κ. Σ' αυτό το μοντέλο οι αριθμοί 3, 5, 7, 11, . . . είναι οριακοί αριθμοί. Και εδώ, προφανώς ισχύει ότι και παραπάνω, δηλαδή ότι κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία με την έννοια της υποδηλούμενης διάταξης είναι πεπερασμένη.

Οι τρόποι διάταξης των (δ_1) και (δ_2) αντιστοιχούν σε διατακτικούς αριθμούς. Οι τελευταίοι αποτελούν μια υπερπεπερασμένη επέκταση της ακολουθίας των φυσικών αριθμών. Ας φαντασθούμε ότι μετά την ακολουθία των φυσικών 0, 1, 2, 3, . . . , αρχίζει μια άλλη άπειρη ακολουθία εντελώς όμοια με αυτήν ως προς τη διάταξη, και της οποίας το αρχικό στοιχείο συμβολίζουμε με ω. Τότε το ω είναι ένας οριακός αριθμός γιατί μπορεί να θεωρηθεί ως το όριο της ακολουθίας των φυσικών και δεν έχει άμεσο προηγούμενο. Σχηματίζουμε έτσι την ακολουθία

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \ldots$$

Αν συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο, φανταζόμαστε ότι η ακολουθία

$$\omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \ldots$$

ακολουθείται από μια άλλη με αρχικό στοιχείο τον οριακό αριθμό $\omega+\omega$ ή $\omega\cdot 2$ (όπως συνήθως συμβολίζεται), επί του οποίου μπορούμε να εφαρμόσουμε διαδοχικά επ' άπειρον την πράξη επόμενος. Αυτό μας δίνει

$$0,1,2,\ldots,\omega,\omega+1,\omega+2,\ldots,\omega+\omega=\omega\cdot 2,\omega\cdot 2+1,\omega\cdot 2+2,\ldots$$

Ο επόμενος οριακός αριθμός συμβολίζεται με $\omega\cdot 3$, και συνεχίζοντας παρόμοια έχουμε

$$0,1,2,\ldots,\omega,\omega+1,\omega+2,\ldots,\omega\cdot 2,\ldots,\omega\cdot 3,\ldots,\omega\cdot 4,\ldots$$

Συμβολίζουμε με $\omega\cdot\omega=\omega^2$ το όριο της ακολουθίας

$$\omega,\ \omega\cdot 2,\ \omega\cdot 3,\ \omega\cdot 4,\ \ldots,\ \omega\cdot n,\ \ldots,$$

δηλαδή τον οριακό αριθμό που είναι το αρχικό στοιχείο της ακολουθίας που έπεται όλων των ακολουθιών που έχουν όριο της μορφής $\omega\cdot n$ για οποιοδήποτε n, και συνεχίζουμε τις διατακτικές επεκτάσεις. Άρα υπάρχει μια διαδικασία παραγωγής συνεχώς μακρύτερων επεκτάσεων της ακολουθίας των φυσικών αριθμών. Έχουμε λοιπόν το παρακάτω μοντέλο:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \ldots,$$
$$\omega\cdot 2,\ \omega\cdot 2+1,\ \ldots,\ \omega\cdot 3,\ \ldots,\ \omega\cdot 4,\ \ldots,$$
$$\omega^2,\ldots,\omega^3,\ldots,\omega^n,\ldots,\omega^\omega,\ldots,\omega^{\omega^\omega},\ldots,\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^\omega}}}},\ldots$$

Κάθε έκφραση (όπως λ.χ. η ω^2+5) στην παραπάνω ακολουθία λέγεται *διατακτικός αριθμός*. Αν α και β είναι διατακτικοί, γράφουμε

$\alpha < \beta$ όταν ο α έρχεται πριν τον β στη διαδικασία παραγωγής διατακτικών. Άρα το σύμβολο '<' παριστά επέκταση της σχέσης διάταξης των φυσικών αριθμών.

Από τον τρόπο κατασκευής τους οι διατακτικοί θα πρέπει να ικανοποιούν τα δύο βασικά αξιώματα του Peano (1) και (2), μόνο που όπως είναι φυσικό κάποια διαφορά θα πρέπει να υπάρχει στο αξίωμα της επαγωγής. Τώρα, κάθε διατακτικός είναι είτε το

0, είτε κάποιος οριακός διατακτικός της μορφής ω, ω2 … $ω^2$ …, είτε επόμενος διατακτικός. Για να ισχύει επομένως μια ιδιότητα για όλους τους διατακτικούς θα πρέπει να ισχύει για το μηδέν, αν ισχύει για τον τυχαίο διατακτικό α θα πρέπει να ισχύει και για τον επόμενό του s(α). Επιπρόσθετα, αν για μια αύξουσα ακολουθία διατακτικών ισχύει η εν λόγω ιδιότητα θα πρέπει να ισχύει και για το όριο της. Γι' αυτό και η επαγωγή εδώ λέγεται *υπερπεπερασμένη*. Τέλος να σημειώσουμε ότι από τον τρόπο κατασκευής των διατακτικών, θα πρέπει και πάλι κάθε άπειρη γνησίως φθίνουσα ακολουθία διατακτικών να είναι πεπερασμένη.

Στους διατακτικούς ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με ανάλογο τρόπο όπως στους φυσικούς, απλά συμπεριλαμβάνουμε επιπλέον την περίπτωση των οριακών διατακτικών. Ορίζεται επίσης ανάλογα και η εκθετική συνάρτηση α^{β}, όπου α και β διατακτικοί.

4.3. Ακολουθίες Goodstein

Στη δεύτερη ενότητα επισημάνθηκε το αμφίβολο μαθηματικό περιεχόμενό των προτάσεων Gödel. Αυτό δεν συμβαίνει για το θεώρημα του Goodstein (1944), που σε αντιδιαστολή με τις προτάσεις Gödel, έχει πραγματικό μαθηματικό περιεχόμενο. Αποδεικνύεται ότι (Kirby και Paris, (1982)) το θεώρημα αυτό, δεν μπορεί να αποδειχτεί από το πρωτοβάθμιο αξιωματικό σύστημα της αριθμητικής του Peano μαζί με την αξιωματικοποιημένη πρωτοβάθμια λογική. Παρά το ότι διατυπώνεται μέσα στην πρωτοβάθμια γλώσσα της αριθμητικής. Αν το πρωτοβάθμιο σύστημα της αριθμητικής μπορούσε να αποδείξει αυτή την πρόταση, τότε θα αποδείκνυε και την συνέπειά του, πράγμα αδύνατο από το δεύτερο θεώρημα της μη-πληρότητας του Gödel (1931).

Λέμε ότι ένας φυσικός αριθμός έχει αναπτυχθεί σε *υπερβάση 2*, αν πρώτα τον γράψουμε σαν άθροισμα δυνάμεων του 2, μετά τους εκθέτες που θα εμφανιστούν τους γράψουμε κι' αυτούς σαν άθροισμα δυνάμεων του 2, το ίδιο για τους εκθέτες των εκθετών κ.ο.κ., μέχρις ότου η παράσταση δεν περιέχει παρά μόνο τους αριθμούς 1 και 2 . Για παράδειγμα

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2$$

Ανάλογα ορίζουμε τι σημαίνει ότι ένας αριθμός έχει αναπτυχθεί σε υπέρβαση 3, υπέρβαση 4, κ.τ.λ.. Είναι φανερό ότι για το ανάπτυγμα ενός αριθμού σε υπέρβαση μεγαλύτερη ή ίση από αυτόν, απλώς αφήνουμε τον αριθμό όπως είναι. Λ.χ. το 37 σε υπέρβαση 38 έχει απλώς τη μορφή 37.

Για τυχαίο φυσικό αριθμό m, η ακολουθία Goodstein για τον m

$$[m]_2,\quad [m]_3,\quad [m]_4,\quad [m]_5,\quad \ldots,\quad [m]_n,\quad \ldots$$

κατασκευάζεται ως εξής: Ξεκινάμε με τον m γραμμένο σε υπέρβαση 2, και τον συμβολίζουμε με $[m]_2$. Για τον δεύτερο όρο $[m]_3$, αντικα-θιστούμε πρώτα στο ανάπτυγμα $[m]_2$ το 2 με 3, μετά αφαιρούμε 1, και τέλος γράφουμε το αποτέλεσμα σε υπερβάση 3. Για το τρίτο όρο $[m]_4$, επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία. Αντικαθιστούμε στο $[m]_3$ το 3 με 4, μετά αφαιρούμε 1 και τέλος γράφουμε το αποτέλεσμα σε υπέρβαση 4. Παρόμοια και για τους υπόλοιπους όρους της ακολουθίας. Για παράδειγμα οι πέντε πρώτοι όροι της ακολουθίας Goodstein για το 26 είναι:

$$[26]_2 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2 \tag{11}$$

$$[26]_3 = (3^{3^3} + 3^{3+1} + 3) - 1 = 3^{3^3} + 3^{3+1} + 2 \tag{12}$$

$$[26]_4 = (4^{4^4} + 4^{4+1} + 2) - 1 = 4^{4^4} + 4^{4+1} + 1 \tag{13}$$

$$[26]_5 = (5^{5^5} + 5^{5+1} + 1) - 1 = 5^{5^5} + 5^{5+1} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}[26]_6 &= (6^{6^6} + 6^{6+1}) - 1 = 6^{6^6} + (6^{6+1} - 1) = \\ &6^{6^6} + 5\cdot 6^6 + 5\cdot 6^5 + 5\cdot 6^4 + 5\cdot 6^3 + 5\cdot 6^2 + 5\cdot 6 + 5\end{aligned} \tag{15}$$

Για να πάρουμε μια αίσθηση της ταχύτητας με την οποία αυξάνεται αυτή η ακολουθία σημειώνουμε ότι:

$[26]_2 = 26$, $[26]_3 \approx 10^{13}$, $[26]_4 \approx 10^{154}$, $[26]_5 \approx 10^{2100}$, $[26]_6 \approx 10^{32000}$

Κανείς άμεσα μπορεί να παρατηρήσει ότι κάθε ακολουθία Goodstein, ξεκινάει σαν γνησίως αύξουσα και αυξάνει πολύ γρήγορα. Αυτό που διαισθητικά μάλλον δεν περιμένουμε είναι ότι κάποτε αυτή η ακολουθία θα μηδενιστεί.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το θεώρημα του Goodstein:

Για κάθε φυσικό αριθμό m, η ακολουθία Goodstein για τον m τελικά μηδενίζεται, δηλαδή υπάρχει αριθμός n τέτοιος που $[m]_n = 0$ ή διαφορετικά

$$\forall m \exists n [m]_n = 0$$

Ίσως κάποιος να ισχυριστεί ότι πιθανόν ο αριθμός των βημάτων που απαιτείται για να φθάσει η ακολουθία το μηδέν για τυχόντα m να είναι τεράστιος, γι' αυτό δεν περιμένουμε αρχικά το θεώρημα να αληθεύει. Ο λόγος για τον οποίο διαισθητικά δεν συλλαμβάνουμε την αλήθεια του θεωρήματος είναι ότι γενικά απαιτείται ένας τεράστιος αριθμός βημάτων για να μηδενιστεί η ακολουθία. Ενώ η ακολουθία $[2]_n$ φθάνει το μηδέν μετά μόλις τρία βήματα και η $[3]_n$ μετά πέντε βήματα η $[4]_n$ φθάνει το μηδέν μετά από $n = 3 \cdot 2^{402653211} - 3 \approx 10^{10^9}$ βήματα.

Ας δούμε τι συμβαίνει στην ακολουθία Goodstein για το 26. Κατ' αρχάς, η αφαίρεση της μονάδας στους όρους (11), (12) και (13), επιδρά μόνο στον τελευταίο προσθεταίο του προηγουμένου όρου και μετά τρία βήματα αυτός εξαφανίζεται. Δηλαδή το τελευταίο 2 στον $[26]_2$ έγινε 3-1=2 στον $[26]_3$. Μετά έγινε 2-1=1 στον $[26]_4$, και μετά μηδενίστηκε. Μετά από αυτό, η αφαίρεση της μονάδας επιδρά σε δύναμη και αυτό, εφ' όσον πρέπει να έχουμε μόνο γνήσια αθροίσματα, μας υποχρεώνει σε εκθετική επανεγγραφή. Δεν πρόκειται λοιπόν ακριβώς για μια αθώα αφαίρεση μονάδος. Αν και ο επόμενος όρος της ακολουθίας είναι αριθμητικά κατά πολύ μεγαλύτερος, η εκθετική δομή του είναι ασθενέστερη. Από τη μια λοιπόν ενώ οι αριθμοί αυξάνουν από την άλλη η εκθετική δομή εξασθενίζει. Έτσι, συγκρίνοντας τις (14) και (15), παρατηρούμε ότι η εκθετική δομή στον $[26]_6$ είναι ασθενέστερη από αυτήν στον

$[26]_5$. Τελικά, μετά από ένα πεπερασμένο (αν και τεράστιο), πλήθος βημάτων όλοι οι εκθέτες εξαφανίζονται. Αυτό ισχύει για την οποιαδήποτε ακολουθία Goodstein. Φθάνει δηλαδή η ακολουθία $[\mathrm{m}]_{\mathrm{n}}$ να έχει κάποιο όρο $[\mathrm{m}]_{\mathrm{k}}$ όπου $[\mathrm{m}]_{\mathrm{k}} \leq \mathrm{k}$. Από εκεί και πέρα το μόνο που εφαρμόζεται για την παραγωγή όρων της ακολουθίας είναι η αφαίρεση της μονάδος. Οπότε η ακολουθία γίνεται γνησίως φθίνουσα, και κάθε όρος συνδέεται με τον επόμενό του δια της σχέσης $[\mathrm{m}]_{\rho+1} = [\mathrm{m}]_{\rho} - 1$ (για $\rho \geq \mathrm{k}$). Επομένως, μετά από $[\mathrm{m}]_{\mathrm{k}}$ το πλήθος βήματα (μετά το k), η ακολουθία θα μηδενιστεί.

4.4. Η Απόδειξη

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, το θεώρημα δεν μπορεί να αποδειχτεί μέσα στην πρωτοβάθμια αριθμητική. Κι' αυτό γιατί δεν μπορούμε αυστηρά να παρακολουθήσουμε την εξέλιξη της εκθετικής δομής των όρων μιας ακολουθίας Goodstein μέσα στα πλαίσια της αριθμητικής του Peano. Χρειάζεται να επεκταθεί η περιγραφική διαδικασία στους διατακτικούς.

Για την απόδειξη στην ακολουθία Goodstein για το m

$$[m]_2, \quad [m]_3, \quad [m]_4, \quad [m]_5, \quad \ldots, \quad [m]_n, \quad \ldots$$

αντιστοιχούμε μια ακολουθία διατακτικών

$$\alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \alpha_5, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots$$

όπου ο όρος α_{n} είναι ο διατακτικός που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε στον $[\mathrm{m}]_{\mathrm{n}}$ το n με το ω. Σκοπός αυτής της ακολουθίας των διατακτικών είναι να παρακολουθήσει την εξέλιξη της εκθετικής δομής των όρων της αντίστοιχης ακολουθίας Goodstein.

Για m = 26, έχουμε :

$$2^{2^2} + 2^{2+1} + 2 \quad < \quad \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega+1} + \omega$$

$$3^{3^3} + 3^{3+1} + 2 \quad < \quad \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega+1} + 2$$

$$4^{4^4} + 4^{4+1} + 1 \quad < \quad \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega+1} + 1$$

$$5^{5^5} + 5^{5+1} \quad < \quad \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega+1}$$

$$6^{6^6} + 6^{6+1} - 1 = 6^{6^6} + 5\cdot 6^6 + 5\cdot 6^5 + 5\cdot 6^4 + 5\cdot 6^3 + 5\cdot 6^2 + 5\cdot 6 + 5 \quad <$$

$$< \quad \omega^{\omega^\omega} + 5\cdot\omega^\omega + 5\cdot\omega^5 + 5\cdot\omega^4 + 5\cdot\omega^3 + 5\cdot\omega^2 + 5\cdot\omega + 5$$

Η δεξιά πλευρά των παραπάνω ανισοτήτων είναι εξ' αρχής κατά-σκευασμένη για να παρακολουθεί την φθίνουσα πορεία της εκθετικής δομής. Αλλά δεξιά βλέπουμε ότι έχουμε μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία διατακτικών.

Τώρα, για τυχαίο m, ισχύει

$$[\mathrm{m}]_{\mathrm{n}} \leq \alpha_{\mathrm{n}}$$

για κάθε φυσικό n, επειδή n < ω. Με επαγωγή μπορούμε να αποδείξουμε, ότι η ακολουθία των διατακτικών που αντιστοιχεί στην ακολουθία Goodstein για το m είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως θα έχει όρο $\alpha_k = 0$, (γιατί, όπως το τονίσαμε δεν υπάρχει άπειρη γνησίως φθίνουσα ακολουθία διατακτικών). Αν η ακολουθία $[m]_n$ συνεχίζονταν επ' άπειρο τότε η αντίστοιχη ακολουθία διατακτικών θα ήταν άπειρη, το οποίο δεν είναι αληθές. Άρα και η ακολουθία Goodstein για το m έχει όρο $[m]_k = 0$ για κάποιο k.

4.5. Τελικές Παρατηρήσεις

Το θεώρημα του Goodstein είναι μια πρόταση της πρωτοβάθμιας αριθμητικής, για μια ιδιότητα των φυσικών αριθμών. Η απόδειξη του όμως πρέπει να γίνει μέσα στο ευρύτερο πλαίσιο των διατακτικών αριθμών. Εν τούτοις, οι τελευταίοι δεν είναι παρά μια υπερπεπερασμένη παράθεση αντιτύπων (το ένα μετά το άλλο) της ακολουθίας (διάταξης) των φυσικών αριθμών. Αυτό μας επιτρέπει να επεκτείνουμε την εποπτική μας αντίληψη από τους φυσικούς στους διατακτικούς, με τρόπο τέτοιο ώστε από τον τρόπο κατασκευής τους οι διατακτικοί να μας είναι γνώριμοι. Ίσως ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής να μην έφθανε ποτέ να 'σκεφτεί' (όπως μας αρέσει να μιλάμε για υπολογιστές), έτσι ώστε να κατασκευάσει τους διατακτικούς. Γιατί όμως αυτό αποτελεί πρόβλημα για τα θεμέλια των μαθηματικών; Και γιατί αυτό σε τελευταία ανάλυση ενδιαφέρει τους μαθηματικούς;

5. Συμπεράσματα

Μια φορά ένας περιηγητής θέλησε να κάνει μια εμπορική ανταλλαγή με κάποιο πρωτόγονο. Η τιμή ενός ζώου τύπου Α ήταν δύο ζώα τύπου Β. Αφού έδωσε λοιπόν δύο ζώα τύπου Α, πήρε τέσσερα ζώα τύπου Β κι' ετοιμάσθηκε να φύγει. Αλλά ο πρωτόγονος τον σταμάτησε. Αυτός ο τρόπος ανταλλαγής τον υποψίασε. Έδωσε πίσω τα δύο ζώα του ξένου και πήρε τα τέσσερα δικά του. Μετά πήρε ένα ζώο Α και έδωσε δύο ζώα Β. Μετά πήρε το άλλο ζώο Α και έδωσε άλλα δύο ζώα Β. Φυσικά, ο πρωτόγονος μοιάζει να μην ξέρει ότι 2+2=4. Οφείλουμε όμως να αναγνωρίσουμε ότι η αμεσότητα πάνω στην οποία στηρίζει την εγκυρότητα της εμπορικής συναλλαγής είναι καθ' όλα ο σωστός τρόπος εγκυρότητας των μαθηματικών.
Στην προηγούμενη ενότητα προσπαθήσαμε να δείξουμε ότι τα αξιώματα του Peano, αλλά και κάθε αξιωματικό σύστημα εν γένει, αναζητά να θεμελιώσει την εγκυρότητα των μαθηματικών σε μία παρόμοιου τύπου αμεσότητα εποπτικής εμπειρίας. Το δείχνει καθαρά η παράσταση του 2+2=4 δια του τύπου ss0+ss0=ss(ss0+0)=ssss0 όπου η πράξη της πρόσθεσης εκφράζεται δια της συνάρτησης *επόμενος* (s_), η οποία περιγράφει με φαινομενολογική αυστηρότητα την γνώριμη σε όλους μας πράξη κατά την οποία ένα αντικείμενο παρατίθεται, στη σειρά μετά από κάποιο άλλο. Μπορεί λοιπόν ο πρωτόγονος να μην ξέρει ότι 2+2=4, δείχνει όμως να ξέρει τι είναι και τι κάνει αυτή η πράξη που σαν συνάρτηση ονομάζεται *επόμενος*, και δια της οποίας εκφράζονται τα αξιώματα του Peano.

Κάποτε ο μαθηματικός Στέλιος Πηχωρίδης έλεγε ότι για να ξέρω ένα θεώρημα θα πρέπει να το καταλάβω όπως καταλαβαίνω το 2+2=4.[25] Θα μπορούσε να είχε πει 'όπως καταλαβαίνω το 0+1=1. Για να καταλάβω κάτι που είναι σύνθετο πρέπει να μπορώ να το αναλύσω στα συστατικά που καταλαβαίνω, και εν συνεχεία να ξέρω πώς

[25] Προσωπική συνομιλία με Ε. Γ. το καλοκαίρι του 1973.

να το επανασυνθέσω. Αυτός είναι και ο τρόπος θεμελίωσης της αναλυτικής φιλοσοφίας. Αλλά αναλυτική και μηχανιστική φιλοσοφία δεν ταυτίζονται. Η φιλοσοφία του 20ου αιώνα έχει υποφέρει από αυτήν την ταύτιση περισσότερο από οτιδήποτε άλλο.

Στην παρούσα εργασία θεωρήσαμε αναγκαίο να παρουσιάσουμε σχετικά λεπτομερώς την κατασκευή των προτάσεων Gödel (αν και όχι με την τεχνική λεπτομέρεια που θα ικανοποιούσε ένα μαθηματικό), διότι αυτές δείχνουν αρκετά καθαρά τον στόχο του θεωρήματος της μη πληρότητας κατά της μηχανιστικής θεμελίωσης των μαθηματικών. Αυτό που είναι εντελώς αναγκαίο για τα μαθηματικά δεν είναι ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής για την απαρίθμηση των έγκυρων προτάσεων μιας μαθηματικής θεωρίας, αλλά μια γλώσσα αυστηρή με ισχυρές περιγραφικές ικανότητες. Να μπορούμε δηλαδή να *εκθέσουμε* με πλήρη λεπτομέρεια τις ιδέες μας στο χαρτί, ή οπουδήποτε αλλού και με τα οποιαδήποτε φυσικά αντικείμενα.[26] Κατασκευάζοντας έτσι μια μαθηματική *ιδέα* συμβολικά και *φυσικά* μαζί από τα συγκροτητικά της στοιχεία, η μαθηματική γλώσσα γίνεται παράλληλα η αυστηρή γλώσσα περιγραφής ενός συγκεκριμένου τύπου εμπειρικής εποπτείας για την περιγραφή της οποίας απαιτείται μια πρωτοβάθμια γλώσσα – σαν η γλώσσα των σχέσεων μεταξύ συγκεκριμένων αντικειμένων.

Ίσως τελικά να μην είναι και τόσο περίεργη η σύμπτωση άνθησης της αξιωματικής μεθόδου σχεδόν ταυτόχρονα με την παράλληλη ανάπτυξη της πρωτοβάθμιας λογικής. Αλλά, για να το πούμε ακόμα μία και τελευταία φορά, η γονιμότητα αυτής της αλληλεπίδρασης δεν εξαρτάται από το εάν ή όχι η λογική είναι αξιωματική. Ο σκοπός των λογικών αξιωμάτων δεν είναι περιγραφικός. Είναι να μας δώσει μέσω συντακτικών αποδείξεων ένα κατάλογο έγκυρων προτάσεων. Αλλά ένας τέτοιος κατάλογος είναι και το τελευταίο πράγμα που ενδιαφέρει ένα μαθηματικό προσκολλημένο σε μια νέα και ενδιαφέρουσα ιδέα. Αν ο μαθηματικός θέλει μια πρωτοβάθμια λογική είναι γιατί θέλει μια αυστηρά παραγωγική και περιγραφικά ισχυρή γλώσσα για να μπορεί να εκφράσει με πλήρη σαφήνεια το περιεχόμενο της ιδέας του, αυτό ακριβώς που θέλει να πεί. Το εάν ή όχι αυτή η λογική είναι αξιωματική είναι κάτι το επί πλέον.

Για ένα μεταμοντέρνο το θεώρημα του Gödel δείχνει ότι τελικά η γλώσσα σημασιολογικά μπερδεύεται με τον εαυτό της και ότι τελικά *σημαίνον* και *σημαινόμενο* δεν μπορούν αυστηρά να διαχωριστούν. Νομίζουμε ότι με τα όσα είπαμε παραπάνω γίνεται καθαρό ότι μια τέτοια ερμηνεία περί *αυστηρότητας* προϋποθέτει (τουλάχιστον για τα μαθηματικά), την ακλόνητη προσήλωση σε μηχανιστικές αρχές φιλο-σοφίας. Όπως ήδη είπαμε, ο ίδιος ο Gödel ήταν Πλατωνιστής και όχι μεταμοντέρνος.

Για να συνοψίσουμε: αυτό που το θεώρημα του Gödel δείχνει φιλοσοφικά είναι ότι παρά τις προσδοκίες ορισμένων φιλοσοφικών σχολών γύρω στις αρχές του 20ου αιώνα να θεμελιώσουν τα μαθηματικά μηχανιστικά, γιατί έτσι θα γλιτώναμε από όλους τους κινδύνους της εποπτείας, υπάρχουν τελικά αντιφάσεις οι οποίες προκύπτουν από μεθόδους καθαρά μηχανιστικές. Οι μηχανιστική φιλοσοφία δεν είναι τόσο διάφανη και τόσο στέρεα όσο θα νόμιζε κανείς. Αυτοί είναι άλλωστε και οι λόγοι για τους οποίους ο Gödel έδωσε ιδιαίτερη προσοχή στο πρόγραμμα του Husserl

[26] Άλλωστε, για ένα φυσικό, στη θεωρητική μελέτη λ.χ. του προβλήματος των δύο σωμάτων, η γη και ο ήλιος είναι δύο μαθηματικά σημεία, και η τροχιά της γης γύρω από τον ήλιο ορίζει ένα μαθηματικό επίπεδο. Σαν οντότητες ενός μοντέλου, η γη και ο ήλιος είναι ακριβώς υλικά σημεία.

το οποίο αναζητούσε τα θεμέλια της επιστήμης πάνω στην διαφάνεια της ίδιας της συνείδησης.

Βιβλιογραφία

BACHELARD, SUZANNE: "A Study of Husserl's Formal and Transcendental Logic", σ. 54, Northwestern U. press, 1968.

BOOLE, GEORGE: "An Investigation of the Laws of Thought", Dover

DAWSON, J. W.: Scientific American Αύγουστος, Ελλ. Έκδοση, 1999, τομ. Α, τ. 7, σ. 96

DEVLIN, KEITH: "Mathematical Patterns", Scientific American Library, σ. 54, 1994.

ΔΟΞΙΑΔΗΣ, ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ: «Ο Θείος Πέτρος και η Εικασία του Goldbach», σ. 53, Εκδ.Καστανιώτη , 1993.

FINDLAY, JOHN: "Gödelian Sentences: A Non-Numerical Approach", *Mind*, pp. 259-265, 1941.

GÖDEL, KURT: "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I." *Monatschefte für Mathematik und Physik* 38: 173-198, 1931. Μεταφρασμένο στο *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic 1879- 1931*, edited by Jean van Heiejenoort, 596-616. Cambridge, MA: Harvard University Press.

GOODSTEIN, R. L.: "On the restricted ordinal theorem" *Journal of Symbolic Logic* 9: 33-41. 1944.

HILBERT, DAVID: "Foundations of Geometry", (tr. E.J. Townsend), Open Court, Chicago 1902. "Θεμέλια της Γεωμετρίας", (Ελ. Μετ. Σ. Παπαδόπουλος), Τροχαλία, 1995.

HINTIKKA, JAAKKO: "Logic, Language-Games and Information", Oxford, 1973.

HINTIKKA, JAAKKO: "The Principles of Mathematics Revisited" Cambridge U. press, 1996.

HINTIKKA, JAAKKO: "Hilbert Vindicated?", στο *Language Truth and Logic in Mathematics*, Selected Papers, vol. 3, Kluwer Academic, 1998.

KIRBY, L. & PARIS, J.: "Accessible independence results for Peano Arithmetic." *Bulletin of the London Mathematical Society* 14:285- 293, 1982.

LAKATOS, IMRE: "Proofs and Refutations", Warrall and Zahar (eds), Cambridge U. press, (1991).

POLYA, GEORG: "Mathematics and Plausible Reasoning", vols, I, II, Princeton U. Press, (1954).

ROTA, GIAN-CARLO: “Indiscrete Thoughts”, Birkhäuser, (1997)

RUSSELL, BERNARD: “Recent Work on the Principles of Math- ematics”, *The International Monthly*, 4, (July 1901): 83-101. Επανέκδοση από *The Collected Works of Bertrand Russell*, vol. .3, p.366.

RUSSELL, BERNARD: “Introduction to Mathematical Philosophy”, Simon and Schuster, 1971.

RUSSELL, BERNARD: “The Principles of Mathematics”, β΄έκδ. Allen &Unwin (1937)

WITTGENSTEIN, LUDWIG: “Remarks on the Foundations of Mathematics”, (tr. G.E.M. Anscombe), Oxford Blackwell, 1978