# Άσκηση

**i)** Σκεφθείτε έναν τριψήφιο αριθμό **Α** του οποίου το πρώτο και το τρίτο ψηφίο είναι διαφορετικά (έστω $\mathbf{A}=\overline{\alpha\beta\gamma}$ με $\alpha\neq\gamma$ - μπορεί $\alpha=0$ ή $\alpha=\beta=0$).

**ii)** Θεωρήστε τον αριθμό **Β** που προκύπτει από τον **Α** αν αντιστρέψουμε τη σειρά των ψηφίων του **Α** (δηλ. $\mathbf{B}=\overline{\gamma\beta\alpha}$).

**iii)** Από τους αριθμούς **Α, Β** αφαιρέστε από το μεγαλύτερο το μικρότερο και έστω **Γ** αριθμός που θα προκύψει (δηλ. $\mathbf{\Gamma}=\mathbf{A}-\mathbf{B}$ αν $\mathbf{A}>\mathbf{B}$ ή $\mathbf{\Gamma}=\mathbf{B}-\mathbf{A}$ αν $\mathbf{B}>\mathbf{A}$). Τον **Γ** τον θεωρούμε ως τριψήφιο αριθμό (αν δεν είναι θεωρούμε ως πρώτο ψηφίο το 0).

**iv)** Θεωρήστε τον αριθμό **Δ** που προκύπτει από τον **Γ** αν αντιστρέψουμε τη σειρά των ψηφίων του **Γ** (δηλ. αν $\mathbf{\Gamma}=\overline{\delta\varepsilon\zeta}$ τότε $\mathbf{\Delta}=\overline{\zeta\varepsilon\delta}$).

**v)** Έστω **Ε** το άθροισμα των **Γ** και **Δ**.

Αποδείξτε ότι ο **Ε** είναι πάντα ο 1089.

# Λύση

Έστω $\mathbf{A}=\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$ με $\alpha\neq\gamma$. Προφανώς $\alpha,\beta,\gamma\in\{0,1,2,3,...,9\}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha>\gamma$. Τότε $\mathbf{B}=\overline{\gamma\beta\alpha}=100\gamma+10\beta+\alpha$ . Επειδή $\alpha>\gamma$ έχουμε $\mathbf{A}>\mathbf{B}$. Άρα

$$\mathbf{\Gamma}=\mathbf{A}-\mathbf{B}=100\alpha+10\beta+\gamma-(100\gamma+10\beta+\alpha)=...=100(\alpha-\gamma)+\gamma-\alpha$$

Επειδή $\alpha,\gamma\in\{0,1,2,3,...,9\}$ και $\alpha>\gamma$ έχουμε ότι

$$1\leq\alpha\leq 9 \qquad \text{και} \qquad 0\leq\gamma\leq 8$$

Οπότε έχουμε

$$\left.\begin{array}{c}1\leq\alpha\leq 9\\ 0\leq\gamma\leq 8\\ \gamma<\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}1\leq\alpha\leq 9\\ -8\leq-\gamma\leq 0\\ 0<\alpha-\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}-7\leq\alpha-\gamma\leq 9\\ 0<\alpha-\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow 1\leq\alpha-\gamma\leq 9$$

και επομένως $0\leq\alpha-\gamma-1\leq 8$, $-9\leq\gamma-\alpha\leq -1\Rightarrow 1\leq 10+\gamma-\alpha\leq 9$.

Επειδή

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma} &= 100(\alpha-\gamma)+\gamma-\alpha = 100(\alpha-\gamma-1)+100+\gamma-\alpha = 100(\alpha-\gamma-1)+90+(10+\gamma-\alpha) = \\ &= 100(\alpha-\gamma-1)+10\cdot 9+(10+\gamma-\alpha)\end{aligned}$$

έχουμε τότε αμέσως ότι

$$\mathbf{\Gamma} = \overline{(\alpha-\gamma-1)9(10+\gamma-\alpha)}$$

Άρα

$$\mathbf{\Delta} = \overline{(10+\gamma-\alpha)9(\alpha-\gamma-1)} = 100(10+\gamma-\alpha)+10\cdot 9+(\alpha-\gamma-1)$$

και επομένως

$$\mathbf{E} = \mathbf{\Gamma}+\mathbf{\Delta} = 100(\alpha-\gamma)+(\gamma-\alpha)+100(10+\gamma-\alpha)+10\cdot 9+(\alpha-\gamma-1) = \ldots = 1089 \quad \square$$

***Μάξιμος Μπούτρης***

***Α' ΛΥΚΕΙΟΥ Π.Λ.Π.Π.Π.***