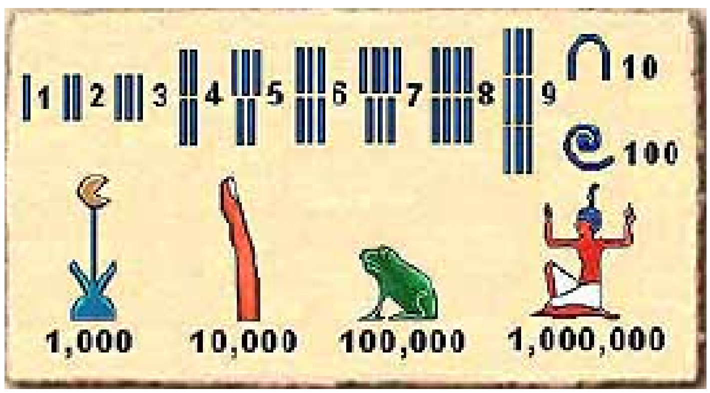
Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΙΔΕΩΝ ΣΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ας ξεκινήσουμε την μελέτη μας από την ετυμολογία της λέξεως ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Με την πρώτη ματιά και χωρίς ιδιαίτερες γνώσεις γλωσσολογίας διακρίνουμε ότι είναι σύνθετη και σημαίνει «γης μέτρηση». Βέβαια στην εποχή μας δεν είναι μόνο αυτό το αντικείμενό της. Όπως συμβαίνει και στις άλλες επιστήμες, καθώς ο ανθρώπινος νους εξελίσσεται αποκαλύπτοντας σταδιακά τις δυνατότητές του, τα αρχικά «γήινα» ερεθίσματα, γίνονται οι σπινθήρες που προωθούν την διάνοιά μας σε εξερεύνηση όλο και λεπτοτέρων δομών και λειτουργιών του Σύμπαντος.

ΟΙ ΑΙΓΥΠΤΙΟΙ

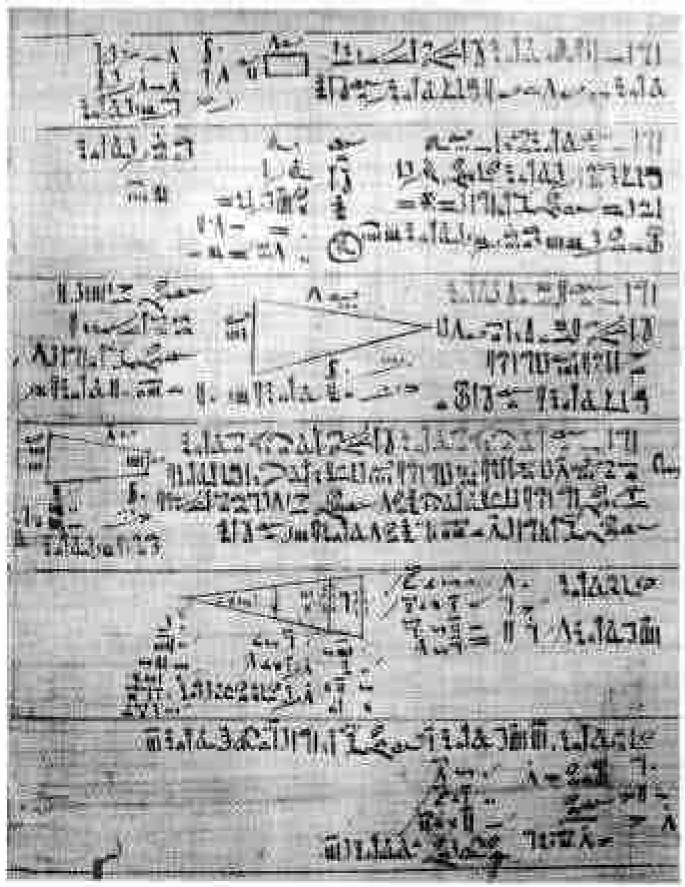
Ανατρέχοντας προς το παρελθόν και αναζητώντας τις απαρχές αυτής της επιστήμης οδηγούμαστε που αλλού Ανατολικά και συγκεκριμένα στην Αίγυπτο. Ο Ηρόδοτος μας



Τα αριθμητικά σύμβολα των Αιγυπτίων

πληροφορεί ότι οι κάτοικοι της χώρας αυτής εξαναγκάζονταν ύστερα από τις πλημμύρες του Νείλου να ψάχνουν για τα όρια των κτημάτων τους, αφού η λάσπη που εναπέθετε ο ποταμός τα κάλυπτε. Αυτή η ανάγκη έγινε και η αιτία να εμφανιστούν οι ειδικοί με τις απαραίτητες γνώσεις για τέτοιου είδους μετρήσεις. Οι Έλληνες, που είχαν πάντοτε σχέσεις με τους Αιγυπτίους, τους ονόμασαν «αρπεδονάπτες», από το όργανο που χρησιμοποιούσαν για τις μετρήσεις τους, ένα σχοινί με κόμβους σε καθορισμένες θέσεις. Έχουν σωθεί πάπυροι που αναφέρουν τέτοιους υπολογισμούς και χρονολογούνται από το

2000 π.Χ που σημαίνει ότι αυτές οι γνώσεις υπήρχαν από παλαιότερα. Ας δούμε μερικούς από αυτούς:



Ο περίφημος πάπυρος Rhind (1650 π.Χ), ένα καλό παράδειγμα των αιγυπτιακών μαθηματικών.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ

Ένας στρογγυλός αγρός έχει διάμετρο 9 σετ[1]. Πόσο είναι το εμβαδόν του;

Λύση

Πάρε το 1/9 της διαμέτρου. έχεις 1 και υπόλοιπο 8. Πολλαπλασίασε το 8 με το 8. Αυτό κάνει 64. άρα το έδαφος του αγρού είναι 64 σέτατ[2].

---

[1] Μονάδα μήκους των Αιγυπτίων

[2] Μονάδα εμβαδού των Αιγυπτίων.

Εφάρμοζαν εδώ ουσιαστικά τον τύπο: Ε= $(δ-\frac{1}{9}δ)^2$

όπου δ η διάμετρος του κύκλου και στην συγκεκριμένη περίπτωση δ=9. Με τον σημερινό τύπο Ε=$πρ^2$ βρίσκουμε Ε=63,585 που σημαίνει ότι οι Αιγύπτιοι δεν έπεφταν και πολύ έξω στους υπολογισμούς τους.

ΟΓΚΟΣ ΠΥΡΑΜΙΔΑΣ

Εδώ χρησιμοποιούσαν μία μέθοδο που είναι στην πραγματικότητα εφαρμογή του γνωστού τύπου

$V=\frac{1}{3}\cdot$ (εμβαδόν βάσεως)·(ύψος)

Με την ίδια ακρίβεια υπολόγιζαν και τον όγκο της κόλουρης πυραμίδας.

Τα προβλήματα αυτά και άλλα παρόμοια αναφέρονταν σε πρακτικές ανάγκες και σαν τέτοια έχουν καταγραφεί, π.χ να υπολογιστεί η χωρητικότητα μιας σιταποθήκης , ή ο αριθμός των πλίνθων για την κατασκευή ενός συγκεκριμένου κτίσματος, ή πόσο σιτάρι χρειάζεται για την παρασκευή μίας συγκεκριμένης ποσότητας άρτου.

ΟΙ ΒΑΒΥΛΩΝΙΟΙ

Ο άλλος μεγάλος πολιτισμός της Μέσης Ανατολής είναι αυτός που αναπτύχθηκε στην Μεσοποταμία. Και εδώ συναντάμε παρόμοια πρακτικά προβλήματα όπως:

Έχω σχεδιάσει το περίγραμμα μίας πόλης. Δεν γνωρίζω πόσο μήκος έχει. Ξεκίνησα από τον πρώτο κύκλο, περπάτησα 5 πέρα απ αυτόν (απομακρυνόμενος από το κέντρο) κατά όλες τις διευθύνσεις και σχεδίασα ένα δεύτερο περίγραμμα. Το ενδιάμεσο εμβαδόν είναι 6,15. Να υπολογίσεις τις διαμέτρους της νέας και της παλαιάς πόλης.

Να και η λύση:

«Πολλαπλασίασε την αύξηση 5 με 3. Θα βρεις 15.

Πάρε το αντίστροφο του 15 και πολλαπλασίασέ το με 6,15που είναι το ενδιάμεσο εμβαδόν. Θα βρεις 25.

Γράψε το 25 δύο φορές.

Πρόσθεσε σ’ αυτό το 5, που περπάτησες, και ύστερα αφαίρεσε το 5 από το ίδιο. Θα βρεις 30 για την νέα πόλη και 20 για την παλιά.»

Η πινακίδα Plimpton 322 (1900-1600 π.Χ). Περιέχει παραδείγματα πυθαγορείων τριάδων.

Οι Βαβυλώνιοι διετύπωναν προβλήματα στα οποία το ζητούμενο ήταν μήκη ή εμβαδά. Από τον τρόπο που εκτελούσαν τους υπολογισμούς τους όμως, προκύπτει ότι γνώριζαν διάφορα θεωρήματα όπως το θεώρημα που σήμερα ονομάζουμε Πυθαγόρειο.

Εκτός από την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων είχαν αναπτύξει και μεθόδους επιλύσεως αλγεβρικών, όπως

α. η επίλυση συστημάτων εξισώσεων από τις οποίες μόνο η μία είναι γραμμική

β. Επίλυση δευτεροβαθμίων εξισώσεων π. χ $\chi^2+6\chi=16$.

γ. Εύρεση τετραγωνικών ριζών.

Είναι γνωστή άλλωστε η πινακίδα πού χρονολογείται από το 1900-1600 π.Χ από την οποία φαίνεται ότι ήσαν γνώστες των Πυθαγορείων τριάδων.[3]

[3] Πυθαγόρειες τριάδες είναι τριάδες ακεραίων αριθμών (α,β,γ) για τους οποίους ισχύει η σχέση $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$ όπως (3,4,5) ή (5,12,13) και αντιστοιχούν σε μήκη πλευρών ορθογωνίων τριγώνων.

Βαβυλωνιακή πήλινη πλάκα. Τετράγωνο και διαγώνιος.

Διαφαίνεται μάλιστα ότι είχαν προσεγγίσει αρκετά στην γνώση του δεσμού της Άλγεβρας με την Γεωμετρία και χρησιμοποιούσαν τα σχήματα της δεύτερης για να δώσουν υπόσταση στους αριθμούς.

Σε αντίθεση με τους Αιγυπτίους όμως στα Βαβυλωνιακά μαθηματικά δεν εμφανίζονται μόνο προβλήματα εφαρμογών. Το πρόβλημα του υπολογισμού της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου, που βρέθηκε χαραγμένο σε μια πινακίδα, δεν εμφανίζεται στην καθημερινή ζωή. Η ανυπαρξία όμως κατάλληλου συμβολισμού δεν τους επέτρεπε να διατυπώσουν γενικές μεθόδους. Γι' αυτό το μόνο πού μπορούσαν να κάνουν ήταν να δίνουν έναν μεγάλο αριθμό προβλημάτων που είχαν λυθεί με τον ίδιο τρόπο και στο τέλος των λύσεων αυτών να αναφέρουν σχεδόν πάντα ότι: «Αυτή είναι η μέθοδος» Σε κανένα από τα μέχρι τώρα ανακαλυφθέντα γραπτά τους δεν υπάρχει πρόταση που να τέθηκε σαν θεώρημα και να αποδείχθηκε.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό των βαβυλωνιακών μαθηματικών ήταν η ανάμιξη των διαστάσεων. Συγκεκριμένα πρόσθεταν ή αφαιρούσαν μήκος από εμβαδόν.

Η διάκριση των διαστάσεων και η αφαιρετική διαδικασία έκαναν την εμφάνισή τους αργότερα όταν στον ορίζοντα ανέτειλε το πνεύμα μίας άλλης φυλής, για την οποία θα μιλήσουμε αμέσως μετά και η οποία έμελλε να καθοδηγήσει την ανθρωπότητα μέχρι τις μέρες μας και ποιος γνωρίζει μέχρι πότε;

ΟΙ ΕΛΛΗΝΕΣ

Με τα προβλήματα που αναφέραμε προηγουμένως, αλλά και σε όσα έχουν ανακαλυφθεί από τις αρχαιολογικές έρευνες, γνωρίζουμε πώς εκτελούσαν οι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι τους λογαριασμούς τους. Γιατί όμως εφάρμοζαν την συγκεκριμένη μέθοδο και όχι μιαν άλλη; Σε ποιές γενικές αρχές στηρίζονταν; Τελικά πώς μας πείθουν ότι η μέθοδός τους αυτή δίνει σωστά αποτελέσματα πάντοτε;

Λέγεται ότι ο τρόπος της σκέψεώς τους ήταν απόρροια του απολυταρχικού καθεστώτος διοικήσεώς τους, πού δεν άφηνε περιθώρια για κριτική σκέψη. Ότι επεβάλλετο από την εξουσία ως αλήθεια γινόταν δεκτό χωρίς αμφισβήτηση. Από την άλλη όμως το ερώτημα ως προς την πηγή, των κατά τα άλλα αρκετά ορθών μεθόδων τους, παραμένει. Ίσως να τα είχαν βρει από κάποιους άλλους. Ποιοι ήσαν αυτοί οι άλλοι όμως; Οι πρόγονοί τους ή είναι ό,τι διασώθηκε από κάποιον προγενέστερο πολιτισμό ή... Μέχρι να γίνει αυτή η ανακάλυψη οι Έλληνες θα θεωρούνται οι θεμελιωτές των επιστημών όπως τις αντιλαμβανόμαστε σήμερα. Αποδέσμευσαν την σκέψη τους από τα προβλήματα της καθημερινότητας και ανύψωσαν την διανοητική τους προσπάθεια στην αναζήτηση της αρχής των όντων, το πως και το γιατί.

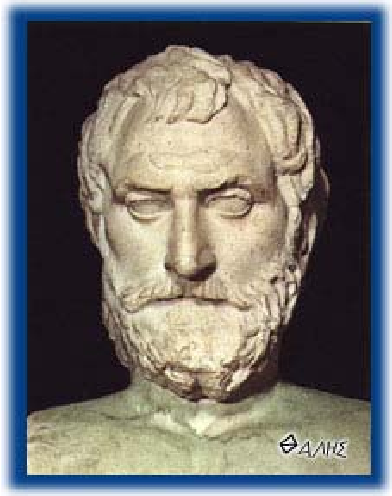
Ο ΘΑΛΗΣ

Ο πρώτος γνωστός έλληνας μαθηματικός είναι ο Θαλής(600 π.Χ). Είναι ο πρώτος πού διετύπωσε γενικές προτάσεις πού αφορούν τις ιδιότητες των σχημάτων. Κάποιες από αυτές είναι:

1. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες της βάσεως είναι ίσες.

2. Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

3. Αν σε δύο τρίγωνα η μία πλευρά του ενός είναι ίση με μία πλευρά του άλλου και οι γωνίες που πρόσκεινται στην πρώτη πλευρά είναι ίσες με τις γωνίες που πρόσκεινται στην άλλη, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



Θαλής ο Μιλήσιος

4. Κάθε διάμετρος κύκλου τον χωρίζει σε δύο ίσα μέρη.
5. Κάθε γωνία πού εγγράφεται σε ημικύκλιο είναι ορθή.

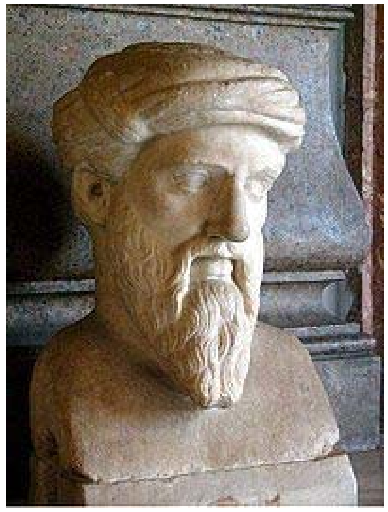
Δεν έχει σωθεί κάποιο κείμενο πού να μας διαφωτίζει για τον τρόπο που απέδειξε ο Θαλής τις προτάσεις αυτές. Προσπάθησε όμως με κάποια λογικά επιχειρήματα να δικαιολογήσει τις ιδιότητες που έχουν τα γεωμετρικά σχήματα. Αργότερα θα δούμε την τελική μορφή πού πήρε αυτή η επιχειρηματολογία.

ΟΙ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΙ

Με την πάροδο του χρόνου όλο και περισσότερες προτάσεις ανακαλύπτονταν, και σε κάθε νέα δινόταν απόδειξη πού στηρίζονταν στις ήδη γνωστές.

Προς το τέλος του 6ου αιώνα π.Χ ο Πυθαγόρας ιδρύει στον Κρότωνα της Κάτω Ιταλίας την περίφημη Σχολή του. Ήταν ήδη ενήμερος των γνώσεων των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων αφού για μία εικοσαετία είχε σπουδάσει στις μυστηριακές σχολές των χωρών αυτών.

Το ήδη υπάρχον σύστημα γνώσεων επιτρέπει στους Πυθαγόρειους να αποδείξουν το θεώρημα που έμεινε γνωστό στην ιστορία με το όνομά τους. Μέσω του θεωρήματος αυτού ανακαλύπτουν τους άρρητους αριθμούς. Απέδειξαν προτάσεις σχετικές με τις παράλληλες ευθείες και βρήκαν μεθόδους υπολογισμού εμβαδών. Στους πυθαγόρειους αποδίδεται η γνώση ότι τα τετράγωνα, τα ισόπλευρα τρίγωνα και τα κανονικά εξάγωνα είναι τα μόνα κανονικά σχήματα με τα οποία μπορούμε να καλύψουμε πλήρως μία επίπεδη επιφάνεια..



Πυθαγόρας ο Σάμιος

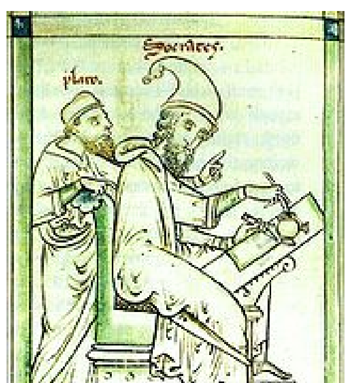
Το σύμβολο αναγνωρίσεως των μελών της σχολής ήταν τα πεντάλφα που σχηματίζεται από τις διαγώνιους ενός κανονικού πενταγώνου. Τις ιδιότητες του σχήματος αυτού γνώριζαν πολύ καλά καθώς και την κατασκευή του η οποία απαιτεί την διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο, την «χρυσή τομή» όπως ονομάστηκε αργότερα. Κατά τον Πρόκλο η λύση αυτού του προβλήματος είναι ένα από τα εξοχότερα επιτεύγματα των Πυθαγορείων.

Εκτός όμως των επί μέρους ανακαλύψεων η επιστήμη στην μορφή που εξελίχθηκε μέχρι τώρα οφείλει στον Πυθαγόρα δύο πράγματα α) την μεθοδική κατάταξη της σπουδαζομένης ύλης και β) την ανάγκη υπάρξεως ενός συνόλου ορισμών όλων των εξεταζομένων εννοιών. Αυτό άλλωστε διαπιστώνεται και από τον σύγχρονο μαθηματικό και φιλόσοφο σερ Μ. Ράσελ ο οποίος ομολογεί ότι ο τρόπος αναπτύξεως του συνόλου των κλάδων της επιστήμης ακολουθεί τις αρχές πού διετυπώθησαν για πρώτη φορά στην Σχολή του Κρότωνα. Είναι γνωστή άλλωστε η διαίρεση των μαθηματικών, από τον Πυθαγόρα, σε τέσσερις κλάδους: Αριθμητική, Μουσική, Γεωμετρία, Αστρονομία, (*τετραόδιον*) η οποία θεωρήθηκε τόσο επιτυχής ώστε να διδάσκεται στα σχολεία έως την εποχή της Αναγεννήσεως.

Βέβαια ο σκοπός τη σχολής δεν ήταν μόνο η ανακάλυψη νέων γνώσεων αλλά η δημιουργία ενός συστήματος ιδεών για την ερμηνεία του κόσμου και την γνώση του εαυτού μας. Το «γνώθι σαυτόν» πού είχε εγχαραχθεί σε μία προμετωπίδα του μαντείου των Δελφών έδινε το στίγμα για τον εστιασμό των προσπαθειών των προγόνων μας. Συμβαίνει πολλές φορές οι νεότεροι να παίρνουν ένα τμήμα μίας διδασκαλίας και να το εξελίσσουν αγνοώντας το υπόλοιπο οικοδόμημα. Έτσι συνέβη και με τον Πυθαγόρα. Επειδή ένα τμήμα της διδασκαλίας του ήταν καλυμμένο με το πέπλο του μυστικισμού, με αποτέλεσμα να μην είναι κατανοητό από τους αμύητους, θεωρήθηκε ως ανάξιο λόγου για επί πλέον μελέτη και ενασχόληση. Έφθασαν μάλιστα μερικοί να κάνουν και την ανόητη υπόθεση ότι οι Πυθαγόρειοι έπνιξαν έναν συνάδελφό τους ο οποίος έκανε γνωστή στον έξω κόσμο την ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών. Ποιοι, αυτοί πού από σεβασμό στην ζωή είχαν απαλείψει από το διαιτολόγιό τους το κρέας!

Ο ΠΛΑΤΩΝ

Βασική ιδέα του φιλοσοφικού συστήματός του, το οποίο αναπτύσσεται υπό μορφή διαλόγων του δασκάλου του Σωκράτη με άλλους, είναι ότι ασυναίσθητα τα γνωρίζουμε



Πλάτων και Σωκράτης από μία εικόνα του μεσαίωνα.

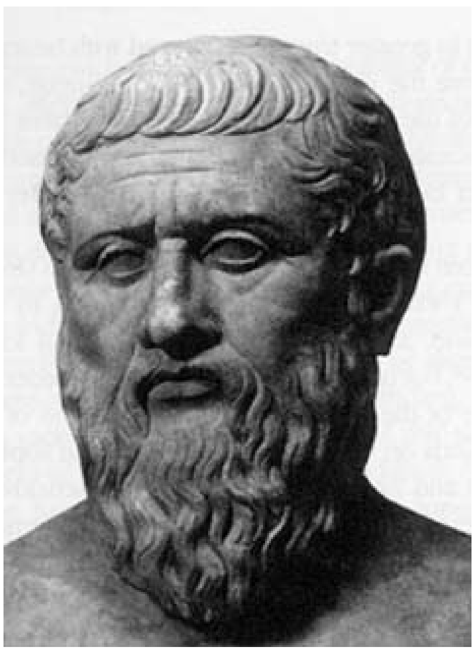
όλα και δεν μένει παρά να ερωτηθούμε κατάλληλα για να φθάσουμε στην αλήθεια.

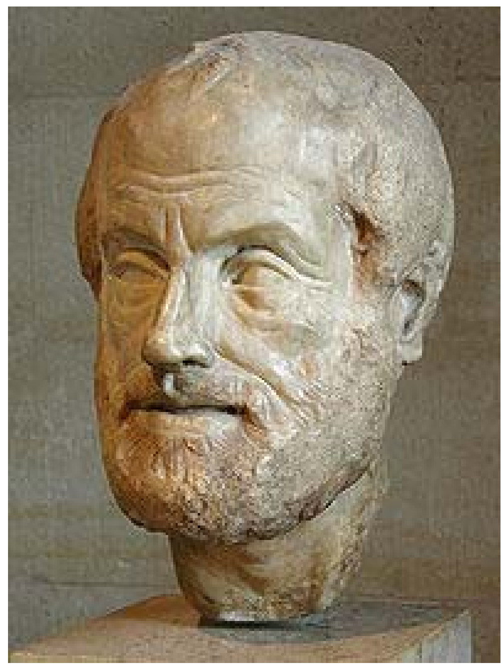
Η σπουδαιότητα πού αποδίδει ο Πλάτων στην Γεωμετρία εκφράζεται με το απόφθεγμα «Μηδείς αγεωμέτρητος εισήτω» που υπήρχε στην είσοδο της σχολής του την Ακαδημία.

Ρωμαϊκό μωσαϊκό που παριστάνει την ακαδημία του Πλάτωνα

Το αντικείμενο της Γεωμετρίας, το σχήμα, παύει να έχει εξάρτηση από την φυσική ύλη. Το ευθύγραμμο τμήμα δεν είναι το σχεδίασμα που ζωγραφίζουμε στο χαρτί, επειδή ένα ευθύγραμμο τμήμα δεν έχει πλάτος. Ο κύκλος που σχεδιάζουμε με τον διαβήτη δεν είναι ο πραγματικός κύκλος γιατί όσο προσεκτικά και αν τον σχεδιάσουμε θα έχει ατέλειες. Τελικά οτιδήποτε σχήμα και αν σχεδιάσουμε δεν είναι παρά η ατελής εικόνα των αφηρημένων μαθηματικών εννοιών. Μ' αυτό τον τρόπο φθάνουμε στο συμπέρασμα ότι οι ιδιότητες πού πιθανόν ανακαλύψαμε σε ένα σχεδίασμα δεν είναι βέβαιο πώς είναι και πραγματικές ιδιότητες του σχήματος. Άλλωστε όλες οι μετρήσεις που κάνουμε δεν είναι απολύτως ακριβείς επειδή δεν υπάρχει όργανο που να μετράει με απόλυτη ακρίβεια. Ποιο όργανο μας απομένει επομένως για να μελετήσουμε τις ιδιότητες των σχημάτων; Δεν είναι άλλο από την διάνοιά μας. Αιώνες αργότερα ο Καρτέσιος έκανε την διαπίστωση «σκέπτομαι άρα υπάρχω».

Δεν έχουμε παρά να στηριχτούμε σε λογικά επιχειρήματα για να εξάγουμε συμπεράσματα. Όσο για τα σχεδιάσματα δεν έχουν παρά μόνο υποβοηθητική αξία. Εδώ έγκειται η μεγαλειώδης προσφορά των Ελλήνων, στην εξελικτική πορεία του ανθρωπίνου γένους. Προσφέρουν στην ανθρωπότητα την χρήση της λογικής όπως ο πρόγονός μας ο Προμηθέας προσέφερε την φωτιά.





Πλάτωνας και Αριστοτέλης

Για τον Πλάτωνα τα μαθηματικά δεν είναι αυτοσκοπός αλλά βοηθούν τον φιλόσοφο να απελευθερωθεί από τις ατέλειες του φυσικού κόσμου και να προχωρήσει στην αναζήτηση απολύτων ιδεών.

Ο ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ

Ενώ ο Πλάτων εστίαζε την προσοχή του στην **φύση των μαθηματικών αντικειμένων** Αριστοτέλης ενδιεφέρετο περισσότερο για την **μέθοδο**. Δικαίως λοιπόν θεωρείται ως ο θεμελιωτής της Λογικής της οποίας ένα σημαντικό τμήμα είναι η Μαθηματική Λογική.

Για τον Αριστοτέλη σε κάθε επιστήμη ανευρίσκονται τρία βασικά συστατικά: οι ***αποφάνσεις***, οι ***έννοιες*** και οι ***σχέσεις.***

Ας δούμε από ένα παράδειγμα σε κάθε περίπτωση:

Απόφανση: Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα δύο ορθών γωνιών.

Έννοιες: «Άθροισμα γωνιών», «τρίγωνο»

Σχέση: «είναι ίσο με»

Κάθε μαθηματική απόφανση πού μπορεί να αποδειχθεί ονομάζεται **θεώρημα.** Στα μαθηματικά δεν δεχόμαστε ότι αληθεύει μία απόφανση αν δεν αποδείξουμε την ορθότητά της. Κάθε θεώρημα, λοιπόν, αποδεικνύεται αν στηριχθούμε σε κάποια άλλα ήδη γνωστά. Πρέπει όμως και αυτά να έχουν αποδειχθεί κ.ο.κ. Είναι φανερό ότι αυτό δεν μπορεί να συνεχίζεται χωρίς τέλος. Κάπου πρέπει να υπάρχει μία αρχή , η οποία σηματοδοτεί και τα όρια της λογικής. Οι αποφάνσεις που τις δεχόμαστε αληθείς χωρίς να έχει στηριχτεί σε απόδειξη η αλήθειά τους ονομάζονται **αξιώματα** ή **αιτήματα**. Μία επιστήμη η οποία στηρίζεται σε ένα τέτοιο σύστημα θεωρημάτων ονομάζεται **παραγωγική**

Να δύο αποφάνσεις που μπορούμε να τις δεχθούμε σαν αξιώματα:

1. Αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα , τα υπόλοιπα είναι ίσα.
2. Το μέρος είναι μικρότερο του όλου.

Ας προχωρήσουμε τώρα στις έννοιες με ένα παράδειγμα:

Έχουμε ονομάσει *ισοσκελές* το *τρίγωνο* που έχει δύο όσες πλευρές. Επομένως για να γνωρίζουμε τι είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο πρέπει να γνωρίζουμε τι είναι τρίγωνο:

Τρίγωνο είναι ένα *πολύγωνο* με τρεις πλευρές.

Τι είναι πολύγωνο όμως;

Πηγαίνοντας μ' αυτό τον τρόπο προς τα πίσω προχωρούμε χωρίς τελειωμό. Αναγκαζόμαστε λοιπόν να πάρουμε ως αφετηρία κάποιες έννοιες **θεμελιώδεις** χωρίς να τις ορίσουμε. Τέτοιες είναι οι έννοιες «σημείο» «ευθεία», «επίπεδο». Συμφώνως με τον Αριστοτέλη πάντα, δεν ορίζουμε τις θεμελιώδεις έννοιες, αλλά πρέπει να αποσαφηνίζουμε το νόημά τους, κάτι που δεν ισχύει σήμερα. Με άλλα λόγια κάθε έννοια πρέπει να ακολουθείται από μία απόφανση που να εκφράζει τις ουσιώδεις ιδιότητές της. π.χ η έννοια «σημείο» ακολουθείται από την απόφανση «το σημείο δεν έχει διαστάσεις»

Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Την «ηρωική» εποχή της αναζητήσεως και των ανακαλύψεων διαδέχεται η εποχή της ταξινομήσεως των γνώσεων και της δημιουργίας ενός ολοκληρωμένου μαθηματικού συστήματος.

Ο Ευκλείδης

Από διάφορες αναφορές συγγραφέων μαθαίνουμε ότι από το 400 π.Χ περίπου είχε παρουσιαστεί από τον Ιπποκράτη τον Χίο μία συλλογή Στοιχείων. Στοιχεία ονόμαζαν οι πρόγονοί μας ένα σύστημα μαθηματικών προτάσεων βασισμένο σε αξιώματα. Τα παλαιότερα Στοιχεία που διεσώθησαν είναι αυτά του Ευκλείδη. Ο λόγος που διαφυλάχτηκαν τα έργα του είναι όχι τόσο η ανακάλυψη νέων εξαγόμενων αλλά η εξαιρετική διδασκαλική του ικανότητα η οποία φαίνεται και μέσα από τα έργα του. Δεν είναι τυχαίο άλλωστε ότι τα Στοιχεία του διδάσκονταν αυτούσια στα σχολεία μέχρι τις αρχές του αιώνα μας.

Η όλη εργασία του στηρίζεται στις απόψεις του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη και αυτό φαίνεται από την αρχή του έργου του όπου υπάρχει ένας κατάλογος με 23 **ορισμούς** όπως:

Σημείο είναι ότι δεν έχει μέρος.

Γραμμή είναι μήκος χωρίς πλάτος.

Οι ορισμοί αυτοί εκφράζουν το νόημα των **Θεμελιωδών εννοιών** : σημείο, γραμμή, ευθεία γραμμή, επιφάνεια, επίπεδο.

Κατόπιν διατυπώνει τις **κοινές έννοιες ή αξιώματα:**

Αυτά που είναι ίσα προς το ίδιο είναι και μεταξύ τους ίσα.

Αν σε ίσα προστεθούν ίσα, οι ολότητες είναι ίσες.

Το εξώφυλλο λατινικής μετάφρασης των στοιχείων του Ευκλείδη από αραβικό χειρόγραφο (1309-1316)

Τα Στοιχεία στηρίζονται σε πέντε **αιτήματα** τα οποία αρχίζουν με το «Ζητείται να γίνει παραδεκτό» όπως:

Ζητείται να γίνει παραδεκτό ότι από οποιαδήποτε σημείο στο οποιαδήποτε σημείο άγεται ευθεία γραμμή.

Βέβαια το πιο δημοφιλές το οποίο απασχόλησε για πολλούς αιώνες τους μαθηματικούς και έγινε η αιτία για την κατασκευή νέων γεωμετριών, είναι αυτό που, μία ισοδύναμη έκφρασή του αναφέρει ότι: *από σημείο εκτός ευθείας άγεται μόνο μία παράλληλη προς αυτήν.*

Με υλικό τις ανακαλύψεις των παλαιοτέρων και με γνώμονα τις θέσεις του Αριστοτέλη και του Πλάτωνα δημιουργούνται από τον Ευκλείδη τα «Στοιχεία» που γίνονται η βάση στην οποία οικοδομείται η Γεωμετρία και γενικότερα τα Μαθηματικά τους επόμενους αιώνες. Ο Αρχιμήδης, ο Ερατοσθένης, ο Ήρων, ο Διόφαντος, ο Πτολεμαίος, ο Πάππος είναι οι επιφανέστεροι αντιπρόσωποι αυτής της εποχής. Την εποχή αυτή ρίφθηκαν και οι πρώτοι σπόροι της δημιουργίας νέων κλάδων της Μαθηματικής επιστήμης όπως του Ολοκληρωτικού Λογισμού και της Άλγεβρας.

Η ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΤΗΝ ΕΥΡΩΠΗ.

Δεν είναι τυχαίο ότι ο πνευματικός Μεσαίωνας άρχισε από την εποχή που καταστράφηκαν οι φιλοσοφικές σχολές και τα ιερά των Ελλήνων. Ούτε τυχαίο είναι επίσης ότι η Αναγέννηση άρχισε όταν στην Ευρώπη ανακαλύπτονται οι γνώσεις των αρχαίων. Κανείς δεν μπορεί να προβλέψει την ανάπτυξη που θα είχαν οι επιστήμες αν συνεχιζόταν αυτή η μεγαλειώδης πορεία των Μαθηματικών και φιλοσόφων της αρχαίας Ελλάδος. Ποια θα ήταν η πορεία της ανθρωπότητος αν είχαν διασωθεί όλα τα έργα τους; Μετά το 600μ.Χ περίπου τα συγγράμματα των Ελλήνων γίνονται γνωστά και στους λαούς που έχουν ασπασθεί τον Μωαμεθανισμό. Οι Άραβες και οι Πέρσες γίνονται φύλακες αυτών των έργων, κάνουν μεταφράσεις τους και από αυτές τις μεταφράσεις οι Ευρωπαίοι ανακαλύπτουν τους αρχαίους Έλληνες. Την ίδια εποχή που η Ανατολική Ρωμαϊκή αυτοκρατορία κατέστρεφε ότι θύμιζε Ελλάδα, οι Έλληνες, χριστιανοί ιερείς και μοναχοί πλέον, διατηρούσαν άσβεστη την δάδα των προγόνων τους αντιγράφοντας και μελετώντας τους στα μοναστήρια. Έτσι όταν με την Άλωση αναγκάζονται να καταφύγουν στην Δύση μεταφέρουν μαζί τους και την όσα από την πνευματική αυτή κληρονομιά κατόρθωσαν να διαφυλάξουν.

Φθάσαμε πλέον στην εποχή πού η Δύση ξαναανακάλυψε τον τροχό. Οι Δυτικοί είναι τόσο πολύ εντυπωσιασμένοι από το πνεύμα των Ελλήνων ώστε να θεωρείται από την Ρωμαιοκαθολική εκκλησία θανάσιμο αμάρτημα ικανό να στείλει κάποιον στην πυρά, η διατύπωση γνώμης αντίθετης προς τις θεωρίες του Αριστοτέλη (προσαρμοσμένες πάντα στις δοξασίες της εκκλησίας). Τα μαθηματικά γίνονται πλέον της μόδας και ασχολούνται με αυτά ένα μεγάλο πλήθος ανθρώπων διαφόρων επαγγελμάτων. Ιδιαιτέρως το 6ο αίτημα του Ευκλείδη γίνεται αντικείμενο έντονου προβληματισμού. Κάποιοι προσπαθούν να το αποδείξουν ανεπιτυχώς όμως. Αργότερα άλλοι υποστηρίζουν ότι δεν ισχύει κι κατασκευάζουν νέα γεωμετρικά οικοδομήματα.

David Hilbert (1862-1944)

Είχε παρατηρηθεί, ίσως και από τον ίδιο τον Ευκλείδη, ότι στα στοιχεία υπήρχαν κάποιες ατέλειες. Δεν συμφωνούσαν ακριβώς στην δομή μίας επιστήμης όπως την εννοούσε ο Αριστοτέλης. Για παράδειγμα δέχεται ότι ισχύουν κάποιες αποφάνσεις εντελώς διαισθητικά χωρίς να στηρίζεται σε προηγούμενες. Τις ελλείψεις αυτές ήρθε να διορθώσει ο Hilbert(1862-1944) και παρουσίασε την βελτιωμένη μορφή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με το έργο του «Τα Θεμέλια της Γεωμετρίας».

Ο Hilbert ξεκίνησε από έναν αριθμό βασικών ιδιοτήτων που τις ονόμασε **αξιώματα** . Αυτά ομοιάζουν με τα Ευκλείδεια αιτήματα. Όλες οι άλλες γεωμετρικές ιδιότητες προκύπτουν από τα αξιώματα.

Ο επόμενος κρίκος της αλυσίδας είναι οι **βασικές** ή **αρχικές έννοιες** που αντιστοιχούν στις θεμελιώδεις έννοιες του Ευκλείδη:

σημείο

ευθεία

επίπεδο.

Θα υπέθετε κάποιος ότι εδώ δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ Ευκλείδη και του Hilbert. Και όμως! Υπάρχει και είναι ουσιώδης. Είδαμε ότι κατά τον Αριστοτέλη και κατ' επέκταση τον Ευκλείδη, κάθε θεμελιώδης έννοια πρέπει να συνοδεύεται από τον ορισμό της που εκφράζει το νόημά της. Με τις νέες απόψεις αποδεσμευόμαστε από την ανάγκη να ερμηνεύουμε το νόημα των αρχικών εννοιών. Βεβαίως όταν αποδεικνύουμε θεωρήματα ή λύνουμε ασκήσεις η διάνοιά μας δημιουργεί τις αντίστοιχες εικόνες των αρχικών εννοιών. Αυτά όμως δεν είναι παρά εικόνες που βοηθούν στην διαδικασία των συλλογισμών μας και τίποτε παραπάνω. Το γεωμετρικό οικοδόμημα δεν στηρίζεται πλέον στις διαισθητικές εικόνες των αρχικών εννοιών.

Ο τρίτος κρίκος είναι η **βασική σχέση**. Μία απ' αυτές είναι η «περνάει από» π.χ «η ευθεία ε περνάει από το σημείο Α. Με τις βασικές έννοιες και τις σχέσεις μπορούμε να ορίσουμε τις υπόλοιπες έννοιες και σχέσεις που εμφανίζονται στο σύστημα, π.χ «Η **ευθεία** ε είναι **παράλληλη** με την ευθεία δ όταν δεν υπάρχει **σημείο** από το οποίο να **περνάνε** η ε και η δ»

Εδώ με τις αρχικές έννοιες «σημείο», «ευθεία» και την βασική σχέση «περνάνε» ορίζεται η παράγωγη σχέση «παράλληλη»

Ολόκληρο το οικοδόμημα της γεωμετρίας έχει στηριχθεί πλέον στις **«αρχικές έννοιες».** τα «**αξιώματα»** και τις **«σχέσεις»** και συμπληρώνεται μέσω θεωρημάτων καθαρά συμπερασματικά.

Καθώς η ανθρωπότητα εξελίσσεται οι νέες εμπειρίες ζητούν εξήγηση. Η Ευκλείδεια γεωμετρία είτε στην παλαιά είτε στην σύγχρονη μορφή της λύνει προβλήματα που συνδέονται με την αντίληψη ενός κόσμου με ευθείες, κύκλους,...Το σύμπαν όμως απεκάλυψε ότι στην δομή του δεν υπάρχουν ευθείες, όπως τουλάχιστον διαισθητικά τις αντιλαμβανόταν ο Ευκλείδης. Καμπύλες και μόνο υπάρχουν (αν και αυτό αρχίζει να αμφισβητείται πάλι). Πώς θα εξετάσουμε και πως θα ανακαλύψουμε τις ιδιότητες των σχημάτων μέσα σε έναν χώρο που έχει την δομή του σύμπαντος μας; Μας αρκεί η Ευκλείδεια γεωμετρία; Προφανώς όχι. Υπάρχει επιτακτικά ανάγκη να δημιουργηθεί μία νέα που να παίρνει υπ' όψιν της την δομή του σύμπαντος. Δεν άργησαν να κάνουν την εμφάνισή τους τέτοιες γεωμετρίες. Όταν ο Αϊνστάιν διέβλεψε την δομή του σύμπαντος δεν χρειάστηκε νά κατασκευάσει κάποια νέα γιατί ήταν ήδη έτοιμη από τους Minkowski, Riemann, κ.ά. Συνέβη και εδώ κάτι το παράδοξο που κάνει την εμφάνισή του συχνά στην ιστορία των επιστημών. Η διανοητική σύλληψη να προηγείται της εμπειρίας. Μήπως είχε δίκιο ο Πλάτων που έδινε πρωτεύουσα θέση στις ιδέες και κατόπιν στην φυσική πραγματικότητα;

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. «Ιστορία των Μαθηματικών» G. Loria Εκδόσεις Ε.Μ.Ε
2. «Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών Μαθηματικών» I. Bunt, Ph. Jones, J Bedient «Επιστημονικές και Τεχνικές Εκδόσεις».
3. «Ιστορία της Δυτικής Φιλοσοφίας» M. Russel
4. «Φιλοσοφία από την Μαθηματικήν» Δ. Δημαρά . Βιβλιοπωλείο «Δωδώνη»

Ιούνιος 1995

Επαμεινώνδας Ε. Χατζηχρόνης