


Η ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ *

Μιχάλης Τζούμας
Σχ. Συμβ. Μαθηματικών, Ν. Αιτωλοακαρνανίας

* Απόστολος Χατζηδής, Ομότιμος Καθηγητής Π. Ιωαννίνων και Κρήτης, Τμήμα Η/Υ Τηλ/νιών και Δικτύων Παν/μιο Θεσσαλίας 

Το πρόβλημα

Πρόβλημα:

Να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα

$$\min_{\omega > 0} \left\{ \max_{a \in \mathcal{H}} \left| \frac{1 - \omega a}{1 + \omega a} \right| \right\}$$

όπου \mathcal{H} κλειστό κυρτό πολύγωνο, συμμετρικό ως προς το θετικό πραγματικό ημιάξονα του μιγαδικού επιπέδου και

$$a = \beta + i\gamma, \quad \beta = \operatorname{Re} a > 0, \gamma = \operatorname{Im} a$$

Ο μετασχηματισμός Cayley

Ορισμός:

Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, με $\det(I + A) \neq 0$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας τάξης n , η συνάρτηση πίνακας

$$F \equiv F(A) := (I + A)^{-1}(I - A)$$

καλείται μετασχηματισμός Cayley.

Ορισμός:

Υπό τις προϋποθέσεις του προηγούμενου Ορισμού, καλούμε Παρεκβαλλόμενο Μετασχηματισμό Cayley, με παράμετρο $\omega \neq 0$, τη συνάρτηση πίνακα

$$F_\omega \equiv F(\omega A) := (I + \omega A)^{-1}(I - \omega A), \quad \omega \in \mathbb{C}, \det(I + \omega A) \neq 0$$

Ο μετασχηματισμός Cayley

Ορισμός:

Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, με $\det(I + A) \neq 0$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας τάξης n , η συνάρτηση πίνακας

$$F \equiv F(A) := (I + A)^{-1}(I - A)$$

καλείται μετασχηματισμός Cayley.

Ορισμός:

Υπό τις προϋποθέσεις του προηγούμενου Ορισμού, καλούμε Παρεκβαλλόμενο Μετασχηματισμό Cayley, με παράμετρο $\omega \neq 0$, τη συνάρτηση πίνακα

$$F_\omega \equiv F(\omega A) := (I + \omega A)^{-1}(I - \omega A), \quad \omega \in \mathbb{C}, \det(I + \omega A) \neq 0$$

Εφαρμογές

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί μπορούν να εμφανιστούν σε ένα μεγάλο πλήθος επίλυσης προβλημάτων όπως:

- Linear Complementarity Problem.
 - Μαθηματικός Προγραμματισμός.
 - Θεωρία Παιγνίων.
 - Παραβολικές Μ.Δ.Ε. (με ελεύθερα σύνορα)
 - Παραβολικές Μ.Δ.Ε. (με κινητά σύνορα)
- Ελλειπτικές Μ.Δ.Ε.
- Επίλυση Μιγαδικών Γραμμικών Συστημάτων (Αλγεβρικών Εξισώσεων).

Εφαρμογές

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί μπορούν να εμφανιστούν σε ένα μεγάλο πλήθος επίλυσης προβλημάτων όπως:

- Linear Complementarity Problem.
 - Μαθηματικός Προγραμματισμός.
 - Θεωρία Παιγνίων.
 - Παραβολικές Μ.Δ.Ε. (με ελεύθερα σύνορα)
 - Παραβολικές Μ.Δ.Ε. (με κινητά σύνορα)
- Ελλειπτικές Μ.Δ.Ε.
- Επίλυση Μιγαδικών Γραμμικών Συστημάτων (Αλγεβρικών Εξισώσεων).

Εφαρμογές

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί μπορούν να εμφανιστούν σε ένα μεγάλο πλήθος επίλυσης προβλημάτων όπως:

- Linear Complementarity Problem.
 - Μαθηματικός Προγραμματισμός.
 - Θεωρία Παιγνίων.
 - Παραβολικές Μ.Δ.Ε. (με ελεύθερα σύνορα)
 - Παραβολικές Μ.Δ.Ε. (με κινητά σύνορα)
- Ελλειπτικές Μ.Δ.Ε.
- Επίλυση Μιγαδικών Γραμμικών Συστημάτων (Αλγεβρικών Εξισώσεων).

Εφαρμογές

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί μπορούν να εμφανιστούν σε ένα μεγάλο πλήθος επίλυσης προβλημάτων όπως:

- Linear Complementarity Problem.
 - Μαθηματικός Προγραμματισμός.
 - Θεωρία Παιγνίων.
 - Παραβολικές Μ.Δ.Ε. (με ελεύθερα σύνορα)
 - Παραβολικές Μ.Δ.Ε. (με κινητά σύνορα)
- Ελλειπτικές Μ.Δ.Ε.
- Επίλυση Μιγαδικών Γραμμικών Συστημάτων (Αλγεβρικών Εξισώσεων).

Το πρόβλημα και η βελτιστοποίηση της λύσης

Ουσιαστικά έχουμε

- Ένα σύστημα $Bx = b$ με $B \in \mathbb{C}^{n,n}$, $b \in \mathbb{C}^n$.
- Το σύστημα προσπαθούμε να το λύσουμε με μια επαναληπτική μέθοδο της οποίας τελικά ο επαναληπτικός πίνακας είναι ο $F_\omega(A)$ με φάσμα ιδιοτιμών $\sigma(F_\omega(A))$.
- Η φασματική ακτίνα $\rho(F_\omega(A)) = \max_{a_i \in \sigma(A)} \left| \frac{1-\omega a_i}{1+\omega a_i} \right| (< 1)$ εξασφαλίζει τη σύγκλιση.

Το πρόβλημα και η βελτιστοποίηση της λύσης

Ουσιαστικά έχουμε

- Ένα σύστημα $Bx = b$ με $B \in \mathbb{C}^{n,n}$, $b \in \mathbb{C}^n$.
- Το σύστημα προσπαθούμε να το λύσουμε με μια επαναληπτική μέθοδο της οποίας τελικά ο επαναληπτικός πίνακας είναι ο $F_\omega(A)$ με φάσμα ιδιοτιμών $\sigma(F_\omega(A))$.
- Η φασματική ακτίνα $\rho(F_\omega(A)) = \max_{a_i \in \sigma(A)} \left| \frac{1-\omega a_i}{1+\omega a_i} \right| (< 1)$ εξασφαλίζει τη σύγκλιση.

Το πρόβλημα και η βελτιστοποίηση της λύσης

Ουσιαστικά έχουμε

- Ένα σύστημα $Bx = b$ με $B \in \mathbb{C}^{n,n}$, $b \in \mathbb{C}^n$.
- Το σύστημα προσπαθούμε να το λύσουμε με μια επαναληπτική μέθοδο της οποίας τελικά ο επαναληπτικός πίνακας είναι ο $F_\omega(A)$ με φάσμα ιδιοτιμών $\sigma(F_\omega(A))$.
- Η φασματική ακτίνα $\rho(F_\omega(A)) = \max_{a_i \in \sigma(A)} \left| \frac{1-\omega a_i}{1+\omega a_i} \right| (< 1)$ εξασφαλίζει τη σύγκλιση.

- και η βελτιστοποίηση της λύσης επιτυγχάνεται με τη λύση του προβλήματος

Πρόβλημα:

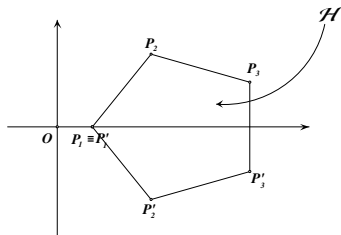
Να προσδιοριστεί η «βέλτιστη» τιμή της παραμέτρου ω , η οποία επιλύει το πρόβλημα

$$\min_{\omega} \rho(F_{\omega}) = \min_{\omega} \max_{a_i \in \sigma(A)} \left| \frac{1 - \omega a_i}{1 + \omega a_i} \right|$$

Η γενίκευση (Από το διακριτό στο συνεχές)

Ορισμός:

Δίνεται ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ και έστω $\sigma(A)$ το φάσμα των ιδιοτιμών. Καλούμε κλειστή κυρτή θήκη \mathcal{H} του διακριτού συνόλου $\sigma(A)$ το μικρότερο κλειστό κυρτό πολύγωνο που περιέχει το $\sigma(A)$ στο εσωτερικό του.



Σχήμα: Το κλειστό πολύγωνο στο μιγαδικό επίπεδο με θετικά ευσταθή $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

Η συνάρτηση και η αντιστροφή της

$$w := w(a) = \frac{1 - \omega a}{1 + \omega a} \Leftrightarrow w^{-1}(w(a)) = a = \frac{1 - w}{\omega(1 + w)}, \quad a \in \mathcal{H}, \omega > 0^\dagger$$

- Οι δυο συναρτήσεις είναι μετασχηματισμοί Möbius.
- Καμιά δεν έχει πόλους, έχοντας το $\omega > 0$, αφού $Re a > 0$.
- Καμιά δεν είναι η σταθερή συνάρτηση, αφού ισχύει

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ 1 & \omega \end{pmatrix} > 0 \quad \text{και} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \omega & \omega \end{pmatrix} > 0.$$

[†] Το ω επιλέγεται θετικό, ώστε $|w| < 1$.

Η συνάρτηση και η αντίστροφή της

$$w := w(a) = \frac{1 - \omega a}{1 + \omega a} \Leftrightarrow w^{-1}(w(a)) = a = \frac{1 - w}{\omega(1 + w)}, \quad a \in \mathcal{H}, \omega > 0^\dagger$$

- Οι δυο συναρτήσεις είναι μετασχηματισμοί Möbius.
- Καμιά δεν έχει πόλους, έχοντας το $\omega > 0$, αφού $Re a > 0$.
- Καμιά δεν είναι η σταθερή συνάρτηση, αφού ισχύει

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ 1 & \omega \end{pmatrix} > 0 \quad \text{και} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \omega & \omega \end{pmatrix} > 0.$$

[†] Το ω επιλέγεται θετικό, ώστε $|w| < 1$.

Η συνάρτηση και η αντίστροφή της

$$w := w(a) = \frac{1 - \omega a}{1 + \omega a} \Leftrightarrow w^{-1}(w(a)) = a = \frac{1 - w}{\omega(1 + w)}, \quad a \in \mathcal{H}, \omega > 0^\dagger$$

- Οι δυο συναρτήσεις είναι μετασχηματισμοί Möbius.
- Καμιά δεν έχει πόλους, έχοντας το $\omega > 0$, αφού $Re a > 0$.
- Καμιά δεν είναι η σταθερή συνάρτηση, αφού ισχύει

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ 1 & \omega \end{pmatrix} > 0 \quad \text{και} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \omega & \omega \end{pmatrix} > 0.$$

[†] Το ω επιλέγεται θετικό, ώστε $|w| < 1$.

Η συνάρτηση και η αντίστροφή της

Ο μετασχηματισμός Möbius μετασχηματίζει κύκλο σε κύκλο και κυκλικό δίσκο σε κυκλικό δίσκο.

Έτσι ξεκινώντας με $\omega > 0$ και τον κύκλο $\mathcal{C}_\omega (\supset w(\mathcal{H}))$ με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho < 1$, διαδοχικά όπως φαίνεται παρακάτω καταλήγουμε στο κύκλο $\mathcal{C} (\supset \mathcal{H})$ με κέντρο $K(c,0)$ και ακτίνα R

Ο Μετασχηματισμός

$$\begin{aligned}
 |w| = \rho &\Leftrightarrow w\bar{w} = \rho^2 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1 - \omega a}{1 + \omega a} \cdot \frac{1 - \omega \bar{a}}{1 + \omega \bar{a}} = \rho^2 \\
 &\Leftrightarrow \omega^2(1 - \rho^2)a\bar{a} - \omega(1 + \rho^2)(a + \bar{a}) + (1 - \rho^2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow a\bar{a} - \frac{1 + \rho^2}{\omega(1 - \rho^2)}(a + \bar{a}) + \frac{1}{\omega^2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow a\bar{a} - \frac{1 + \rho^2}{\omega(1 - \rho^2)}(a + \bar{a}) + \left(\frac{1 + \rho^2}{\omega(1 - \rho^2)}\right)^2 \\
 &\qquad\qquad\qquad = \left(\frac{1 + \rho^2}{\omega(1 - \rho^2)}\right)^2 - \frac{1}{\omega^2}
 \end{aligned}$$

Ο Μετασχηματισμός

$$\Leftrightarrow \left| a - \frac{1 + \rho^2}{\omega(1 - \rho^2)} \right|^2 = \left(\frac{2\rho}{\omega(1 - \rho^2)} \right)^2$$

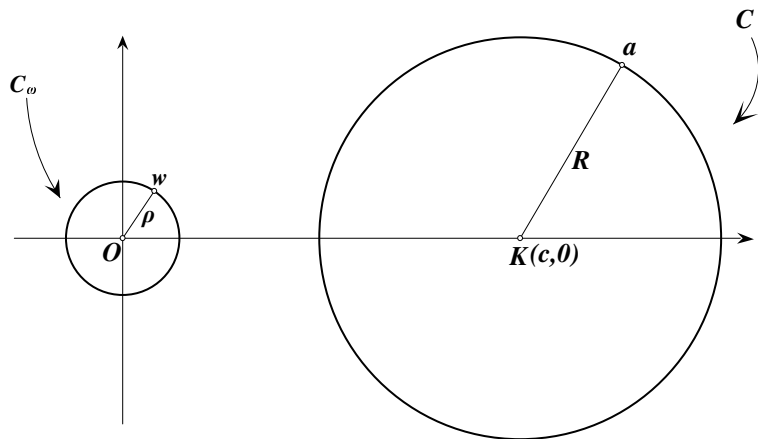
$$\Leftrightarrow \left| a - \frac{1 + \rho^2}{\omega(1 - \rho^2)} \right| = \left(\frac{2\rho}{\omega(1 - \rho^2)} \right)$$

$$\Leftrightarrow |a - c| = R$$

όπου

$$c := \frac{1 + \rho^2}{\omega(1 - \rho^2)} \quad \text{και} \quad R := \frac{2\rho}{\omega(1 - \rho^2)}.$$

Ο Μετασχηματισμός



Σχήμα: Η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του C_ω στον C

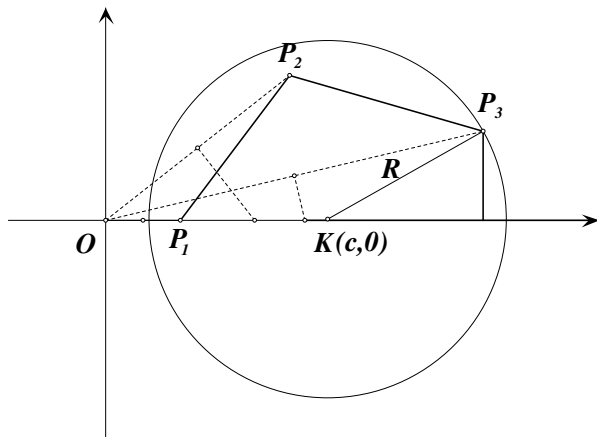
Ο περικλείων κύκλος (π.κ.)

Ορισμός:

Έστω ο $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ θετικά ευσταθής, $\sigma(A)$ το φάσμα των ιδιοτιμών του και \mathcal{H} η κλειστή θήκη του $\sigma(A)$. Κάθε κύκλος \mathcal{C} που ικανοποιεί τις παρακάτω τέσσερις ιδιότητες θα καλείται περικλείων (π.κ.) της \mathcal{H} .

- 1 Το κέντρο του κύκλου $K(c, 0)$ βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα.
- 2 Ο κύκλος βρίσκεται στο δεξιό ημιπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου, δηλ. $R < c$.
- 3 Ο κύκλος περιέχει στο εσωτερικό του την κλειστή θήκη του \mathcal{H} .
- 4 Ο κύκλος διέρχεται από μια κορυφή της κλειστής θήκης του \mathcal{H} .

Ο περικλείων κύκλος (π.κ.)



Σχήμα: Ένας από τους π.κ. της C

Ο περικλείων κύκλος (π.κ.)

Θεώρημα

Για ένα κλειστό κυρτό πολύγωνο \mathcal{H} , που είναι συμμετρικό ως προς το θετικό πραγματικό ημιάξονα, υπάρχουν **άπειροι** π.κ..

Αφού

$$\min_{\omega > 0} \max_{a \in \mathcal{H}} \left| \frac{1 - \omega a}{1 + \omega a} \right| = \min_{\omega > 0} \max_{a \in \mathcal{H}} |w(a)| = \min_{\omega > 0} \rho = \min_{\omega > 0} \rho(w(\mathcal{C})) =$$

$$\min_{\omega > 0} \max_{a \in \sigma(A)} |w(a_i)| = \min_{\omega > 0} \max_{a \in \sigma(A)} \left| \frac{1 - \omega a_i}{1 + \omega a_i} \right| = \min_{\omega > 0} \rho(F_\omega)$$

Θεώρημα

Το αρχικό πρόβλημα είναι ισοδύναμο του $\min_{\omega > 0} \rho(F_\omega)$.

Ο βέλτιστος π.κ.

- Από το τελευταίο Θεώρημα φαίνεται ότι το πρόβλημα επιλύεται όταν βρούμε εκείνον το κύκλο που περικλείει το \mathcal{H} και μας δίνει το ελάχιστο ρ , δηλ. το βέλτιστο π.κ..
- Εκείνο, λοιπόν, που έχουμε να κάνουμε είναι να βρούμε τα R και c που μας δίνουν το ελάχιστο ρ και το ω .
- Εύκολα, από τα προηγούμενα, προκύπτει ότι

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{c^2 - R^2}}, \quad \rho = \frac{R}{c + \sqrt{c^2 - R^2}} = \frac{\frac{R}{c}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{R}{c}\right)^2}}.$$

Ο βέλτιστος π.κ.

- Από το τελευταίο Θεώρημα φαίνεται ότι το πρόβλημα επιλύεται όταν βρούμε εκείνον το κύκλο που περικλείει το \mathcal{H} και μας δίνει το ελάχιστο ρ , δηλ. το βέλτιστο π.κ..
- Εκείνο, λοιπόν, που έχουμε να κάνουμε είναι να βρούμε τα R και c που μας δίνουν το ελάχιστο ρ και το ω .
- Εύκολα, από τα προηγούμενα, προκύπτει ότι

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{c^2 - R^2}}, \quad \rho = \frac{R}{c + \sqrt{c^2 - R^2}} = \frac{\frac{R}{c}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{R}{c}\right)^2}}.$$

Ο βέλτιστος π.κ.

- Από το τελευταίο Θεώρημα φαίνεται ότι το πρόβλημα επιλύεται όταν βρούμε εκείνον το κύκλο που περικλείει το \mathcal{H} και μας δίνει το ελάχιστο ρ , δηλ. το βέλτιστο π.κ..
- Εκείνο, λοιπόν, που έχουμε να κάνουμε είναι να βρούμε τα R και c που μας δίνουν το ελάχιστο ρ και το ω .
- Εύκολα, από τα προηγούμενα, προκύπτει ότι

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{c^2 - R^2}}, \quad \rho = \frac{R}{c + \sqrt{c^2 - R^2}} = \frac{\frac{R}{c}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{R}{c}\right)^2}}.$$

Ο βέλτιστος π.κ.

Λήμμα:

Η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$$

είναι συνεχώς αύξουσα στο διάστημα $[0, 1)$. Επίσης, για κάθε $x \in [d, e] \subset [0, 1)$, η $f(x)$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της στο αριστερό άκρο του διαστήματος $x = d$.

Θεώρημα

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ θετικά ευσταθής. Η λύση του αρχικού προβλήματος με τους μέχρις εδώ περιορισμούς είναι ισοδύναμη με τη λύση του προβλήματος της εύρεσης του βέλτιστου π.κ. από την ελαχιστοποίηση του λόγου $\frac{R}{C}$.

Ο βέλτιστος π.κ.

Λήμμα:

Η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$$

είναι συνεχώς αύξουσα στο διάστημα $[0, 1)$. Επίσης, για κάθε $x \in [d, e] \subset [0, 1)$, η $f(x)$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της στο αριστερό άκρο του διαστήματος $x = d$.

Θεώρημα

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ θετικά ευσταθής. Η λύση του αρχικού προβλήματος με τους μέχρις εδώ περιορισμούς είναι ισοδύναμη με τη λύση του προβλήματος της εύρεσης του βέλτιστου π.κ. από την ελαχιστοποίηση του λόγου $\frac{R}{c}$.

Τα νέα δεδομένα...

- Έστω $P_i(\beta_i, \gamma_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$ με $\beta_i < \beta_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, k - 1$.
- Έστω P_j το σημείο από το οποίο διέρχεται ο βέλτιστος π.κ. (K, R) με $K(c, 0)$ και $R = KP_j$, οπότε μας ενδιαφέρει η ελαχιστοποίηση του λόγου $\frac{KP_j}{KO}$, του άγνωστου σημείου K .
- Όμως ο λόγος των αποστάσεων ενός σημείου από δυο άλλα σταθερά σημεία θυμίζει Απολλώνιο Κύκλο(Α.κ.).

Τα νέα δεδομένα...

- Έστω $P_i(\beta_i, \gamma_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$ με $\beta_i < \beta_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, k - 1$.
- Έστω P_j το σημείο από το οποίο διέρχεται ο βέλτιστος π.κ. (K, R) με $K(c, 0)$ και $R = KP_j$, οπότε μας ενδιαφέρει η ελαχιστοποίηση του λόγου $\frac{KP_j}{KO}$, του άγνωστου σημείου K .
- Όμως ο λόγος των αποστάσεων ενός σημείου από δυο άλλα σταθερά σημεία θυμίζει Απολλώνιο Κύκλο(Α.κ.).

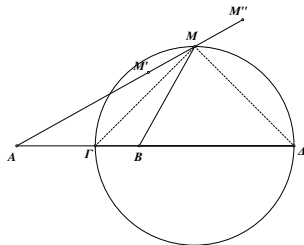
Τα νέα δεδομένα...

- Έστω $P_i(\beta_i, \gamma_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$ με $\beta_i < \beta_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, k - 1$.
- Έστω P_j το σημείο από το οποίο διέρχεται ο βέλτιστος π.κ. (K, R) με $K(c, 0)$ και $R = KP_j$, οπότε μας ενδιαφέρει η ελαχιστοποίηση του λόγου $\frac{KP_j}{KO}$, του άγνωστου σημείου K .
- Όμως ο λόγος των αποστάσεων ενός σημείου από δυο άλλα σταθερά σημεία θυμίζει Απολλώνιο Κύκλο(Α.κ.).

Ο Απολλώνιος κύκλος

Θεώρημα

Ο Γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου M , που οι αποστάσεις τους από δυο γνωστά σημεία A, B αυτού έχουν λόγο $\lambda = \frac{MB}{MA}$, είναι κύκλος με διάμετρο $\Gamma\Delta$, όπου τα Γ και Δ είναι τα συζυγή αρμονικά των A και B .



Σχήμα: Ο Απολλώνιος κύκλος

Τι θα δούμε...

Θα εξετάσουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις που μας δίνουν βέλτιστο π.κ. και θα δείξουμε ότι αυτός μπορεί να προκύψει:

- από ένα σημείο στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι ευθύγραμμο τμήμα).
- από δυο σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι τραπέζιο).

Επίσης

- 1 Από τρία ή περισσότερα σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο αναγόμεστε σε μια από τις προηγούμενες καταστάσεις.
- 2 Ο βέλτιστος π.κ. είναι μοναδικός.
- 3 Θα δώσουμε τον αλγόριθμος εύρεσης.

Τι θα δούμε...

Θα εξετάσουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις που μας δίνουν βέλτιστο π.κ. και θα δείξουμε ότι αυτός μπορεί να προκύψει:

- από ένα σημείο στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι ευθύγραμμο τμήμα).
- από δυο σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι τραπέζιο).

Επίσης

- 1 Από τρία ή περισσότερα σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο αναγόμεστε σε μια από τις προηγούμενες καταστάσεις.
- 2 Ο βέλτιστος π.κ. είναι μοναδικός.
- 3 Θα δώσουμε τον αλγόριθμος εύρεσης.

Τι θα δούμε...

Θα εξετάσουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις που μας δίνουν βέλτιστο π.κ. και θα δείξουμε ότι αυτός μπορεί να προκύψει:

- από ένα σημείο στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι ευθύγραμμο τμήμα).
- από δυο σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι τραπέζιο).

Επίσης

- 1 Από τρία ή περισσότερα σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο αναγόμεστε σε μια από τις προηγούμενες καταστάσεις.
- 2 Ο βέλτιστος π.κ. είναι μοναδικός.
- 3 Θα δώσουμε τον αλγόριθμος εύρεσης.

Τι θα δούμε...

Θα εξετάσουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις που μας δίνουν βέλτιστο π.κ. και θα δείξουμε ότι αυτός μπορεί να προκύψει:

- από ένα σημείο στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι ευθύγραμμο τμήμα).
- από δυο σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι τραπέζιο).

Επίσης

- 1 Από τρία ή περισσότερα σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο αναγόμεστε σε μια από τις προηγούμενες καταστάσεις.
- 2 Ο βέλτιστος π.κ. είναι μοναδικός.
- 3 Θα δώσουμε τον αλγόριθμος εύρεσης.

Τι θα δούμε...

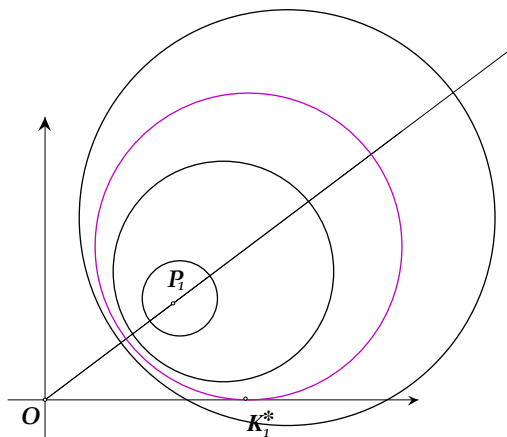
Θα εξετάσουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις που μας δίνουν βέλτιστο π.κ. και θα δείξουμε ότι αυτός μπορεί να προκύψει:

- από ένα σημείο στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι ευθύγραμμο τμήμα).
- από δυο σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο (Ουσιαστικά το φάσμα θα είναι τραπέζιο).

Επίσης

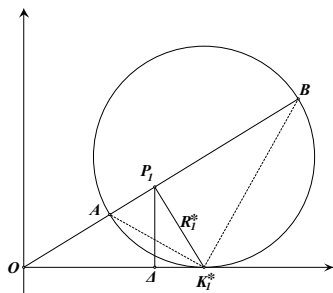
- 1 Από τρία ή περισσότερα σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο αναγόμεστε σε μια από τις προηγούμενες καταστάσεις.
- 2 Ο βέλτιστος π.κ. είναι μοναδικός.
- 3 Θα δώσουμε τον αλγόριθμος εύρεσης.

$$k = 1$$



Σχήμα: Απολλώνιοι κύκλοι των σημείων P_1 και O για διάφορες τιμές του $\lambda < 1$

Προσδιορίζοντας το $K(c, 0)$

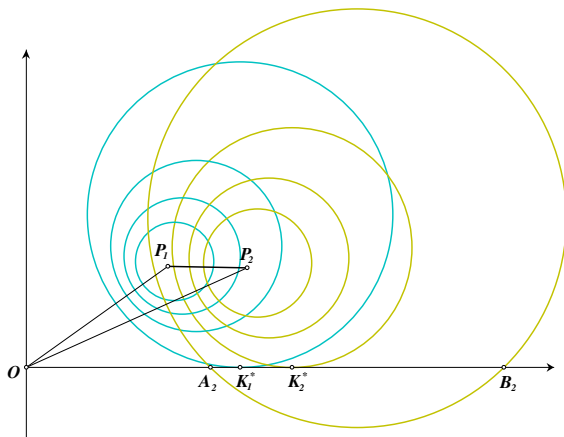


Σχήμα: Προσδιορισμός του $K_1^*(c_1^*, 0)$

Εύκολα με Αναλυτική Γεωμετρία βρίσκουμε

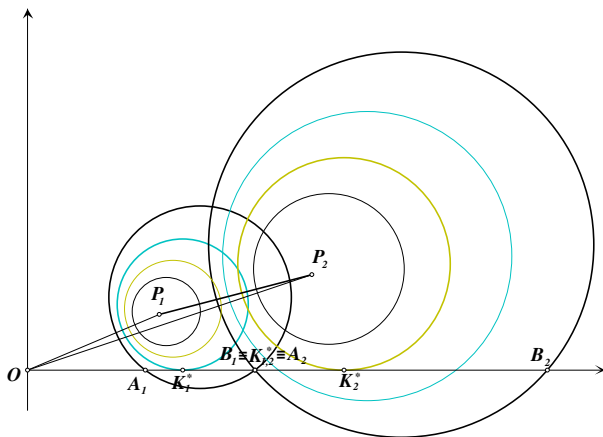
$$c_1^* = \frac{\beta_1^2 + \gamma_1^2}{\beta_1} \quad \text{και} \quad R_1^* = \frac{\gamma_1 \sqrt{\beta_1^2 + \gamma_1^2}}{\beta_1}$$

$$k = 2$$



Σχήμα: Απολλώνιοι κύκλοι των δυο σημείων P_1 και P_2 για διάφορες τιμές του $\lambda < 1$, α' περίπτωση

$$k = 2$$



Σχήμα: Απολλώνιοι κύκλοι των δυο σημείων P_1 και P_2 για διάφορες τιμές του $\lambda < 1$, β' περίπτωση

$$k = 2$$

Χρησιμοποιώντας στοιχειώδη Αναλυτική Γεωμετρία βρίσκουμε

$$c_{1,2}^* = \frac{(\beta_2^2 + \gamma_2^2) - (\beta_1^2 + \gamma_1^2)}{2(\beta_2 - \beta_1)},$$

$$R_{1,2}^* = \frac{\sqrt{[(\beta_2^2 + \gamma_2^2) - (\beta_1^2 + \gamma_1^2) - 2\beta_1\beta_2]^2 - 4\gamma_1^2\gamma_2^2}}{2(\beta_2 - \beta_1)}$$

$$k \geq 3$$

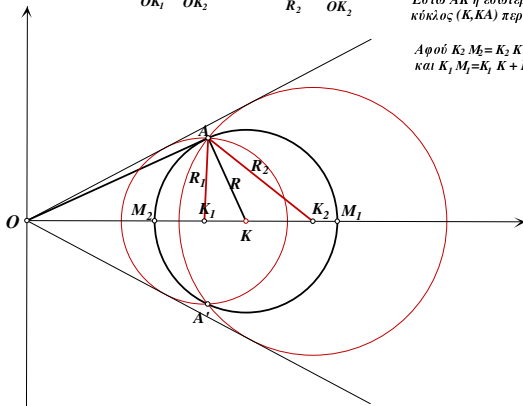
Τώρα αντί για δυάδες χρησιμοποιούμε k -άδες. Η διαδικασία είναι όπως και προηγούμενα. Το λ ξεκινά μεγαλώνοντας από το 0. Έστω P_j η κορυφή της οποίας ο τελευταίος Α.κ. εφάπτεται στο οριζόντιο ημιάξονα στο $K_j(c_j, 0)$. Ήδη όλοι οι προηγούμενοι Α.κ. τέμνουν τον οριζόντιο ημιάξονα στα σημεία A_i και B_i , $i = 1, 2, \dots, k$ και $i \neq j$. Αν όλα τα A_i και B_i βρίσκονται εκατέρωθεν του $K_j(c_j, 0)$, τότε αυτό το σημείο είναι το ζητούμενο (K_j^*). Επομένως ο βέλτιστος κύκλος προέρχεται από ένα σημείο. Αν υπάρχουν σημεία A_i και B_i από το ίδιο μέρος του $K_j(c_j, 0)$, τότε συνεχίζουμε την αύξηση του λ μέχρις ότου το πλέον αριστερό B_i έστω το B_{i_1} συμπέσει με το πλέον δεξιό A_i έστω το A_{i_2} , τότε αυτό το σημείο είναι το ζητούμενο ($K_{i_1 i_2}^*$). Επομένως ο βέλτιστος κύκλος προέρχεται από δύο σημεία.

Η μοναδικότητα...

$$\frac{R_1}{OK_1} = \frac{R_2}{OK_2} \quad \text{ή} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{OK_1}{OK_2}$$

οπότε η AO είναι εξωτερική διχοτόμος.
Έστω AK η εσωτερική διχοτόμος τότε ο κύκλος (K, KA) περικλείει τη "φακλή"

Αφού $K_2 M_2 = K_2 K + R > K_2 A$
και $K_1 M_1 = K_1 K + R > K_1 A$



Σχήμα: Η μοναδικότητα του βέλτιστου π.κ.

Ο Αλγόριθμος

Βήμα 1^ο Έστω P_i τα σημεία των κορυφών του \mathcal{H} , με $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1(1)k$.

Βήμα 2^ο Βρες την κορυφή με τη μεγαλύτερη πολική γωνία θ

$$\max_{i=1(1)k} \tan \theta_i = \max_{i=1(1)k} \frac{\gamma_i}{\beta_i}$$

Αν υπάρχουν δυο τέτοιες κορυφές πήγαινε στο Βήμα 3, αλλιώς αν ο $C_{\bar{i}}$, $\bar{i} \in \{1, 2, \dots, k\}$ περικλείει την \mathcal{H} , τότε αυτός είναι ο βέλτιστος π.κ., υπολόγισε τα ω και ρ , αλλιώς πήγαινε στο επόμενο Βήμα.

Βήμα 3^ο Προσδιόρισε τους $\binom{k}{2}$ κύκλους, που διέρχονται από τα P_i και P_j και έχουν το κέντρο τους στο θετικό ημιάξονα. Απόκλεισε όσους δεν είναι π.κ. (είτε περικλείουν την αρχή O είτε δεν περικλείουν κάποια κορυφή). Βρες εκείνη που έχει το μικρότερο λόγο $\frac{R_{i,j}}{OK_{i,j}}$, υπολόγισε τα ω και ρ .

Ο Αλγόριθμος

Βήμα 1^ο Έστω P_i τα σημεία των κορυφών του \mathcal{H} , με $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1(1)k$.

Βήμα 2^ο Βρες την κορυφή με τη μεγαλύτερη πολική γωνία θ

$$\max_{i=1(1)k} \tan \theta_i = \max_{i=1(1)k} \frac{\gamma_i}{\beta_i}$$

Αν υπάρχουν δυο τέτοιες κορυφές πήγαινε στο **Βήμα 3**, **αλλιώς** αν ο $C_{\bar{i}}$, $\bar{i} \in \{1, 2, \dots, k\}$ περικλείει την \mathcal{H} , τότε αυτός είναι ο βέλτιστος π.κ., υπολόγισε τα ω και ρ , **αλλιώς** πήγαινε στο επόμενο **Βήμα**.

Βήμα 3^ο Προσδιόρισε τους $\binom{k}{2}$ κύκλους, που διέρχονται από τα P_i και P_j και έχουν το κέντρο τους στο θετικό ημιάξονα. Απόκλεισε όσους δεν είναι π.κ. (είτε περικλείουν την αρχή O είτε δεν περικλείουν κάποια κορυφή). Βρες εκείνη που έχει το μικρότερο λόγο $\frac{R_{i,j}}{OK_{i,j}}$, υπολόγισε τα ω και ρ .

Ο Αλγόριθμος

Βήμα 1^ο Έστω P_i τα σημεία των κορυφών του \mathcal{H} , με $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1(1)k$.

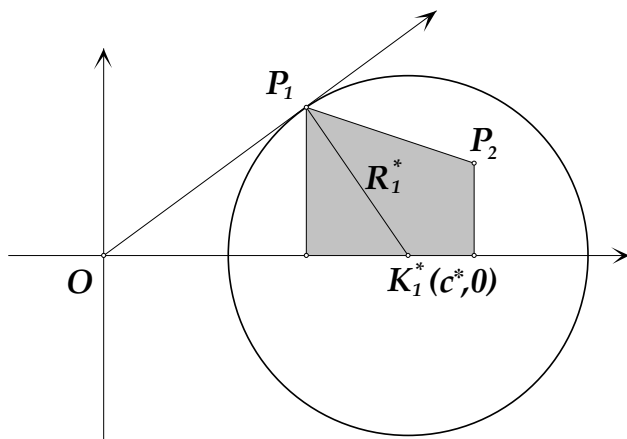
Βήμα 2^ο Βρες την κορυφή με τη μεγαλύτερη πολική γωνία θ

$$\max_{i=1(1)k} \tan \theta_i = \max_{i=1(1)k} \frac{\gamma_i}{\beta_i}$$

Αν υπάρχουν δυο τέτοιες κορυφές πήγαινε στο Βήμα 3, αλλιώς αν ο $C_{\bar{i}}$, $\bar{i} \in \{1, 2, \dots, k\}$ περικλείει την \mathcal{H} , τότε αυτός είναι ο βέλτιστος π.κ., υπολόγισε τα ω και ρ , αλλιώς πήγαινε στο επόμενο Βήμα.

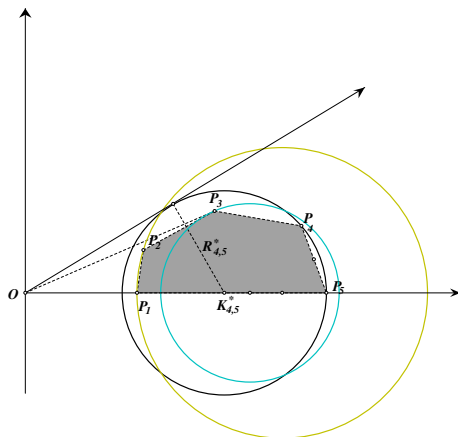
Βήμα 3^ο Προσδιόρισε τους $\binom{k}{2}$ κύκλους, που διέρχονται από τα P_i και P_j και έχουν το κέντρο τους στο θετικό ημιάξονα. Απόκλεισε όσους δεν είναι π.κ. (είτε περικλείουν την αρχή O είτε δεν περικλείουν κάποια κορυφή). Βρες εκείνη που έχει το μικρότερο λόγο $\frac{R_{i,j}}{OK_{i,j}}$, υπολόγισε τα ω και ρ .

Παραδείγματα... I



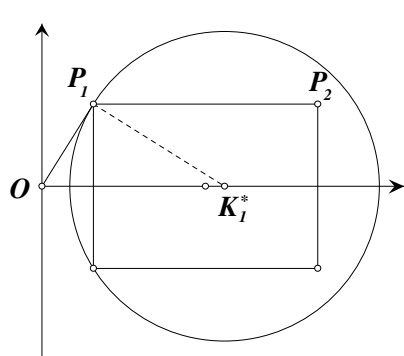
Σχήμα: Ο βέλτιστος π.κ. ενός σημείου

Παραδείγματα... II

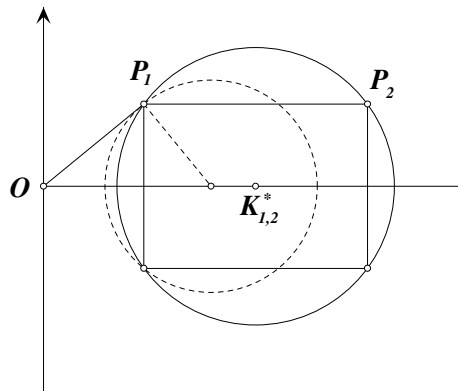


Σχήμα: Ο βέλτιστος π.κ. δυο σημείων

Παραδείγματα... III



(a)



(β)

Σχήμα: Ο βέλτιστος π.κ. στις δυο περιπτώσεις του ορθογώνιου

★ Τελικά, η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι χρήσιμη και στη σύγχρονη έρευνα !!!

★ Τελικά, η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι χρήσιμη και στη σύγχρονη έρευνα !!!

- <http://users.sch.gr/mtzoumas>
- http://inf-server.inf.uth.gr/hadjidim/talk_extra_EME.pdf
- http://inf-server.inf.uth.gr/hadjidim/paper_extra_EME.pdf
- <http://www.math.uoc.gr/pamfilos/eGallery/Gallery.html>