

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία ως Εργαλείο της Αριθμητικής Ανάλυσης σε Εφαρμογές των Μαθηματικών

Μιχαήλ Τζούμας¹ και Απόστολος Χατζηδήμος²

1 Αντί Προλόγου

Κατά την πορεία της έρευνας μιας πρόσφατης εργασίας μας [16] προέκυψε το παρακάτω Πρόβλημα Βελτιστοποίησης, το οποίο συνοπτικά διατυπώνεται ως εξής:

Πρόβλημα: 1.1 *Να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα*

$$\min_{\omega > 0} \left\{ \max_{a \in \mathcal{H}} \left| \frac{1 - \omega a}{1 + \omega a} \right| \right\}, \quad (1.1)$$

όπου \mathcal{H} κλειστό κυρτό πολύγωνο, συμμετρικό ως προς το θετικό πραγματικό ημιάξονα του μιγαδικού επιπέδου και

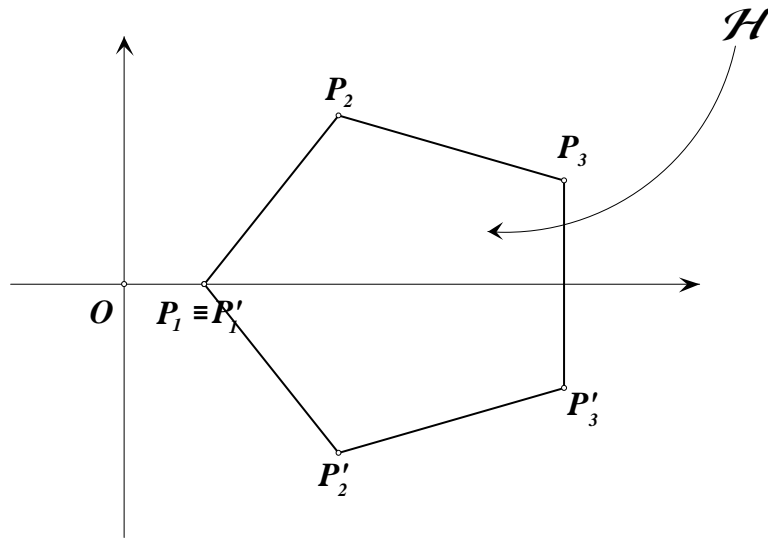
$$a = \beta + i\gamma, \quad \beta = \operatorname{Re} a > 0, \quad \gamma = \operatorname{Im} a$$

(βλ. Σχήμα 1).

Η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος μπορεί ίσως να δοθεί με πολλούς τρόπους. Η λύση που δόθηκε από μας πραγματοποιήθηκε με εργαλεία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και μόνον. Αυτός ο τρόπος της επίλυσης παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία.

¹(mtzoumas@sch.gr). Σύμβουλος Μαθηματικών Νομού Αιτωλοακαρνανίας (Ιωσήφ Ρωγών και Βείκου, 302 00 Ι. Π. Μεσολογγίου).

²Ομιλητής (hadjidim@inf.uth.gr). Ομότιμος καθηγητής Πανεπιστημίων Ιωαννίνων και Κρήτης (Τμήμα Μηχανικών Η/Υ, Τηλεπικοινωνιών & Δικτύων, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Ιάσονος 10, 383 33 Βόλος).



Σχήμα 1: Το Κλειστό Κυρτό Πολύγωνο \mathcal{H} Συμμετρικό ως προς το θετικό πραγματικό ημιάξονα

Για να τοποθετηθεί το παραπάνω πρόβλημα στο χώρο των Μαθηματικών και να εξηγηθεί ο τίτλος της εργασίας κρίνεται απαραίτητο να δοθεί μια σύντομη Εισαγωγή και στη συνέχεια να παρουσιαστεί ο Μετασχηματισμός Cayley, που έχει εφαρμογές, μεταξύ άλλων, στο Πρόβλημα της Αριθμητικής Επίλυσης της Εξίσωσης Poisson και στο “Πρόβλημα Γραμμικής Συμπληρωματικότητας”, από τα οποία προήλθε το Πρόβλημα (1.1). Ο αναγνώστης θα πρέπει να έχει υπόψη του ότι στοιχεία που θα αφορούν σε θέματα Αριθμητικής Ανάλυσης (Α.Α.) θα δοθούν περιγραφικά ενώ άλλα απλά θα αναφερθούν. Αναλυτικά θα δοθούν μόνον τα αφορώντα σε Ευκλείδεια Γεωμετρία.

2 Εισαγωγή

Τα Μαθηματικά διακρίνονται συνήθως σε δυο μεγάλες κατηγορίες χωρίς τα όρια αυτών να είναι σαφή. Στα Καθαρά Μαθηματικά (Αλγεβρα, Ανάλυση, Γεωμετρία, κ.λπ.) και τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Μια κατηγοριοποίηση των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών είναι δύσκολη λόγω της μεγάλης εξειδίκευσής τους τα τελευταία χρόνια. Γεγονός είναι ότι τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά προέρχονται από Εφαρμογές σε Καθαρά Μαθηματικά, Επιστήμες (Φυσική, Χημεία, Βιολογία, κ.λπ.), Τεχνολογία (Μηχανική, Στατική, Δυναμική, Ελαστικότητα, Ακουστική, Θερμότητα κ.λπ.) Οικονομία, Ιατρική, κ.λπ. Γενικό χαρακτηριστικό των πλείστων Προβλημάτων Εφαρμογών είναι τα πολλά αριθμητικά δεδομένα. Προφανώς, η ύπαρξη πολλών αριθμητικών δεδομένων για την εύρεση αριθμητικών αποτελεσμάτων συνεπάγεται τη χρήση Ηλεκτρονικού Υπολογιστή (Η/Υ). Η χρησιμοποίηση, όμως, του Η/Υ για την επίλυση Αριθμητικών Εφαρμογών προϋποθέτει, άμεσα ή έμμεσα,

τη βοήθεια και τη χρήση της Α.Α.

Κρίνεται έτσι σκόπιμο να εξηγηθεί η σύνδεση της Α.Α. με τον Η/Υ. Καταρχάς, θα πρέπει να τονιστεί ότι βασικός σκοπός της Α.Α είναι η κατασκευή Αριθμητικών Αλγόριθμων.

α) Αριθμητικός Αλγόριθμος είναι μία Πεπερασμένη Ακολουθία των Τεσσάρων Πράξεων της Αριθμητικής. Όπως είναι γνωστό, ο Η/Υ, σε ό,τι αφορά αριθμητικές πράξεις, μπορεί να εκτελέσει μόνον πρόσθεση σε δυαδική μορφή. Κατά κάποιο συμπληρωματικό τρόπο εκτελεί αφαίρεση και κατ' επέκταση πολλαπλασιασμό και διαίρεση, αφού οι δυο τελευταίες πράξεις αποτελούνται από διαδοχικές προσθέσεις και αφαιρέσεις, αντίστοιχα. Αρα πράξεις, όπως, π.χ., η εύρεση ρίζας οποιασδήποτε τάξης, λογάριθμοι, τριγωνομετρικών αριθμών, ορισμένων ολοκληρωμάτων κ.λπ., μπορούν να βρεθούν μόνο με κάποια “προσεγγιστική” μέθοδο της Α.Α. Η εύρεση Αριθμητικών Αλγόριθμων, που θα μετατρέπουν τις όποιες πράξεις στις τέσσερις της Αριθμητικής και μόνον αποτελεί τον κύριο σκοπό της.

β) Ο Αριθμητικός Αλγόριθμος για να είναι “ρεαλιστικός” θα πρέπει να βρίσκει το επιθυμητό αποτέλεσμα με τις λιγότερες δυνατές πράξεις. Αυτό, όπως είναι ευνόητο, έχει μεγάλη πρακτική αξία αφού ο χρόνος τον οποίο θα χρειάζεται ο Η/Υ για να καταλήξει στο αποτέλεσμα θα είναι μικρότερος. Έτσι, ένας δεύτερος σκοπός της Α.Α. είναι η κατασκευή Αριθμητικών Αλγόριθμων που θα φτάνουν στο επιδιωκόμενο αποτέλεσμα με τις λιγότερες δυνατές πράξεις. και

γ) Δε θα πρέπει να λησμονεί κανείς ότι κάθε αριθμός αποθηκεύεται στον Η/Υ σε κάποια θέση μνήμης του σε δυαδική μορφή με ένα πεπερασμένο πλήθος δυαδικών ψηφίων. Αρα τα δεδομένα του προς επίλυση προβλήματος είναι σχεδόν αδύνατον να αποθηκευτούν ακριβώς. Αυτό γιατί ο αριθμός είτε είναι άρρητος, π.χ., $\sqrt{2}$, ή είναι ρητός με τη δυαδική μορφή του να έχει άπειρα δυαδικά ψηφία, π.χ., $\frac{1}{5} = 0.001100110011 \dots_{\langle 2 \rangle}$, ή το ακριβές δυαδικό ανάπτυγμα του υπερβαίνει τη χωρητικότητα μιας θέσης μνήμης. Αρα κάποια δυαδικά ψηφία του από μια τάξη και πέρα θα πρέπει να αποκοπούν με συνέπεια ο αριθμός που τελικά αποθηκεύεται να μην είναι ο ακριβής και επομένως να έχει κάποιο “σφάλμα”, το λεγόμενο “σφάλμα στρογγύλευσης”. Υπάρχουν όμως και άλλα σφάλματα που εισχωρούν στα δεδομένα ενός προβλήματος κατά την αποθήκευση στον Η/Υ. Π.χ., αν θελήσουμε να αποθηκεύσουμε το ημίτονο μιας γνωστής γωνίας $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ σε ακτίνια. Είναι φανερό ότι η πράξη της εύρεσης του $\sin \alpha$ είναι πέρα από τις τέσσερις της Αριθμητικής. Αρα θα πρέπει λοιπόν το $\sin \alpha$ να βρεθεί από το ανάπτυγμα Taylor $\sin \alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Καθίσταται όμως φανερό ότι, ακόμη κι αν είναι δυνατόν κάθε όρος του αθροίσματος να μπορεί να αποθηκευτεί ακριβώς, είναι αδύνατον να αποθηκευτούν οι άπειροι όροι του. Αναγκαστικά θα αποκευτεί ένα μερικό άθροισμα της μορφής $\sin \alpha = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Έτσι δημιουργείται ένα σφάλμα κατά την αποθήκευση, καλούμενο “σφάλμα αποκοπής” ίσο με $\epsilon = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} = - \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Τα σφάλματα στρογγύλευσης και αποκοπής στα δεδομένα ενός προβλήματος μεταδίδονται κατά τους υπολογισμούς και δίνουν τελικά αποτελέσματα που **δεν** είναι ακριβή. Ένας τρίτος σκοπός λοιπόν της Α.Α. είναι να εντοπίζονται, να προσδιορίζονται και να περιορίζονται τα τελικά σφάλματα στα αποτελέσματα ώστε να είναι δυνατόν να αποφασίζεται αν τα λαμβανόμενα αποτελέσματα μπορούν να γίνουν αποδεκτά ή όχι.

Με βάση όλα τα παραπάνω θα μπορούσε να κατατάξει κανείς την Α.Α. στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, αφού ασχολιέται με Εφαρμογές των Μαθηματικών. Όμως η κατασκευή των Αριθμητικών Αλγόριθμων καθώς και η εύρεση των σφαλμάτων γίνονται με σκεπτικό και εργαλεία Καθαρών Μαθηματικών και άρα μπορεί να ενταχτεί στα Καθαρά Μαθηματικά. Ίσως το πιο σωστό θα ήταν να καταταγεί κάπου μεταξύ Καθαρών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.

3 Μετασχηματισμός Cayley

Ο Μετασχηματισμός Cayley ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 3.1 Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, με $\det(I + A) \neq 0$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας τάξης n , η συνάρτηση-πίνακας

$$F \equiv F(A) := (I + A)^{-1}(I - A) \quad (3.1)$$

καλείται Μετασχηματισμός Cayley.

(Σημείωση: Για ιδιότητες και θεωρητικές εφαρμογές του Μετασχηματισμού Cayley βλ., π.χ., [11].)

Ο Μετασχηματισμός Cayley μπορεί να επεκταθεί ως ακολούθως:

Ορισμός 3.2 Υπό τις προϋποθέσεις του Ορισμού 3.1, καλούμε Παρεκβαλλόμενο Μετασχηματισμό Cayley, με παράμετρο παρεκβολής ω , τη συνάρτηση-πίνακα

$$F_\omega = F(\omega A) := (I + \omega A)^{-1}(I - \omega A), \quad \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \det(I + \omega A) \neq 0. \quad (3.2)$$

Βασική Υπόθεση: Εκτός κι αν αλλιώς οριστεί, εφεξής θα θεωρείται ότι ο πίνακας A στους Ορισμούς 3.1 και 3.2 είναι πραγματικός και θετικά ευσταθής, δηλαδή οι ιδιοτιμές του βρίσκονται αυστηρά στα δεξιά του φανταστικού άξονα του μιγαδικού επιπέδου. Συγκεκριμένα, αν $a \in \sigma(A)$ τότε $\operatorname{Re} a > 0$. (Σημειώσεις: Υπενθυμίζεται ότι: α) Ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$ ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, καλείται ο αριθμός που ικανοποιεί την ισότητα $Ax = \lambda x$ ή, ισοδύναμα, την $\det(A - \lambda I) = 0$. β) Υπάρχουν συνολικά n ιδιοτιμές οι οποίες αποτελούν το καλούμενο φάσμα των ιδιοτιμών του πίνακα A που συμβολίζεται με $\sigma(A)$.)

4 Εφαρμογές

Ο Μετασχηματισμός Cayley, ο Παρεκβαλλόμενος αντίστοιχός του, καθώς και τα βαθμωτά ανάλογά τους $(\frac{1-a}{1+a}, \frac{1-\omega a}{1+\omega a})$ έχουν μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον. Από τις πολλές πρακτικές εφαρμογές τους αναφέρουμε εδώ συνοπτικά τέσσερις.

1) Στην επίλυση του Προβλήματος Γραμμικής Συμπληρωματικότητας, πιο γνωστό ως LCP, από τα αρχικά των λέξεων της αντίστοιχης αγγλικής ορολογίας (Linear Complementarity Problem), όταν ο βασικός πίνακας A είναι πραγματικός ($A \in \mathbb{R}^{n,n}$), συμμετρικός ($A^T = A$, όπου ο πάνω δείκτης “ T ” συμβολίζει τον ανάστροφο του αντίστοιχου πίνακα (ή διανύσματος)) και θετικά ορισμένος, δηλαδή $x^T A x > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και επιλύεται με τη μέθοδο του Modulus Algorithm του van Bokhoven [30]. (Σημείωση: Περισσότερα για το LCP με σχετικό παράδειγμα δίνονται στην Παράγραφο 9.)

Το LCP απαντιέται σε πάρα πολλές πρακτικές εφαρμογές. Όπως:

α) Στο Μαθηματικό Προγραμματισμό (Γραμμικό ή Κυρτό Τετραγωνικό) (βλ., π.χ., [3], [24], [25], κ.λπ.).

β) Στη Θεωρία Παιγνίων και συγκεκριμένα στο Πρόβλημα Εύρεσης του Σημείου Ισορροπίας του Nash σε Διπινακικό Παίγνιο (βλ. ανωτέρω).

γ) Στις Παραβολικές ΜΔΕ με Ελεύθερα Σύνορα και συγκεκριμένα σε Προβλήματα Μηχανικής Ρευστών, όπως στο Σχεδιασμό Σκαφών (αεροπλάνων, αυτοκινήτων, πλοίων, υποβρυχίων, κ.λπ.) (βλ. ανωτέρω).

δ) Στις Παραβολικές ΜΔΕ με Κινούμενα Σύνορα σε Προβλήματα Χρηματοοικονομίας, όπως στο περίφημο “Αμερικανικό Πρόβλημα Εκτίμησης Επιλογών” (βλ., π.χ., [27], [21]).

2) Στον προσδιορισμό της βέλτιστης επιταχυντικής παραμέτρου κατά την επίλυση του Γραμμικού Συστήματος, που προκύπτει από τη διακριτοποίηση Ελλειπτικών και Παραβολικών ΜΔΕ κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, με την Επαναληπτική Μέθοδο των Πεπλεγμένων Εναλλασσόμενων Διευθύνσεων (Alternating Direction Implicit (ADI)) των Peaceman και Rachford [28]. (Σημείωση: Περισσότερα στην Παράγραφο 10.)

3) Στην επίλυση Μιγαδικού Γραμμικού Συστήματος Αλγεβρικών Εξισώσεων με πίνακα συντελεστών αγνώστων $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ θετικά ευσταθή με μια ADI-τύπου επαναληπτική μέθοδο βασιζόμενη στην Ερμιτιανή-Αντιερμιτιανή Διάσπαση των Bai, Golub και Ng [2].

4) Ομοίως ως άνω με την Κανονική-Αντιερμιτιανή Διάσπαση των ίδιων ερευνητών [12].

5 Το Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

Το Πρόβλημα της βελτιστοποίησης της παρούσας εργασίας, με βάση και τις Εφαρμογές της προηγούμενης Παραγράφου, προέρχεται από την επιθυμία μας της ελαχιστοποίησης της φασματικής ακτίνας του πίνακα του Παρεκβαλλόμενου Μετασχηματισμού Cayley στην (3.2), όταν ο πίνακας A είναι πραγματικός και θετικά ευσταθής. Συγκεκριμένα:

Πρόβλημα: 5.1 Να προσδιοριστεί η “βέλτιστη” τιμή της παραμέτρου (παρεκβολής) ω , η οποία

επιλύει το Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

$$\min_{\omega > 0} \rho(F_\omega) = \min_{\omega > 0} \max_{a_i \in \sigma(A), i=1(1)n} \left| \frac{1 - \omega a_i}{1 + \omega a_i} \right| (< 1). \quad (5.1)$$

Σημειώσεις: α) Γενικά, φασματική ακτίνα πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ καλείται το μέτρο της απόλυτα μεγαλύτερης ιδιοτιμής του και συμβολίζεται με $\rho(B)$. Δηλαδή, $\rho(B) := \max_{i=1(1)n} |b_i|$, όπου b_i , $i = 1(1)n$, οι ιδιοτιμές του B . β) Μπορεί να αποδειχτεί ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα $F_\omega = (I + \omega A)^{-1}(I - \omega A)$ δίνονται από τις εκφράσεις $\frac{1 - \omega a_i}{1 + \omega a_i}$, όπου με a_i , $i = 1(1)n$, συμβολίζονται οι ιδιοτιμές του A . γ) Η παράμετρος παρεκβολής ω επιλέγεται πραγματική λόγω της συμμετρίας του φάσματος των ιδιοτιμών του A , $\sigma(A)$, ως προς το θετικό πραγματικό ημιάξονα και επιπλέον θετική, αφού το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών a_i του A είναι θετικό, ώστε να ισχύει $|\frac{1 - \omega a_i}{1 + \omega a_i}| < 1$, $a_i \in \sigma(A)$. Η ισχύς της παραπάνω ανισότητας εξασφαλίζει τη σύγκλιση μιας Επαναληπτικής Μεθόδου για την επίλυση Γραμμικού Συστήματος $Bx = b$, $B \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\det(B) \neq 0$, $b \in \mathbb{C}^n$, με επαναληπτικό πίνακα F_ω , στη μοναδική λύση του αρχικού συστήματος (βλ., π.χ, [10]).

6 Γενίκευση του Προβλήματος Βελτιστοποίησης

Αρχίζουμε την παρούσα παράγραφο με έναν ορισμό.

Ορισμός 6.1 Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ και έστω $\sigma(A)$ το φάσμα των ιδιοτιμών του. Κλειστή κυρτή θήκη \mathcal{H} του διακριτού συνόλου $\sigma(A)$ καλείται το μικρότερο κλειστό κυρτό πολύγωνο που περιέχει το $\sigma(A)$ στο κλειστό εσωτερικό του.

Σημείωση: Στην περίπτωση όπου ο $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι προφανές ότι το $\sigma(A)$ θα είναι συμμετρικό ως προς τον πραγματικό άξονα. Αν δε, όπως στην περιπτώσή μας του Προβλήματος 5.1, ο A είναι και θετικά ευσταθής, τότε το $\sigma(A)$ θα είναι συμμετρικό ως προς το θετικό πραγματικό ημιάξονα, άρα και η κλειστή κυρτή θήκη \mathcal{H} του $\sigma(A)$ θα είναι συμμετρική ως προς τον ημιάξονα αυτόν.

Αντί του Προβλήματος 5.1 θεωρούμε το παρακάτω γενικότερο πρόβλημα βελτιστοποίησης, το οποίο, όπως θα αποδειχτεί στη συνέχεια, είναι αφενός ισοδύναμο με το Πρόβλημα 5.1 και αφετέρου λύνεται ευκολότερα.

Πρόβλημα: 6.1 Να προσδιοριστεί η “βέλτιστη” τιμή της παραμέτρου (παρεκβολής) ω , η οποία επιλύει το Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

$$\min_{\omega > 0} \max_{a \in \mathcal{H}} \left| \frac{1 - \omega a}{1 + \omega a} \right| (< 1). \quad (6.1)$$

6.1 Μετασχηματισμοί Möbius

Θεωρούμε τη συνάρτηση που βρίσκεται εντός του μέτρου της έκφρασης (6.1). Συγκεκριμένα

$$w := w(a) = \frac{1 - \omega a}{1 + \omega a}, \quad a \in \mathcal{H}, \quad \omega > 0. \quad (6.2)$$

Η συνάρτηση $w = w(a)$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- 1) Η w είναι ένας Μετασχηματισμός Möbius (βλ. [17]). Επομένως αποτελεί μια σύμμορφη απεικόνιση, δηλαδή είναι ένα-προς-ένα μετασχηματισμός ο οποίος διατηρεί τις γωνίες.
- 2) Η w **δεν** έχει πόλους αφού $\operatorname{Re}(1 + \omega a) = 1 + \omega \operatorname{Re} a > 0$. και
- 3) Η $w(a)$ **δεν** είναι η σταθερή συνάρτηση, αφού $\det \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ 1 & \omega \end{pmatrix} = 2\omega > 0$.

Επιπλέον, η συνάρτηση (μετασχηματισμός) $w = w(a)$ έχει αντίστροφη συνάρτηση (μετασχηματισμό). Ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνεται από την

$$w^{-1}(w(a)) = a = \frac{1 - w}{\omega(1 + w)}, \quad w = w(a), \quad a \in \mathcal{H}, \quad \omega > 0 \quad (6.3)$$

και έχει αντίστοιχες ιδιότητες όπως ο (6.2). Συγκεκριμένα:

- 1) Η συνάρτηση w^{-1} αποτελεί ένα μετασχηματισμό Möbius.
- 2) Η w^{-1} **δεν** έχει πόλους, αφού αν $\omega(1 + w) = 0$ συνεπάγεται $w = -1$, το οποίο μπορεί να προέρθει από την (6.2) μόνο για $a = \infty$, πράγμα άτοπο γιατί το a ανήκει στο σύνολο \mathcal{H} που είναι πεπερασμένο.
- 3) Η w^{-1} **δεν** είναι η σταθερή συνάρτηση, αφού $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \omega & \omega \end{pmatrix} = 2\omega > 0$.

Είναι γνωστό ότι ένας Μετασχηματισμός Möbius, όπως ο (6.2) ή ο (6.3), μετασχηματίζει γενικά τον κλειστό δίσκο σε έναν κλειστό δίσκο (βλ. [17]). Για να διαπιστωθεί ο ισχυρισμός αυτός και κυρίως για να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα ακολουθεί η παρακάτω ανάλυση.

Εστω ένα $\omega > 0$, και \mathcal{C}_ω ο κύκλος κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας

$$\rho := \rho(\mathcal{C}_\omega) = \max_{a \in \mathcal{H}} |w(a)| (< 1). \quad (6.4)$$

Από τη φύση του μετασχηματισμού Möbius (6.3), πρότυπο του \mathcal{C}_ω πρέπει να είναι κύκλος, έστω \mathcal{C} . Για να διαπιστωθεί του λόγου το αληθές και κυρίως για να βρεθεί η σύνδεση των στοιχείων των δυο αυτών κύκλων θεωρούμε ως σημείο εκκίνησης την εξίσωση του κύκλου \mathcal{C}_ω , που είναι η ακόλουθη

$$\mathcal{C}_\omega := |w| = \rho. \quad (6.5)$$

(Σημείωση: Τονίζεται ότι στα επόμενα θα χρησιμοποιούνται εναλλακτικά οι συμβολισμοί \mathcal{C}_ω και \mathcal{C} για τους κύκλους ή/και για τους αντίστοιχους κλειστούς δίσκους.) Με διαδοχικούς μετασχημα-

τισμούς, όπου χρησιμοποιείται και ο μετασχηματισμός (6.2), έχουμε

$$\begin{aligned}
|w| = \rho &\Leftrightarrow |w|^2 = \rho^2 \Leftrightarrow w\bar{w} = \rho^2 \Leftrightarrow \frac{1 - \omega a}{1 + \omega a} \cdot \frac{1 - \omega \bar{a}}{1 + \omega \bar{a}} = \rho^2 \Leftrightarrow \\
&\omega^2(1 - \rho^2)a\bar{a} - \omega(1 + \rho^2)(a + \bar{a}) + (1 - \rho^2) = 0 \Leftrightarrow \\
a\bar{a} - \frac{(1 + \rho^2)}{\omega(1 - \rho^2)}(a + \bar{a}) + \left(\frac{(1 + \rho^2)}{\omega(1 - \rho^2)}\right)^2 &= \left(\frac{(1 + \rho^2)}{\omega(1 - \rho^2)}\right)^2 - \frac{1}{\omega^2} \Leftrightarrow \\
\left|a - \frac{(1 + \rho^2)}{\omega(1 - \rho^2)}\right|^2 &= \left(\frac{2\rho}{\omega(1 - \rho^2)}\right)^2 \Leftrightarrow \\
\left|a - \frac{(1 + \rho^2)}{\omega(1 - \rho^2)}\right| &= \frac{2\rho}{\omega(1 - \rho^2)} \Leftrightarrow |a - c| = R, \tag{6.6}
\end{aligned}$$

όπου

$$c := \frac{1 + \rho^2}{\omega(1 - \rho^2)}, \quad R := \frac{2\rho}{\omega(1 - \rho^2)} \quad (c > R \geq 0). \tag{6.7}$$

Είναι φανερό ότι η εξίσωση

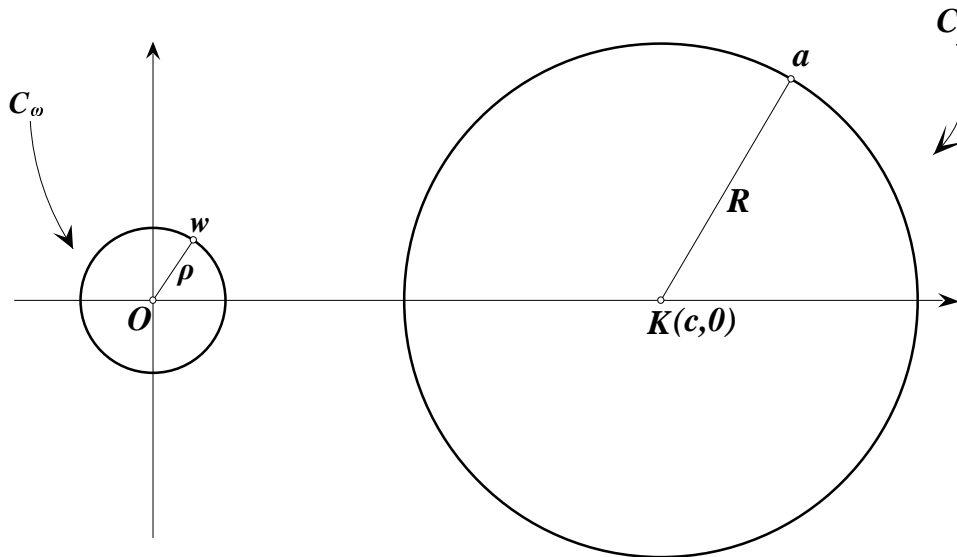
$$\mathcal{C} := |a - c| = R, \tag{6.8}$$

είναι η εξίσωση ενός κύκλου \mathcal{C} , που έχει κέντρο c και ακτίνα R . Προφανώς ο κύκλος \mathcal{C}_ω είναι η εικόνα του \mathcal{C} διαμέσου του μετασχηματισμού (6.2) και αντίστροφα, δηλαδή ο κύκλος \mathcal{C} είναι η εικόνα του \mathcal{C}_ω διαμέσου του αντίστροφου μετασχηματισμού (6.3) (βλ. Σχήμα 2).

6.2 Περικλείων Κύκλος (π.κ.)

Ο κύκλος \mathcal{C} , που βρέθηκε προηγουμένως, χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες τέσσερις ιδιότητες:

- 1) Το κέντρο του \mathcal{C} βρίσκεται στο θετικό πραγματικό ημιάξονα, αφού από την πρώτη των (6.7) και την (6.4) συμπεραίνεται ότι $c > 0$.
- 2) Ο \mathcal{C} βρίσκεται στο ανοιχτό δεξιά ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου, αφού από τις δυο εξισώσεις των (6.7) έχουμε ότι $c > R \geq 0$.
- 3) Ο \mathcal{C} περιέχει στο κλειστό εσωτερικό του την κλειστή κυρτή θήκη \mathcal{H} του $\sigma(A)$. Αυτό ισχύει λόγω των ορισμών του \mathcal{C}_ω και του ρ , στην (6.4), καθώς και της σειράς των παραπάνω ισοδυναμιών, από όπου συνάγεται ότι $w(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}_\omega = w(\mathcal{C})$ και άρα $w^{-1}(w(\mathcal{H})) \subset w^{-1}(w(\mathcal{C}))$, δηλαδή $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}$, όπου στις σχέσεις συνόλων με \mathcal{C}_ω και \mathcal{C} θεωρούνται οι αντίστοιχοι δίσκοι.
- 4) Ο κύκλος \mathcal{C} διέρχεται από μια κορυφή της κλειστής κυρτής θήκης \mathcal{H} του $\sigma(A)$. Αυτό δικαιολογείται από τον ορισμό του ρ στην (6.4), οπότε ο $\mathcal{C}_\omega = w(\mathcal{C})$ θα διέρχεται από ένα συνοριακό σημείο του $w(\mathcal{H})$. Αρα, λόγω της σειράς των ισοδυναμιών που αποδείχτηκαν και της προηγούμενης



Σχήμα 2: Αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση επί του κύκλου C_ω στον κύκλο C και αντίστροφα

ιδιότητας (3) έπεται ότι ο C θα περιέχει την \mathcal{H} στο κλειστό εσωτερικό του και επειδή η \mathcal{H} είναι κυρτό πολύγωνο ο C θα διέρχεται από ένα συνοριακό σημείο της \mathcal{H} , που δεν είναι παρά μια κορυφή του πολυγώνου.

Ορισμός 6.2 Εστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ θετικά ευσταθής, $\sigma(A)$ το φάσμα των ιδιοτιμών του και \mathcal{H} η κλειστή κυρτή θήκη του $\sigma(A)$. Κάθε κύκλος C που ικανοποιεί τις παραπάνω τέσσερις ιδιότητες θα καλείται **περικλείων κύκλος (π.κ.)** της \mathcal{H} .

Θεώρημα 6.1 Για ένα συγκεκριμένο κλειστό κυρτό πολύγωνο \mathcal{H} , που είναι συμμετρικό ως προς το θετικό πραγματικό ημιάξονα του μιγαδικού επιπέδου, υπάρχουν **άπειροι π.κ.**

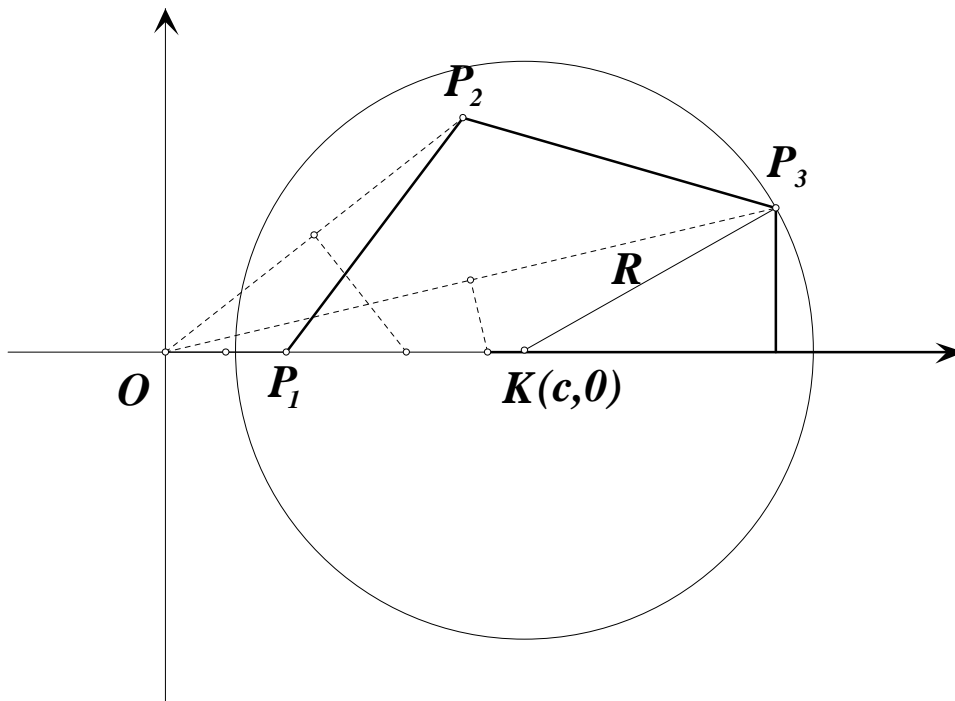
Απόδειξη: Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας, θεωρούμε τις μεσοκάθετες στα ευθύγραμμα τμήματα OP_i , $i = 1(1)k$, όπου P_i , $i = 1(1)k$, είναι οι κορυφές του \mathcal{H} στο πρώτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου. Εστω ότι $K_i(c_i, 0)$, $i = 1(1)k$, είναι οι τομές των μεσοκαθέτων αυτών με το θετικό πραγματικό ημιάξονα. Ο κύκλος κέντρου $K(c, 0)$, τέτοιος ώστε

$$c \in \left(\max_{i=1(1)k} c_i, +\infty \right)$$

και ακτίνας

$$R = \max_{i=1(1)k} (KP_i)$$

είναι ένας **περικλείων κύκλος** του \mathcal{H} (βλ. Σχήμα 3). Προφανώς υπάρχουν άπειρες επιλογές του κέντρου K και άρα των αντίστοιχων κύκλων. Κάθε τέτοιος κύκλος μπορεί να αποδειχτεί ότι ικανοποιεί και τις τέσσερις ιδιότητες του ορισμού του **π.κ.**, όπου η απόδειξη ως απλή παραλείπεται. Άρα υπάρχουν άπειροι **π.κ.** □



Σχήμα 3: Ένας από τους περικλείοντες κύκλους του \mathcal{H}

Με βάση τα μέχρι στιγμής εκτεθέντα είναι δυνατόν να διαπιστωθεί ότι τα Προβλήματα 5.1 και 6.1 είναι ισοδύναμα. Σχετικά ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Θεώρημα 6.2 Το Πρόβλημα 6.1 είναι ισοδύναμο με το Πρόβλημα 5.1.

Απόδειξη: Από την προηγηθείσα ανάλυση έχουμε ισχύουσα την ακόλουθη σειρά των διαδοχικών σχέσεων

$$\begin{aligned} \min_{\omega > 0} \max_{a \in \mathcal{H}} \left| \frac{1-\omega a}{1+\omega a} \right| &= \min_{\omega > 0} \max_{a \in \mathcal{H}} |w(a)| = \min_{\omega > 0} \rho = \min_{\omega > 0} \rho(w(\mathcal{C})) = \\ \min_{\omega > 0} \max_{a_i \in \sigma(A), i=1(1)k} |w(a_i)| &= \min_{\omega > 0} \max_{a_i \in \sigma(A), i=1(1)k} \left| \frac{1-\omega a_i}{1+\omega a_i} \right| = \min_{\omega > 0} \rho(F_\omega). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Συγκεκριμένα, η πρώτη έκφραση είναι αυτή του Προβλήματος 6.1 και είναι ίση με τη δεύτερη λόγω του ορισμού του μετασχηματισμού w στην (6.2). Η δεύτερη έκφραση είναι ίση με την επόμενη

από τον ορισμό του ρ στην (6.4). Η τέταρτη έκφραση είναι ίση με την προηγούμενη από την (6.4) και από το γεγονός ότι $C_\omega \equiv w(C)$. Η πέμπτη έκφραση είναι ίση με την προηγούμενή της γιατί ο κύκλος C είναι π.κ. του \mathcal{H} και διέρχεται από μια κορυφή του και αυτή η κορυφή αποτελεί ένα στοιχείο του $\sigma(A)$. Η προτελευταία έκφραση λαμβάνεται από την προηγούμενή της διαμέσου της (6.2) και η τελευταία από τις ισότητες (5.1) του Προβλήματος 5.1. \square

7 Βέλτιστος Περικλείων Κύκλος (π.κ)

Η μέχρι τώρα ανάλυση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για να επιλύσουμε το αρχικό Πρόβλημα 5.1 πρέπει και αρκεί να επιλύσουμε το Πρόβλημα 6.1. Για την επίλυση του τελευταίου, από τις (6.9), πρέπει και αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε το ρ της (6.4). Για το σκοπό αυτό και λόγω της σειράς των ισοδυναμιών της Παραγράφου 6.1 πρέπει και αρκεί να βρεθεί ο π.κ. C του οποίου η εικόνα C_ω διαμέσου του μετασχηματισμού (6.2) δίνει με βάση την (6.4) το ελάχιστο ρ .

Θεώρημα 7.1 *Εστω ότι ο κύκλος C είναι ένας περικλείων κύκλος του \mathcal{H} , κέντρου $K(c, 0)$, με τετμημένη $c > 0$, και ακτίνας $R (< c)$. Εστω ότι ο C_ω είναι η εικόνα του C διαμέσου του μετασχηματισμού (6.2). Τότε,*

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{c^2 - R^2}}, \quad \rho = \frac{R}{c + \sqrt{c^2 - R^2}}. \quad (7.1)$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη της δεύτερης των παραπάνω σχέσεων διαιρούμε κατά μέλη τις εκφράσεις που μας δίνουν τα R και c στις σχέσεις (6.7), οπότε παίρνουμε

$$\frac{R}{c} = \frac{2\rho}{1 + \rho^2}.$$

Η δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς ρ , που προκύπτει από την εξίσωση που μόλις βρέθηκε, έχει δυο ρίζες. Η ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $[0, 1)$, δίνεται από την έκφραση στη δεύτερη των σχέσεων (7.1). Χρησιμοποιώντας την έκφραση για το ρ που βρέθηκε προηγουμένως σε μία από τις (6.7) και λύνοντας ως προς ω μπορεί να βρεθεί έπειτα από μερικές απλές πράξεις η πρώτη των (7.1). \square

Παρατήρηση: Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι διαιρώντας τους δυο όρους του κλάσματος της δεύτερης σχέσης των (6.7) με c παίρνουμε μια έκφραση που είναι συνάρτηση του λόγου $\frac{R}{c} \in [0, 1)$. Συγκεκριμένα

$$\rho = \frac{\frac{R}{c}}{1 + \sqrt{1 - (\frac{R}{c})^2}}. \quad (7.2)$$

Επειδή ενδιαφερόμαστε για την ελαχιστοποίηση του ρ οδηγούμαστε στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 7.1 Η συνάρτηση

$$f(x) := \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \quad (7.3)$$

είναι συνεχώς αύξουσα στο διάστημα $[0, 1)$. Επίσης, για κάθε $x \in [d, e) \subseteq [0, 1)$, $f(x)$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της στο αριστερό άκρο του διαστήματος $x = d$.

Απόδειξη: Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $f(x)$ παίρνουμε μετά από απλές πράξεις

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{(1 + \sqrt{1 - x^2})\sqrt{1 - x^2}} > 0.$$

Άρα η $f(x)$ είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $[0, 1)$ και το πρώτο μέρος του λήμματος αποδείχτηκε. Το δεύτερο μέρος του είναι άμεση συνέπεια του πρώτου. \square

Με βάση το Θεώρημα 7.1, την Παρατήρηση που ακολουθεί και το Λήμμα 7.1 διατυπώνουμε την κύρια πρόταση της παρούσας εργασίας.

Θεώρημα 7.2 Εστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ θετικά ευσταθής, $\sigma(A)$ το φάσμα των ιδιοτιμών του, και \mathcal{H} η κλειστή κυρτή θήκη του $\sigma(A)$. Η λύση του Προβλήματος 6.1 (ή, ισοδύναμα, της ελαχιστοποίησης της φασματικής ακτίνας του παρεκβαλλόμενου μετασχηματισμού Cayley υπό τις προϋποθέσεις του Προβλήματος 5.1) δίνεται διαμέσου των σχέσεων (7.1) από τα στοιχεία c και R του βέλτιστου περικλείοντα κύκλου (π.κ.) C^* της \mathcal{H} . Με βάση το Θεώρημα 7.1, τη σχέση (7.2), της Παρατήρησης που ακολουθεί και το Λήμμα 7.1, ο βέλτιστος π.κ. βρίσκεται από την ελαχιστοποίηση του λόγου $\frac{R}{c}$.

Απόδειξη: Η απόδειξη του θεωρήματος είναι προφανής και συνεπώς παραλείπεται. \square

8 Αλγόριθμος Βέλτιστου Περικλείοντα Κύκλου (π.κ.)

8.1 Εισαγωγή

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το πρόβλημα της εύρεσης του βέλτιστου π.κ. της κλειστής κυρτής θήκης \mathcal{H} ενός διακριτού συνόλου συμμετρικού ως προς το θετικό πραγματικό ημιάξονα έχει ουσιαστικά λυθεί στις εργασίες του Hughes Hallett [18] και [19] καθώς και του Hadjidimos [13], όταν αναζητιώταν το βέλτιστο της συνάρτησης $|1 - \omega a|$, με ω και a να ικανοποιούν τις υποθέσεις της παρούσας εργασίας. Το μόνο ασθενές σημείο των προαναφερθεισών εργασιών ήταν η μη δυνατότητα γενίκευσης της λύσης καθώς και το θέμα της μοναδικότητας που δεν ήταν απόλυτα σαφές. Ένα πιο γενικευμένο πρόβλημα βελτιστοποίησης, συγκεκριμένα αυτό της ελαχιστοποίησης της προηγούμενης συνάρτησης ($|1 - \omega a|$), όταν το ω είναι μιγαδικό και το a μεταβάλλεται σε ένα κλειστό κυρτό

πολύγωνο \mathcal{H} με την προϋπόθεση ότι $0 \notin \mathcal{H}$, επιλύθηκε από το Hadjidimos [14], όπου ως μερική περίπτωση είχε θεωρηθεί και αυτή του \mathcal{H} να είναι ευθύγραμμο τμήμα. Την ίδια χρονιά και στο ίδιο περιοδικό δημοσιεύτηκε η εργασία των Opfer και Schober [26] στην οποία επιλύεται το ίδιο πρόβλημα με την προϋπόθεση ότι το \mathcal{H} είναι ευθύγραμμο τμήμα ή έλλειψη. Οι τρόποι επίλυσης του προβλήματος στις δυο προαναφερθείσες εργασίες ήταν τελείως διαφορετικοί. Στην περίπτωση της [14] χρησιμοποιήθηκαν Απολλώνιοι Κύκλοι [8] ενώ στην [26] χρησιμοποιήθηκαν Πολλαπλασιαστές Lagrange [1]. Η μη προφανής ισοδυναμία των δύο μεθόδων επίλυσης δεν επέτρεπε στους ερευνητές να χρησιμοποιήσουν τις δυο αυτές προσεγγίσεις σε μερικές περιπτώσεις και σε απλούστερα προβλήματα (π.χ., στην περίπτωση ενός ορθογωνίου ή ενός κυκλικού τμήματος συμμετρικών ως προς το θετικό πραγματικό ημιάξονα [5] και [4]). Αυτό το σημείο παρέμενε ασαφές μέχρι πρόσφατα, οπότε αποδείχτηκε, μεταξύ των άλλων, [15], η ισοδυναμία των μεθόδων των εργασιών [14] και [26].

8.2 Προκαταρκτικά-Απολλώνιος Κύκλος

Η εύρεση του Αλγόριθμου του Βέλτιστου π.κ. για την περίπτωση του προβλήματος της παρούσας εργασίας θα δοθεί αναλυτικά.

Για το σκοπό αυτό, συμβολίζουμε με $P_i(\beta_i, \gamma_i)$, $i = 1(1)k$, $0 < \beta_i < \beta_{i+1}$, $i = 1(1)k - 1$, $\gamma_i \geq 0$, $i = 1(1)k$, τις κορυφές της \mathcal{H} , στο πρώτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου, διατεταγμένες έτσι ώστε οι τετμημένες τους να βαίνουν αύξανόμενες.

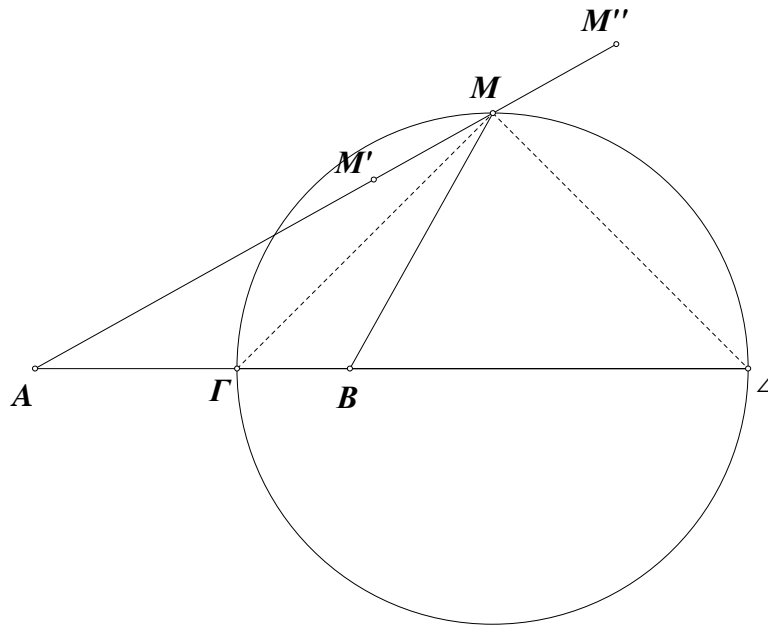
Από το Θεώρημα 7.2 έχουμε ότι για να βρούμε το βέλτιστο π.κ. θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το λόγο $\frac{R}{c}$, όπου c είναι η τετμημένη του κέντρου $K(c, 0)$ του π.κ. \mathcal{C} , που βρίσκεται στο θετικό πραγματικό ημιάξονα, και $R = (KP_i)$ είναι η ακτίνα του, όπου P_i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, είναι η “άγνωστη” κορυφή από την οποία διέρχεται ο π.κ. \mathcal{C} . Επειδή αναφερόμαστε σε ελαχιστοποίηση λόγου αποστάσεων, $\frac{(KP_i)}{(KO)}$, ενός άγνωστου σημείου K , του θετικού πραγματικού ημιάξονα, από μία κορυφή της \mathcal{H} , που είναι k συνολικά, και από την αρχή των αξόνων, αυτό θυμίζει έντονα Απολλώνιο Κύκλο [8]. Θεωρούμε, λοιπόν, σκόπιμο να θυμίσουμε τα σχετικά με τον Απολλώνιο Κύκλο.

Θεώρημα 8.1 *Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα να απέχουν από δυο γνωστά σημεία του επιπέδου A και B αποστάσεις με δοθέντα λόγο $\lambda = \frac{(MB)}{(MA)}$, $\lambda \in (0, 1)$, είναι κύκλος (Απολλώνιος Κύκλος) με διάμετρο $\Gamma\Delta$, όπου Γ και Δ τα σημεία που χωρίζουν εσωτερικά και εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα AB στο δοθέντα λόγο λ . Συγκεκριμένα,*

$$\frac{(\Gamma B)}{(\Gamma A)} = \frac{(\Delta B)}{(\Delta A)} = \lambda \quad (8.1)$$

(βλ. Σχήμα 4).

Σημειώσεις: α) Στην περίπτωση $\lambda = 0$, ο Απολλώνιος Κύκλος εκφυλίζεται στο σημείο B . β) Στην περίπτωση $\lambda = 1$, ο Απολλώνιος κύκλος έχει ως οριακή περίπτωση τη μεσοκάθετη στο ευθύγραμμο

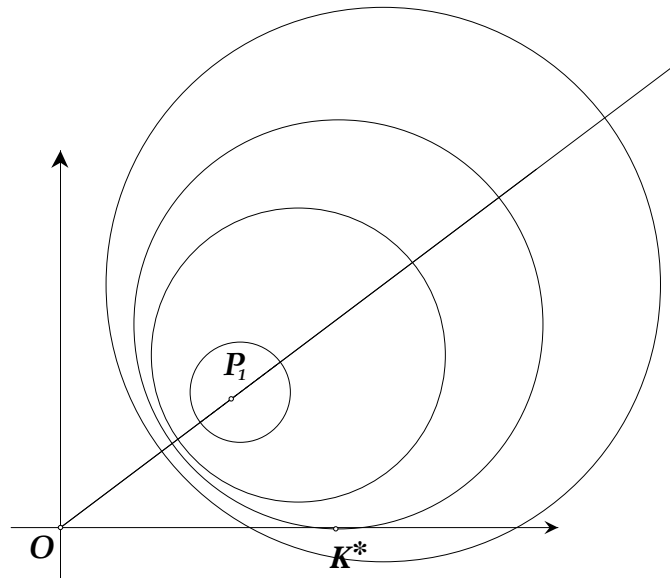


Σχήμα 4: Απολλώνιος Κύκλος

τμήμα AB . γ) Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι κάθε σημείο εσωτερικό ενός συγκεκριμένου Απολλώνιου Κύκλου, με γνωστό λόγο $\lambda \in (0, 1)$, στο Σχήμα 4 $\lambda = \frac{(MB)}{(MA)}$, έχει λόγο αποστάσεων από τα σημεία B και A μικρότερο του λ ($\frac{(M'B)}{(M'A)} < \lambda$), ενώ κάθε σημείο εξωτερικό του συγκεκριμένου κύκλου έχει αντίστοιχο λόγο αποστάσεων μεγαλύτερο του λ ($\frac{(M''B)}{(M''A)} > \lambda$). Αυτό θα αποδειχτεί επίσης έμμεσα στη συνέχεια. δ) Για το τυχόν σημείο M του Απολλώνιου Κύκλου η $M\Gamma$ είναι διχοτόμος της εσωτερικής γωνίας $\angle AMB$ του τριγώνου MAB , ενώ η $M\Delta$ είναι διχοτόμος της αντίστοιχης εξωτερικής γωνίας.

8.3 Συγκεκριμένες Περιπτώσεις

Εξετάζουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις που μπορεί να προκύψουν, οι οποίες μπορούν να συγκεκριμενοποιηθούν σ' αυτές όπου το πλήθος των κορυφών k της κλειστής κυρτής θήκης \mathcal{H} στο πρώτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου είναι $k = 1$, $k = 2$ και $k \geq 3$.



Σχήμα 5: Απολλώνιοι Κύκλοι των Σημείων P_1 και O που αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές του λόγου $\lambda < 1$

8.3.1 Περίπτωση $k = 1$

Εξετάζουμε καταρχάς την περίπτωση όπου η κλειστή κυρτή θήκη \mathcal{H} είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα και άρα έχει μία μόνο κορυφή $P_1(\beta_1, \gamma_1)$ στο πρώτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου και μάλιστα με $\gamma_1 > 0$. Το πρόβλημά μας είναι να βρεθεί σημείο $K(c, 0)$ στο θετικό πραγματικό ημιάξονα έτσι ώστε, σύμφωνα με το Θεώρημα 8.1, ο λόγος $\frac{R}{c} = \frac{(KP_1)}{(KO)}$ να είναι ελάχιστος. Επειδή τα σημεία P_1 και O είναι και τα δύο γνωστά και σταθερά το πρόβλημα καθίσταται ευκολότερο, όπως θα δούμε στη συνέχεια, παρά το γεγονός ότι ο λόγος $\lambda = \frac{(KP_1)}{(KO)}$ είναι άγνωστος. Γνωρίζουμε όμως ότι ο **π.κ.** έχει κέντρο στο θετικό πραγματικό ημιάξονα, πράγμα που θα εκμεταλλευτούμε. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ότι το σημείο Γ συμπίπτει στην αρχή με το σημείο P_1 και κινείται συνεχώς προς το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος OP_1 . Είναι φανερό ότι σε κάθε θέση του Γ αντιστοιχεί ένα μοναδικό σημείο Δ στην προέκταση του OP_1 προς το μέρος του P_1 τέτοιο ώστε $\frac{(\Delta P_1)}{(\Delta O)} = \frac{(\Gamma P_1)}{(\Gamma O)}$. Είναι φανερό επίσης ότι κατά τη συνεχή αυτή κίνηση του Γ προς το μέσο του OP_1 , αντιστοιχεί ένας και μοναδικός Απολλώνιος Κύκλος για κάθε θέση του Γ και ότι στο σύνολο των θέσεων του Γ αντιστοιχεί μια οικογένεια Απολλώνιων Κύκλων. Πιο συγκεκριμένα, μπορεί να διαπιστωθεί, με βάση και τη Σημείωση (γ) του Θεωρήματος 8.1, ότι σε δυο διαφορετικές θέσεις του Γ αντιστοιχούν δυο διαφορετικοί Απολλώνιοι Κύκλοι και μάλιστα αυτός που αντιστοιχεί στη θέση του Γ , που είναι πλησιέστερα στο P_1 , βρίσκεται αυστηρά στο εσωτερικό αυτού, που αντιστοιχεί στην πιο μακρινή θέση του Γ . Μια τυχαία επιλεγμένη διαδοχή τέτοιων Απολλώνιων Κύκλων φαίνεται στο Σχήμα 5.

Αν M_1, M_2, M_3 , και M_4 θεωρηθούν τυχαία σημεία στους τέσσερις κύκλους, αντίστοιχα από τον εσωτερικό προς τον εξωτερικό, του Σχήματος 5, τότε προφανώς θα ισχύουν οι σχέσεις

$$0 < \frac{(M_1P_1)}{(M_1O)} < \frac{(M_2P_1)}{(M_2O)} < \frac{(M_3P_1)}{(M_3O)} < \frac{(M_4P_1)}{(M_4O)} < 1. \quad (8.2)$$

Ετσι, με βάση το Θεώρημα 7.2 και τη Σημείωση (γ) του Θεωρήματος 8.1, που αντικατοπτρίζεται στις σχέσεις (8.2) του Σχήματος 5, είναι φανερό ότι το ζητούμενο κέντρο $K^*(c^*, 0)$ του βέλτιστου **π.κ.** C^* δε θα είναι άλλο από το σημείο επαφής του θετικού πραγματικού ημιάξονα με το μοναδικό Απολλώνιο Κύκλο, από τη θεωρηθείσα προηγουμένως οικογένεια των άπειρων Απολλώνιων Κύκλων, που εφάπτεται στον εν λόγω ημιάξονα. Αυτό ισχύει γιατί κάθε άλλο σημείου του θετικού πραγματικού ημιάξονα $M \neq K^*$, ως ευρισκόμενο εκτός του θεωρηθέντα Απολλώνιου Κύκλου, που αντιστοιχεί στα P_1 και O και διέρχεται από το σημείο επαφής K^* , θα έχει λόγο αποστάσεων λ από τα σημεία P_1, O τέτοιο ώστε $\lambda = \frac{(MP_1)}{(MO)} > \frac{(K^*P_1)}{(K^*O)}$.

Φυσικά, απομένει ο προσδιορισμός του σημείου $K^* \equiv K_1^*(c_1^*, 0)$ και απ' αυτό ο προσδιορισμός των στοιχείων του c_1^* και R_1^* του βέλτιστου **π.κ.** C_1^* . Ο προσδιορισμός αυτός μπορεί να δοθεί με τη μορφή της παρακάτω πρότασης.

Θεώρημα 8.2 *Εστω $P_1(\beta_1, \gamma_1)$, $\gamma_1 > 0$, η μοναδική κορυφή της $\mathcal{H} \equiv [\beta_1 - \gamma_1, \beta_1 + \gamma_1]$ στο πρώτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου, $K_1^*(c_1^*, 0)$ το σημείο επαφής του (μοναδικού) Απολλώνιου Κύκλου με λόγο $\lambda = \frac{(K_1^*P_1)}{(K_1^*O)} (< 1)$, και A και B τα σημεία που χωρίζουν το ευθύγραμμο τμήμα στον υπόψη λόγο λ (βλ. Σχήμα 6). Τότε, το σημείο K_1^* βρίσκεται ως το σημείο τομής της κάθετης στην OP_1 στο P_1 με το θετικό πραγματικό ημιάξονα. Επιπλέον,*

$$c_1^* = \frac{\beta_1^2 + \gamma_1^2}{\beta_1}, \quad R_1^* = \frac{\gamma_1 \sqrt{\beta_1^2 + \gamma_1^2}}{\beta_1}. \quad (8.3)$$

Απόδειξη: Το τρίγωνο AK_1^*B είναι ορθογώνιο, όπου $\angle AK_1^*B = 90^\circ$, και άρα

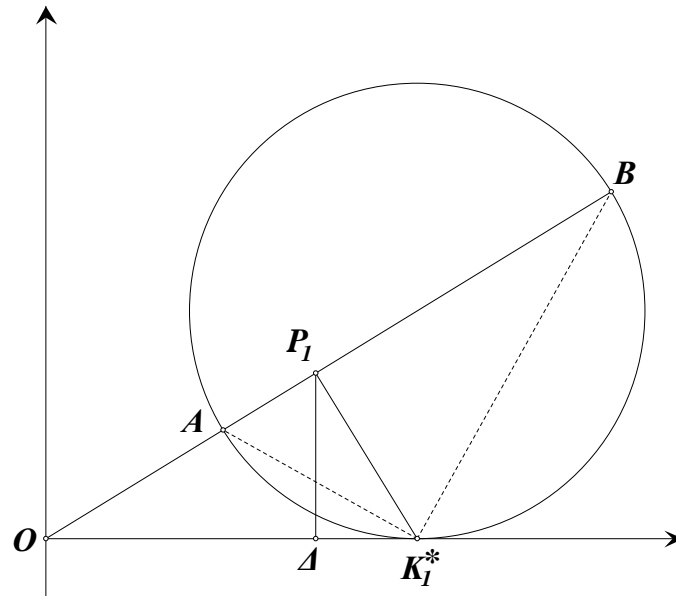
$$\angle K_1^*AP_1 + \angle K_1^*BA = 90^\circ. \quad (8.4)$$

Εξάλλου έχουμε

$$\angle AK_1^*P_1 = \angle AK_1^*O = \angle K_1^*BA, \quad (8.5)$$

όπου η πρώτη ισότητα ισχύει διότι η K_1^*A είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle P_1K_1^*O$, από τη Σημείωση (δ) του Θεωρήματος 8.1, και η δεύτερη ισότητα ισχύει διότι η μία γωνία σχηματίζεται από χορδή και την εφαπτομένη στο άκρο της και η άλλη είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο που βρίσκεται μεταξύ της χορδής και της εφαπτομένης. Επομένως, αντικαθιστώντας τη γωνία $\angle K_1^*BA$ της (8.4) με την ίση της $\angle AK_1^*P_1$, από την (8.5), έχουμε $\angle K_1^*AP_1 + \angle AK_1^*P_1 = 90^\circ$. Άρα η $K_1^*P_1$ είναι κάθετη στην OP_1 . Για την εύρεση των c_1^* και R_1^* εργαζόμαστε ως εξής. Θεωρούμε το ύψος $P_1\Delta$ στο ορθογώνιο τρίγωνο $OP_1K_1^*$, οπότε έχουμε

$$(P_1\Delta)^2 = (O\Delta)(\Delta K_1^*) \Leftrightarrow \gamma_1^2 = \beta_1(\Delta K_1^*),$$

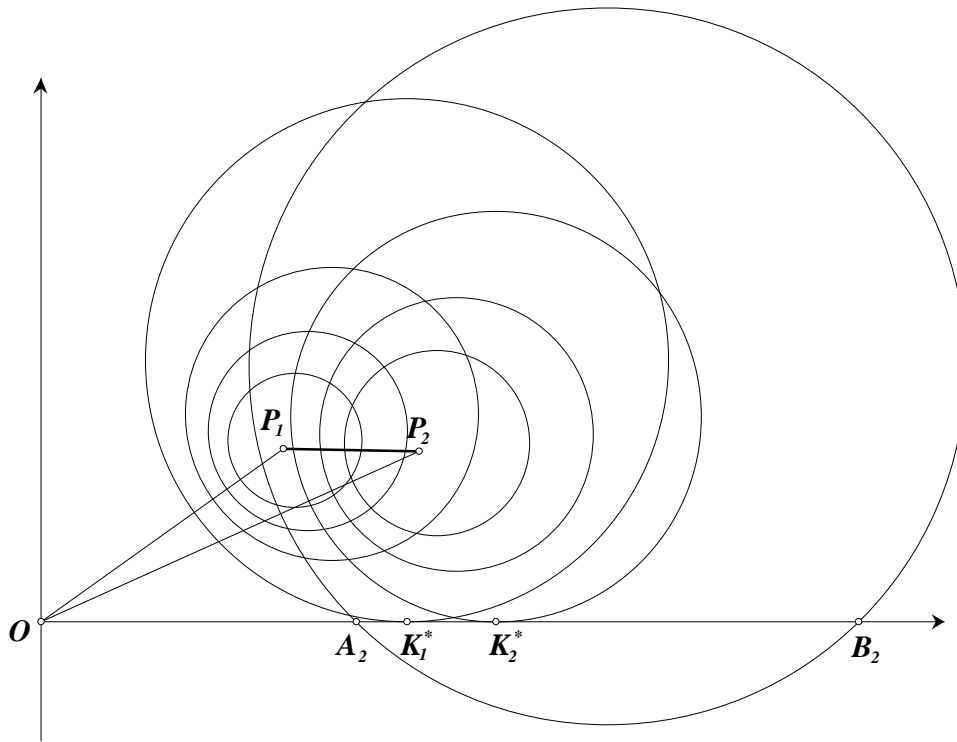


Σχήμα 6: Βέλτιστος Περικλείων Κύκλος (π.κ.) Ενός-Σημείου

από την οποία προκύπτει η έκφραση για το (ΔK_1^*) . Και άρα $c_1^* = (O\Delta) + (\Delta K_1^*) = \beta_1 + \frac{\gamma_1^2}{\beta_1}$, δηλαδή η πρώτη από τις σχέσεις (8.3). Τέλος έχουμε $R_1^{*2} = (K_1^*P_1)^2 = (OK_1^*)(\Delta K_1^*) = \frac{\beta_1^2 + \gamma_1^2}{\beta_1} \cdot \frac{\gamma_1^2}{\beta_1}$, από την οποία προκύπτει η έκφραση για την ακτίνα R_1^* στις (8.3). \square

8.3.2 Περίπτωση $k = 2$

Εστω ότι η κλειστή κυρτή θήκη \mathcal{H} του $\sigma(A)$ έχει δύο κορυφές στο πρώτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου τις $P_1(\beta_1, \gamma_1)$ και $P_2(\beta_2, \gamma_2)$. Για την εύρεση του βέλτιστου π.κ. θεωρούμε μια γενική περίπτωση για τα σημεία P_1 και P_2 και συγχρόνως **όλα** τα ζεύγη των δυο οικογενειών των Απολλώνιων Κύκλων, που αντιστοιχούν στα σημεία P_1, O και P_2, O με τον ίδιο λόγο $\lambda = \frac{(M_1P_1)}{(M_1O)} = \frac{(M_2P_2)}{(M_2O)} \in (0, 1)$. Για $\lambda = 0$, έχουμε την τετριμμένη περίπτωση όπου οι αντίστοιχοι Απολλώνιοι Κύκλοι είναι τα σημεία P_1 και P_2 . Αυξάνουμε συνεχώς τον κοινό λόγο λ στο διάστημα $[0, 1)$. Κατά τη συνεχή αυτή αύξηση του λ , είναι φανερό ότι θα υπάρξει μια τιμή του για την οποία ο ένας από το ζεύγος των δύο Απολλώνιων Κύκλων, έστω ότι αυτός είναι που αντιστοιχεί στα σημεία P_2, O , θα εφάπτεται στο θετικό πραγματικό ημιάξονα στο σημείο K_2^* , ενώ ο άλλος δε θα έχει κοινό ή κοινά σημεία με αυτόν τον ημιάξονα. Αν εξακολουθήσει η συνεχής αύξηση της τιμής του λ , πάντοτε θεωρώντας τα αντίστοιχα ζεύγη των Απολλώνιων Κύκλων, τότε ο κύκλος των P_2, O θα τέμνει το θετικό πραγματικό ημιάξονα σε δυο σημεία. Το αριστερά σημείο τομής A_2 θα κινείται προς το O , απομακρυνόμενο από το K_2^* , ενώ το δεξιά B_2 προς την αντίθετη κατεύθυνση. Κατά τη

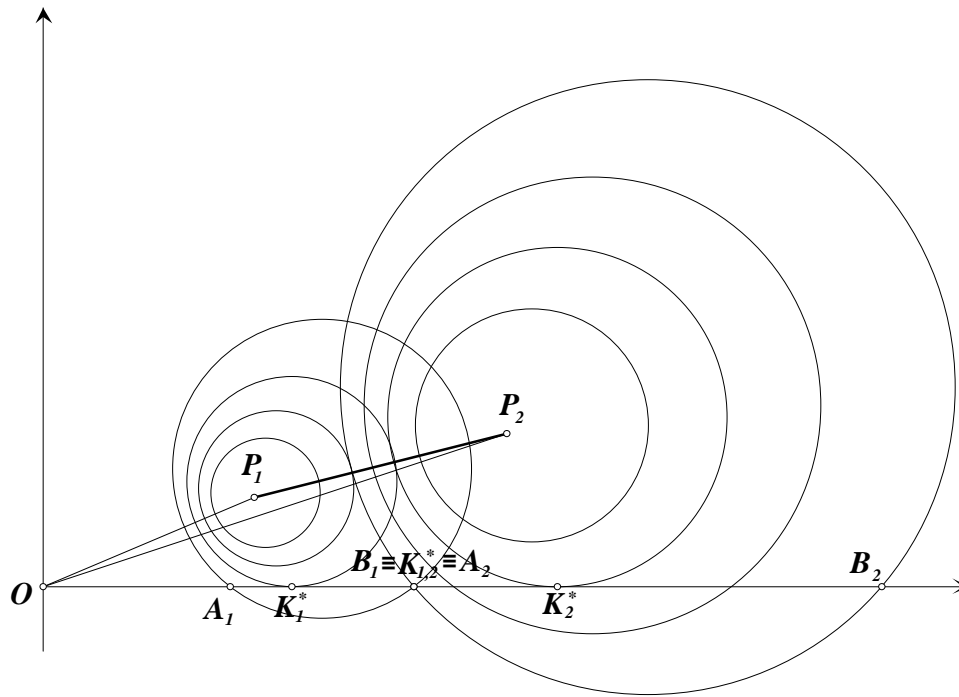


Σχήμα 7: Βέλτιστος Περιελκείων Κύκλος (π.κ.) Ενός-Σημείου των P_1 και P_2

συνεχή αυτή αύξηση του λ θα υπάρξει κάποια τιμή του για την οποία ο Απολλώνιος Κύκλος των σημείων P_1, O θα έρθει σε επαφή με το θετικό πραγματικό ημιάξονα στο σημείο K_1^* . Για την ίδια τιμή του λ το αριστερά σημείο τομής του αντίστοιχου Απολλώνιου Κύκλου των σημείων P_2, O, A_2 , θα βρεθεί σε μία από τρεις δυνατές θέσεις: α) Αριστερά του K_1^* , β) δεξιά του K_1^* , και γ) σε σύμπτωση με το K_1^* . Στην περίπτωση (α) θα έχουμε

$$1 > \frac{(K_1^*P_1)}{(K_1^*O)} = \frac{(A_2P_2)}{(A_2O)} > \frac{(K_1^*P_2)}{(K_1^*O)} \Rightarrow (K_1^*P_1) > (K_1^*P_2).$$

Προφανώς η τελευταία ανισότητα ισχύει γιατί το σημείο K_1^* είναι εσωτερικό του Απολλώνιου Κύκλου που αντιστοιχεί στα σημεία P_2, O . Άρα ο βέλτιστος π.κ. των δύο δοθεισών κορυφών της \mathcal{H} συμπίπτει με το βέλτιστο π.κ. του ενός-σημείου P_1 της περίπτωσης $k = 1$ (βλ. Σχήμα 7). Στην περίπτωση (β) συνεχίζουμε τη συνεχή αύξηση του λ , οπότε ο αντίστοιχος Απολλώνιος Κύκλος των P_1, O θα τέμνει το θετικό πραγματικό ημιάξονα σε δυο σημεία, A_1, B_1 . Από τα δυο αυτά σημεία τομής, το αριστερά A_1 θα κινείται προς το O ενώ το δεξιά B_1 προς το K_2^* . Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει κάποια τιμή του λ για την οποία το αριστερά σημείο τομής του Απολλώνιου Κύκλου των P_2, O με το θετικό πραγματικό ημιάξονα (A_2) θα συμπέσει με το δεξιά σημείο τομής του αντίστοιχου Απολλώνιου Κύκλου των P_1, O (B_1).



Σχήμα 8: Βέλτιστος Περικλείων Κύκλος (π.κ.) Δύο-Σημείων των P_1 και P_2

τοιχου κύκλου των P_1, O με τον ίδιο ημιάξονα (B_1). Εστω $K_{1,2}^* \equiv A_2 \equiv B_1$ το κοινό αυτό σημείο. Θα ισχύει τότε ότι

$$1 > \frac{(K_{1,2}^* P_1)}{(K_{1,2}^* O)} = \frac{(K_{1,2}^* P_2)}{(K_{1,2}^* O)} \Leftrightarrow (K_{1,2}^* P_1) = (K_{1,2}^* P_2).$$

Είναι φανερό ότι ο βέλτιστος π.κ. C^* των δύο σημείων P_1 και P_2 είναι αυτός που έχει κέντρο το σημείο τομής της μεσοκάθετης στο ευθύγραμμο τμήμα $P_1 P_2$ με το θετικό πραγματικό ημιάξονα, έστω $K_{1,2}^*(c_{1,2}^*, 0)$, και ακτίνα $R_{1,2}^* = (K_{1,2}^* P_1) = (K_{1,2}^* P_2)$. Αυτό ισχύει γιατί κάθε άλλο σημείο του θετικού πραγματικού ημιάξονα εκτός του $K_{1,2}^*$, ως ευρισκόμενο εκτός της μεσοκάθετης στο ευθύγραμμο τμήμα των σημείων P_1, P_2 , θα έχει λόγο αποστάσεων από ένα τουλάχιστον από τα δύο αυτά σημεία μεγαλύτερο από τον κοινό λόγο $\frac{(K_{1,2}^* P_1)}{(K_{1,2}^* O)} = \frac{(K_{1,2}^* P_2)}{(K_{1,2}^* O)}$ (βλ. Σχήμα 8). Είναι δυνατόν να βρεθεί, χρησιμοποιώντας στοιχειώδη Αναλυτική Γεωμετρία, ότι τα στοιχεία του βέλτιστου π.κ. των δύο σημείων $C_{1,2}^*$ δίνονται από τις εκφράσεις

$$c_{1,2}^* = \frac{(\beta_2^2 + \gamma_2^2) - (\beta_1^2 + \gamma_1^2)}{2(\beta_2 - \beta_1)}, \quad R_{1,2}^* = \frac{\sqrt{[(\beta_2^2 + \gamma_2^2) + (\beta_1^2 + \gamma_1^2) - 2\beta_1\beta_2]^2 - 4\gamma_1^2\gamma_2^2}}{2(\beta_2 - \beta_1)}. \quad (8.6)$$

Τέλος η περίπτωση (γ) μπορεί να αναχθεί σε οποιαδήποτε από τις (α) και (β), που ήδη εξετάστηκαν. Σημείωση: Στην περίπτωση όπου το ζεύγος των Απολλώνιων Κύκλων των ζευγών των σημείων P_1, O και P_2, O εφάπτονται στο θετικό πραγματικό ημιάξονα για την ίδια τιμή του λόγου λ , πράγμα που συμβαίνει αν και μόνο αν οι *πολικές γωνίες* των P_1 και P_2 είναι ίσες, τότε συνεχίζουμε την αύξηση της τιμής του λόγου έως ότου το δεξιά σημείο τομής B_1 του Απολλώνιου Κύκλου των P_1, O συμπέσει με το αριστερά σημείο τομής A_2 του αντίστοιχου Απολλώνιου Κύκλου των P_2, O σε ένα κοινό σημείο, το $K_{1,2}^*$. Τα στοιχεία του βέλτιστου **π.κ.** στην περίπτωση αυτή θα δίνονται πάλι από τις (8.6).

Παρατήρηση: Από την προηγηθείσα εκτενή ανάλυση καθίσταται φανερό ότι στην περίπτωση $k = 2$, για να είναι ο βέλτιστος **π.κ.** του ενός εκ των δύο σημείων $P_i, i = 1, 2, (C_i^*)$, ο βέλτιστος **π.κ.** και των δύο σημείων, μια **αναγκαία** συνθήκη είναι η αντίστοιχη *πολική γωνία* του P_i να είναι η γνήσια μεγαλύτερη εκ των δύο. Αυτό, επιπλέον, σημαίνει ότι αν ο αντίστοιχος βέλτιστος **π.κ.** C_i^* είναι τέτοιος ώστε να περικλείει το άλλο σημείο εκ των δύο σημείων $P_j, j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$, τότε ο κύκλος αυτός αποτελεί το βέλτιστο **π.κ.** και των δυο σημείων. Αλλιώς, βέλτιστος **π.κ.** των δύο σημείων θα είναι ο **π.κ.** που διέρχεται από τα δύο σημεία, όπως στην περίπτωση (β) παραπάνω.

8.3.3 Περίπτωση $k \geq 3$

Η παρούσα περίπτωση αποτελεί απλά μια γενίκευση της προηγούμενης περίπτωσης $k = 2$. Πιο συγκεκριμένα, αρχίζουμε όπως και προηγουμένως θεωρώντας k -άδες, αντί ζεύγη, Απολλώνιων Κύκλων που αντιστοιχούν στον ίδιο λόγο $\lambda \in [0, 1)$, που βαίνει συνεχώς αυξανόμενος. Ξεκινώντας από $\lambda = 0$, ο λ αυξάνεται συνεχώς μέχρις εκείνη την τιμή του όπου ο τελευταίος από την αντίστοιχη k -άδα Απολλώνιων Κύκλων, έστω ότι αυτός αντιστοιχεί στο σημείο $P_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, έρθει σε επαφή με το θετικό πραγματικό ημιάξονα στο σημείο K_i^* , ενώ όλοι οι άλλοι κύκλοι της k -άδας τέμνουν ήδη το θετικό πραγματικό ημιάξονα σε δυο σημεία τα A_j (αριστερά), B_j (δεξιά), $j \neq i, j = 1(1)n$. Αν όλα τα σημεία $A_j, j \neq i, j = 1(1)n$, βρίσκονται αριστερά του K_i^* , τότε προφανώς ο κύκλος κέντρου K_i^* και ακτίνας $R_i^* = (K_i^* P_i)$ είναι ο βέλτιστος **π.κ.** του συνόλου των k σημείων, τα δε στοιχεία του θα δίνονται από τις σχέσεις (8.3) όπου ο δείκτης i αντικαθιστά το δείκτη 1. Αν έστω και ένα από τα σημεία A_j βρίσκεται δεξιά του K_i^* , τότε συνεχίζεται η συνεχής αύξηση του λόγου λ μέχρις εκείνη την τιμή για την οποία το απώτερο δεξιά σημείο A_j , έστω ότι αυτό είναι το $A_l, l \in \{1, 2, \dots, n\}$, θα συμπέσει με το πιο αριστερά σημείο B_j , έστω το $B_m, m \neq l, m \in \{1, 2, \dots, n\}$. Εστω $K_{l,m}^*$ το κοινό αυτό σημείο. Ο κύκλος κέντρου $K_{l,m}^*$ και ακτίνας $R_{l,m}^* = (K_{l,m}^* P_l) = (K_{l,m}^* P_m)$ αποτελεί το βέλτιστο **π.κ.** της k -άδας των δοθέντων σημείων. Τα στοιχεία του βρίσκονται από αυτά των σχέσεων (8.6), όπου οι δείκτες l και m αντικαθιστούν τους 1 και 2, αντίστοιχα. Με άλλα λόγια η κατάληξη δεν είναι άλλη παρά αυτή της περίπτωσης $k = 2$ με τη μόνη διαφορά ότι εμπλέκονται $k \geq 3$ Απολλώνιοι Κύκλοι για κάθε τιμή του συνεχώς αυξανόμενου, από την τιμή 0, λόγου λ .

8.4 Ο Αλγόριθμος

Με βάση την προηγηθείσα ανάλυση είναι δυνατόν να υλοποιηθεί ο Αλγόριθμος που θα βρίσκει το βέλτιστο **π.κ.** της κλειστής κυρτής θήκης \mathcal{H} .

Βήμα 1. Εστω $P_i(\beta_i, \gamma_i)$, $i = 1(1)k$, $0 < \beta_i < \beta_{i+1}$, $i = 1(1)k - 1$, $\gamma_i \geq 0$, $i = 1(1)k$, οι κορυφές της \mathcal{H} , στο πρώτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου, διατεταγμένες έτσι ώστε οι τετμημένες τους να βαίνουν αυξανόμενες.

Βήμα 2. Βρές την κορυφή P_i , που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη πολική γωνία θ_i ,

$$\max_{i=1(1)k} \tan \theta_i = \max_{i=1(1)k} \frac{\gamma_i}{\beta_i}. \quad (8.7)$$

Αν υπάρχουν δυο τέτοιες κορυφές πήγαινε στο Βήμα 3. Αλλιώς

Εστω $\bar{i} \in \{1, 2, \dots, k\}$ ο δείκτης και $\mathcal{C}_{\bar{i}}$ ο κύκλος που εφάπτεται στην πολική ακτίνα $OP_{\bar{i}}$ στο σημείο $P_{\bar{i}}$ και έχει κέντρο στο θετικό πραγματικό ημιάξονα.

Αν ο κύκλος $\mathcal{C}_{\bar{i}}$ περικλείει την \mathcal{H} , τότε αυτός αποτελεί το βέλτιστο **π.κ.** ενός-σημείου, \mathcal{C}_{ω^*} , της \mathcal{H} . Τα στοιχεία του βρίσκονται από τις σχέσεις (8.3), όπου ο δείκτης \bar{i} αντικαθιστά το δείκτη 1.

Αν **δεν** υπάρχει βέλτιστος **π.κ.** ενός-σημείου, τότε πήγαινε στο επόμενο Βήμα.

Βήμα 3. Προσδιόρισε όλους τους κύκλους που διέρχονται από όλα τα δυνατά ζεύγη των k κορυφών της \mathcal{H} στο πρώτο τεταρτημόριο P_i, P_j , $i = 1(1)k - 1$, $j = i + 1(1)k$, πλήθους $\binom{k}{2}$, που έχουν κέντρα στον πραγματικό άξονα.

Εστω $K_{i,j}(c_{i,j}, 0)$ και $R_{i,j} = (K_{i,j}P_i) = (K_{i,j}P_j)$ τα κέντρα και οι ακτίνες τους.

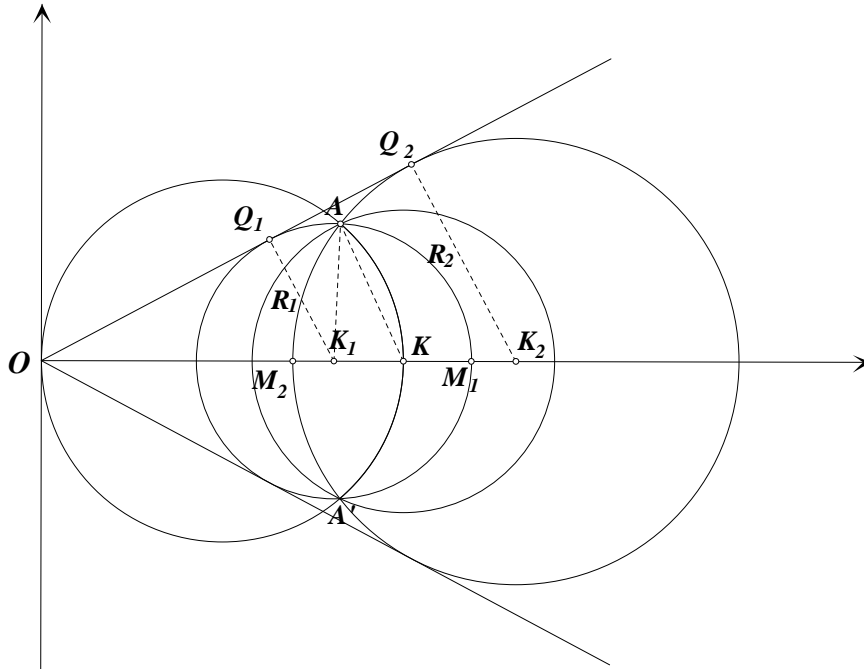
Απόκλεισε όλους τους κύκλους που δεν είναι **π.κ.**, δηλαδή είτε περικλείουν την αρχή O είτε δεν περικλείουν όλες τις άλλες κορυφές στο κλειστό εσωτερικό τους.

Από τους εναπομείναντες, ο **π.κ.** που αντιστοιχεί στο μικρότερο λόγο $\frac{R_{i,j}}{OK_{i,j}}$, έστω \bar{i}, \bar{j} οι δείκτες των αντίστοιχων κορυφών, είναι ο βέλτιστος **π.κ.** δύο-σημείων, \mathcal{C}_{ω^*} , της \mathcal{H} . Τα στοιχεία του βρίσκονται από τις σχέσεις (8.6), όπου και οι δείκτες \bar{i} και \bar{j} , αντικαθιστούν τους δείκτες 1 και 2, αντίστοιχα.

8.5 Μοναδικότητα Βέλτιστου Περικλείοντα Κύκλου (π.κ.)

Η εκτενής ανάλυση των περιπτώσεων $k = 1$, $k = 2$ και $k \geq 3$ δείχνει έμμεσα και τη μοναδικότητα του βέλτιστου **π.κ.** για την όποια τιμή του πλήθους των κορυφών k της κλειστής κυρτής θήκης \mathcal{H} , που βρίσκονται στο πρώτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου, του φάσματος $\sigma(A)$ των ιδιοτιμών του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, όταν αυτός είναι θετικά ευσταθής.

Για την οποιαδήποτε αντίρρηση, που μπορεί να υπάρχει, σχετικά με τη μοναδικότητα της λύσης αποδείχνουμε στη συνέχεια το παρακάτω θεώρημα.



Σχήμα 9: Το Αδύνατο της Περίπτωσης Δυο Βέλτιστων Περικλειόντων Κύκλων (π.κ.)

Θεώρημα 8.3 Υπό τις προϋποθέσεις της Θεωρήματος 7.2 ο βέλτιστος περικλείων κύκλος (π.κ.) της \mathcal{H} είναι μοναδικός.

Απόδειξη: Εστω ότι υπάρχουν δύο βέλτιστοι περικλείοντες κύκλοι (π.κ.) της \mathcal{H} με K_i και R_i , $i = 1, 2$, τα κέντρα και οι ακτίνες τους, αντίστοιχα, όπου $R_1 < R_2$. Προφανώς οι δυο π.κ. θα τέμνονται στο σημείο A στο πρώτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου και στο A' , συμμετρικό του A ως προς το θετικό πραγματικό ημιάξονα. Η κοινή τομή των κλειστών δίσκων των δυο βέλτιστων π.κ. θα περιορίζεται μεταξύ των δυο μικρότερων τόξων $\widehat{AA'}$ των δυο κύκλων και θα έχει το σχήμα “φακής”. Εφόσον και οι δυο είναι βέλτιστοι π.κ. θα ισχύει προφανώς ότι

$$\frac{R_1}{(OK_1)} = \frac{R_2}{(OK_2)}. \quad (8.8)$$

Από την παραπάνω ισότητα συμπεραίνεται ότι οι δυο κύκλοι είναι ομοίωτοι ως προς την αρχή O [8] με λόγο ομοιοθεσίας τον κοινό λόγο στη σχέση (8.8). Συνεπώς και οι κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες τους θα διέρχονται από το κέντρο ομοιοθεσίας O . Εστω Q_i , $i = 1, 2$, τα σημεία επαφής της κοινής εξωτερικής εφαπτομένης των δυο κύκλων (βλ. Σχήμα 9). Εστω M_1 και M_2 τα σημεία στα οποία η διάκεντρος K_1K_2 τέμνει τα τόξα $\widehat{AA'}$ του μικρού και του μεγάλου κύκλου, αντίστοιχα.

Καταρχάς αποκλείεται ο ένας από τους βέλτιστους $\pi.\kappa.$, έστω αυτός με κέντρο K_1 και ακτίνα R_1 , να είναι βέλτιστος $\pi.\kappa.$ ενός-σημείου. Αυτό γιατί τότε το $Q_1 \equiv P_1$, το K_1 θα βρισκόταν αυστηρά εκτός του βέλτιστου κύκλου με κέντρο K_2 και ακτίνα R_2 και θα είχαμε $\frac{R_1}{(OK_1)} < \frac{R_2}{(OK_2)}$, που αντίκειται στην υπόθεσή μας. Άρα θα είναι κι οι δυο βέλτιστοι $\pi.\kappa.$ δύο-σημείων της \mathcal{H} και η \mathcal{H} θα πρέπει να βρίσκεται στην κοινή τομή των αντίστοιχων κλειστών δίσκων τους, την προαναφερθείσα “φακή”. (Σημείωση: Εφόσον πρόκειται για δυο βέλτιστους $\pi.\kappa.$ δύο-σημείων θα πρέπει δυο σημεία του ενός να κείνται στο τόξο \widehat{AM}_1 του μικρού κύκλου, που βρίσκεται εντός του μεγάλου, και δυο σημεία του άλλου στο τόξο \widehat{AM}_2 του μεγάλου κύκλου εντός του μικρού. Προφανώς, ανά ένα από τα ζεύγη των σημείων αυτών θα μπορούσαν να συμπέσουν με το A .) Θεωρούμε τον περιγεγραμμένο κύκλο στο τρίγωνο OAA' και έστω ότι τέμνει την K_1K_2 στο K . Το K βρίσκεται μεταξύ M_1 και M_2 αφού το τόξο $\widehat{AKA'}$ του κύκλου που περιγράφεται στο τρίγωνο OAA' βρίσκεται στην κοινή τομή των δυο προαναφερθέντων δίσκων. Εξάλλου έχουμε

$$(K_1K) + (KM_1) = (K_1M_1) = (K_1A) < (K_1K) + (KA) \Leftrightarrow (KM_1) < (KA).$$

Ομοίως μπορεί να αποδειχτεί ότι $(KM_2) < (KA)$. Άρα ο κύκλος κέντρου K και ακτίνας KA περικλείει στο εσωτερικό του την κοινή τομή (“φακή”) των δύο βέλτιστων $\pi.\kappa.$ της \mathcal{H} . Εφόσον η πολική γωνία του A είναι μικρότερη αυτής των σημείων Q_1, Q_2 και η γωνία $\angle OAK = 90^\circ$, έπεται ότι

$$\frac{(KA)}{(OK)} < \frac{R_1}{(OK_1)} = \frac{R_2}{(OK_2)}.$$

Άρα ο κύκλος κέντρου K και ακτίνας (KA) είναι γνήσια “καλύτερος” από τους δυο θεωρηθέντες βέλτιστους $\pi.\kappa.$. Συνεπώς, ο βέλτιστος $\pi.\kappa.$ της κοινής τομής (“φακής”) των δυο θεωρηθέντων βέλτιστων $\pi.\kappa.$, άρα και της \mathcal{H} , θα είναι καλύτερος από τον κύκλο κέντρου K και ακτίνας (KA) ή, στη “χειρότερη” περίπτωση, θα είναι ο προαναφερθείς κύκλος. Επομένως **δεν** είναι δυνατόν να υπάρχουν δυο βέλτιστοι $\pi.\kappa.$, πράγμα που αποδείχνει τη μοναδικότητα. \square

Παρατήρηση: Είναι δυνατόν δύο ή περισσότεροι βέλτιστοι $\pi.\kappa.$ να συμπίπτουν σε έναν. Αυτό μπορεί να συμβεί σε δυο μόνον περιπτώσεις: α) Αν ο βέλτιστος $\pi.\kappa.$ της \mathcal{H} είναι ο βέλτιστος κύκλος ενός-σημείου, έστω του P_i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, και υπάρχει σημείο P_j , $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, $j \neq i$, πάνω στον κύκλο αυτό. Τότε, ο $\pi.\kappa.$ των δύο-σημείων P_i, P_j αποτελεί κι αυτός βέλτιστο κύκλο δύο-σημείων της \mathcal{H} . και β) Αν ο βέλτιστος $\pi.\kappa.$ της \mathcal{H} είναι ο βέλτιστος κύκλος δύο-σημείων, έστω των P_i, P_j , $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, $i < j$, και πάνω στον κύκλο αυτό βρίσκεται και άλλο σημείο, π.χ., P_l , $l \in \{1, 2, \dots, k\}$, $j < l$. Τότε και οι $\pi.\kappa.$ των δύο-σημείων των P_i, P_l και P_j, P_l αποτελούν βέλτιστους $\pi.\kappa.$ της \mathcal{H} .

8.6 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Εστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \\ -3 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 11 \end{bmatrix}. \quad (8.9)$$

Το φάσμα των ιδιοτιμών του A μπορεί να βρεθεί με τη βοήθεια της MATLAB 7.0 με ακρίβεια όλων των 14 δεκαδικών ψηφίων που αυτή διαθέτει. Έτσι βρίσκουμε

$$\sigma(A) = \{5.30510873756331 \pm i 4.04212646134389, 10.19489126243668 \pm i 2.49823942823383\},$$

οπότε είναι φανερό ότι ο A είναι θετικά ευσταθής. Οι κορυφές της κλειστής κυρτής θήκης \mathcal{H} του $\sigma(A)$ στο πρώτο τεταρτημόριο είναι οι εξής δύο

$$P_1(5.30510873756331, 4.04212646134389), P_2(10.19489126243668, 2.49823942823383)$$

(βλ. Σχήμα 10). Μετά το Βήμα 1, που ήδη έγινε, ακολουθώντας το Βήμα 2 του Αλγόριθμου του βέλτιστου π.κ., μπορεί να βρεθεί ότι εκ των δύο κορυφών η P_1 αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη πολική γωνία. Βρίσκουμε, λοιπόν, το κέντρο $K_1(c_1, 0)$ και την ακτίνα $R_1 = (K_1P_1)$ του υποψήφιου βέλτιστου κύκλου ενός-σημείου, \mathcal{C}_1 , που εφάπτεται στην OP_1 στο P_1 . Τα στοιχεία του βρίσκονται από τις σχέσεις (8.3) ότι είναι

$$c_1 = 8.38492993214283, \quad R_1 = 5.08174034363009.$$

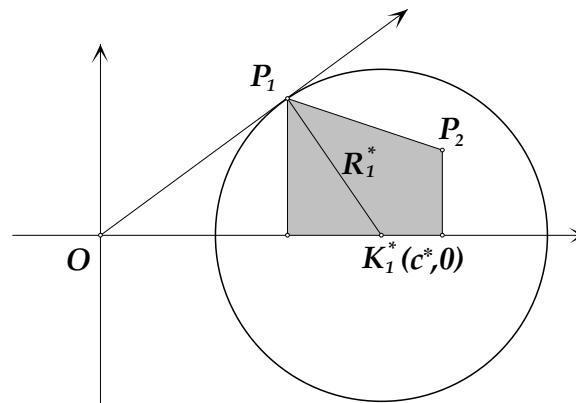
Μπορεί ακόμη να βρεθεί ότι ο κύκλος \mathcal{C}_1 περικλείει την κορυφή P_2 αφού $R_1 > (K_1P_2)$. Επομένως ο βέλτιστος π.κ. της \mathcal{H} είναι ο βέλτιστος π.κ. ενός-σημείου, δηλαδή ο \mathcal{C}_1^* , που μόλις βρέθηκε.

Παράδειγμα 2: Εστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3.2674 & 0.8314 & 0.8577 & 0.3411 & 0.5209 & 0.4043 & 1.1564 & -0.7739 \\ 0.7801 & 2.9645 & 0.3279 & 0.3785 & 0.7860 & 0.2184 & 0.3424 & -0.3047 \\ -1.0629 & -0.2065 & 2.3540 & -0.7142 & 0.1065 & -0.5306 & 0.1741 & 0.3752 \\ 0.1682 & 0.7375 & 0.6341 & 2.0460 & 0.7078 & 1.0257 & 0.6017 & -0.9151 \\ 1.1390 & -0.4606 & 0.2989 & 0.0356 & 2.1130 & 0.4592 & 0.4386 & -0.1482 \\ -0.4309 & -0.1225 & -0.0049 & -0.0385 & 0.0966 & 2.0106 & -1.3353 & 1.0215 \\ -0.5356 & -0.0203 & -0.4978 & 0.5677 & 0.3314 & 0.1871 & 2.7104 & 0.4236 \\ -0.3741 & -0.2861 & -0.9002 & 0.6656 & -0.0451 & -1.1603 & -0.9873 & 4.8030 \end{bmatrix},$$

με φάσμα ιδιοτιμών

$$\sigma(A) = \{1.86276001393587, 2.01179239038023 \pm i 0.65104401096444, 2.74937366128964 \pm i 0.97219263735250, 0 3.53286710719112 \pm i 0.82489924737867, 3.81807366834215\}.$$



Σχήμα 10: Βέλτιστος Περικλείων Κύκλος Ενός-Σημείου

Προφανώς ο A είναι θετικά ευσταθής με πέντε κορυφές της \mathcal{H} στο πρώτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου, τις ακόλουθες

$$\begin{aligned} P_1(1.86276001393587, 0), & P_2(2.01179239038023, 0.65104401096444), \\ P_3(2.74937366128964, 0.97219263735250), & P_4(3.53286710719112, 0.82489924737867), \\ P_5(3.81807366834215, 0) \end{aligned}$$

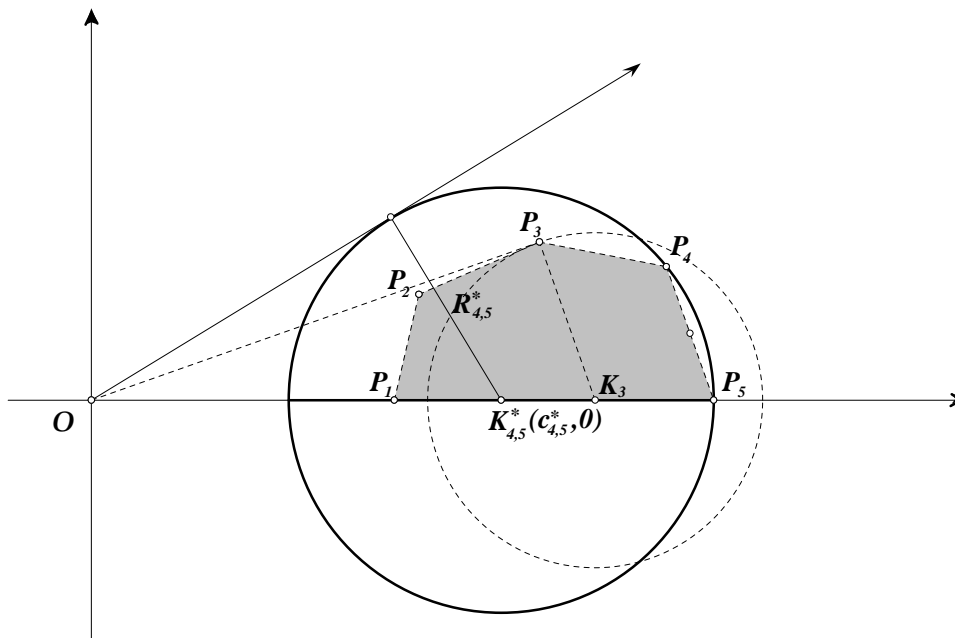
(βλ. Σχήμα 11). Με βάση το Βήμα 2 του Αλγόριθμου μπορεί να βρεθεί ότι η κορυφή P_3 είναι αυτή με τη μεγαλύτερη πολική γωνία. Θεωρώντας τον κύκλο κέντρου $K_3(c_3, 0)$ και ακτίνας $R_3 = (K_1 P_3)$ μπορεί να βρεθεί ότι **δεν** περικλείει τα σημεία P_1 και P_2 . Επομένως προχωρούμε στο Βήμα 3 του Αλγόριθμου. Με βάση αυτό θα πρέπει να βρούμε όλους τους κύκλους δύο-σημείων με κέντρο στον πραγματικό άξονα, στην προκειμένη περίπτωση συνολικά $\binom{5}{2} = 10$. Αν γίνει αυτή η διαδικασία, απορριφτούν εκείνοι οι κύκλοι που πιθανόν περικλείουν την αρχή O ή **δεν** είναι **π.κ.**, τότε από τους υπόλοιπους βρίσκουμε εκείνον που αντιστοιχεί στο μικρότερο λόγο $\frac{R_{i,j}}{c_{i,j}}$, $i = 1(1)4$, $j = i + 1(1)5$. Αυτός είναι ο κύκλος που αντιστοιχεί στα σημεία P_4 και P_5 . Τα στοιχεία του βέλτιστου **π.κ.** δύο-σημείων, $\mathcal{C}_{4,5}^*$, που δίνονται από τις σχέσεις (8.6), είναι

$$c_{4,5}^* = 2.48254767662753, \quad R_{4,5}^* = 1.33552599171462.$$

9 Πρόβλημα Γραμμικής Συμπληρωματικότητας (LCP)

9.1 Το Πρόβλημα κι ο Τρόπος Επίλυσής του

Το Πρόβλημα της Γραμμικής Συμπληρωματικότητας (LCP) διατυπώνεται ως εξής:



Σχήμα 11: Βέλτιστος Περικλείων Κύκλος Δύο-Σημείων

Πρόβλημα: 9.1 Δίνονται

$$A \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad \det(A) \neq 0, \quad b \in \mathbb{R}^n. \quad (9.1)$$

Να βρεθεί $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$r := Ax - b \geq 0, \quad x \geq 0, \quad x^T r = 0. \quad (9.2)$$

(Σημείωση: Στην παραπάνω διατύπωση το σύμβολο “ ≥ 0 ”, αναφερόμενο σε πραγματικούς πίνακες (ή διανύσματα), σημαίνει ότι τα στοιχεία του αντίστοιχου πίνακα (ή διανύσματος) είναι μη αρνητικά.)

Όπως αναφέρθηκε και στην Παράγραφο 4 το LCP έχει πάρα πολλές εφαρμογές. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες [22], [6], [9], [27], [21], και ιδιαίτερα στα βιβλία αναφοράς [24], [3], [7] και [25].

Κάτω από ορισμένες ιδιότητες του πίνακα A , τις οποίες δε θα αναφέρουμε εδώ (βλ., π.χ., [3], [24], [25], [16], κ.λπ.), το LCP στις (9.2) έχει μονοσήμαντα ορισμένη λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^n$. Αν ο A είναι επιπλέον συμμετρικός και θετικά ορισμένος, δηλαδή $y^T A y > 0, \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, οπότε έχει και θετικές πραγματικές ιδιοτιμές, η λύση του LCP είναι μοναδική και μπορεί να βρεθεί με την Επαναληπτική Μέθοδο Modulus Algorithm ([30], [20]). Στη μέθοδο αυτή τίθεται στις σχέσεις (9.2)

$$x = |z| + z, \quad r = |z| - z, \quad (9.3)$$

όπου $z \in \mathbb{R}^n$ προσδιοριστέο. Αντικατάσταση των (9.3) στις (9.2) δίνει μετά από κάποιες πράξεις την Εξίσωση Σταθερού Σημείου

$$z = F|z| + c =: f(z), \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad (9.4)$$

όπου

$$F = (I + A)^{-1}(I - A), \quad c = (I + A)^{-1}b, \quad (9.5)$$

και όπου σημειώνεται η παρουσία του *Μετασχηματισμού του Cayley*. Για την επίλυση της (9.4) προτείνεται η Επαναληπτική Μέθοδος (Αλγόριθμος)

$$z^{(k+1)} = F|z^{(k)}| + c, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad z^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \text{ οποιοδήποτε.} \quad (9.6)$$

Υπό τις συγκεκριμένες προϋποθέσεις που έχουν θεωρηθεί στην εργασία [16] η Επαναληπτική Μέθοδος (9.6) παράγει ακολουθία διανυσμάτων συγκλίνουσα στη μοναδική λύση z^* της Εξίσωσης Σταθερού Σημείου (9.4) και άρα από τις (9.3) προκύπτει η λύση x του LCP (9.2).

Η ταχύτητα σύγκλισης της Επαναληπτικής Μεθόδου εξαρτιέται από την τιμή της ποσότητας

$$\max_{a \in \mathcal{H}} \left| \frac{1-a}{1+a} \right| < 1 \quad (9.7)$$

και μάλιστα όσο μικρότερη συμβαίνει να είναι η τιμή της τόσο ταχύτερα συγκλίνει η υπόψη Επαναληπτική Μέθοδος στη λύση του LCP. Η επιτάχυνση της σύγκλισης της Επαναληπτικής Μεθόδου (9.6), κάτω από τις ίδιες προϋποθέσεις, αποτέλεσε, μεταξύ άλλων, το αντικείμενο της εργασίας [16].

Συγκεκριμένα, γενικεύουμε το LCP (9.2) πολλαπλασιάζοντας τη βασική εξίσωσή του $r = Ax - b$ και τη συνθήκη ορθογωνιότητάς του επί $\omega > 0$. Έτσι έχουμε

$$(\omega r) := (\omega A)x - (\omega b) \geq 0, \quad x \geq 0, \quad x^T(\omega r) = 0. \quad (9.8)$$

Διαπιστώνεται εύκολα ότι το πρόβλημα στις (9.8) αποτελεί ένα γενικότερο LCP, όπου τα ωr , ωA , ωb , παίζουν τους ρόλους των r , A , b , του αρχικού LCP, ενώ το διάνυσμα x παραμένει το ίδιο. Συμβολικά μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\text{LCP (9.2)} \iff \text{LCP (9.8)}.$$

Ακολουθώντας τα ίδια ακριβώς βήματα με την προηγούμενη ανάλυση και κάνοντας αντίστοιχες ανατικαταστάσεις καταλήγουμε σε μια Εξίσωση Σταθερού Σημείου, όπου στη θέση του πίνακα C , παρουσιάζεται ο πίνακας $F_\omega = (I + \omega A)^{-1}(I - \omega A)$, σημειώνεται εδώ η παρουσία του *Παρεκβαλλόμενου Μετασχηματισμού Cayley*, και στη θέση του c το διάνυσμα $c_\omega = (I + \omega A)^{-1}b$. Συνεχίζοντας την ανάλυση καταλήγουμε στην Παρεκβαλλόμενη Επαναληπτική Μέθοδο

$$z^{(k+1)} = F_\omega|z^{(k)}| + c_\omega, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad z^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \text{ οποιοδήποτε} \quad (9.9)$$

και επομένως στην ελαχιστοποίηση του παράγοντα που καθορίζει την ταχύτητας σύγκλισης

$$\max_{a \in \mathcal{H}} \left| \frac{1 - \omega a}{1 + \omega a} \right| < 1. \quad (9.10)$$

Όπως παρατηρείται, ο παράγοντας αυτός δεν είναι παρά ο παράγοντας που εμφανίζεται στο Πρόβλημα 5.1.

9.2 Παράδειγμα

Εστω ότι στο Πρόβλημα 9.1 ο πίνακας A και το διάνυσμα b δίνονται ως εξής:

$$A = \text{tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathbb{R}^{9,9}, \quad b = [2 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1]^T. \quad (9.11)$$

Όπως παρατηρείται, ο πραγματικός πίνακας A είναι *συμμετρικός*. Επιπλέον είναι και *θετικά ορισμένος*, όπως μπορεί να αποδειχτεί (βλ., π.χ., [10]). Οι συνθήκες αυτές εξασφαλίζουν και το μονοσήμαντο της λύσης του Προβλήματος (9.11) (βλ., π.χ., [3]). Οι ιδιοτιμές του A δίνονται από τις εκφράσεις [10]

$$4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(n+1)} \right), \quad k = 1(1)n, \quad n = 9. \quad (9.12)$$

Είναι φανερό ότι η \mathcal{H} , στην παρούσα περίπτωση, είναι το ευθύγραμμο τμήμα $P_1 P_2$, όπου τα σημεία P_1 και P_2 , στο πρώτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου, δεν είναι παρά οι κορυφές της \mathcal{H} και συγχρόνως οι ακραίες ιδιοτιμές του A . Συγκεκριμένα

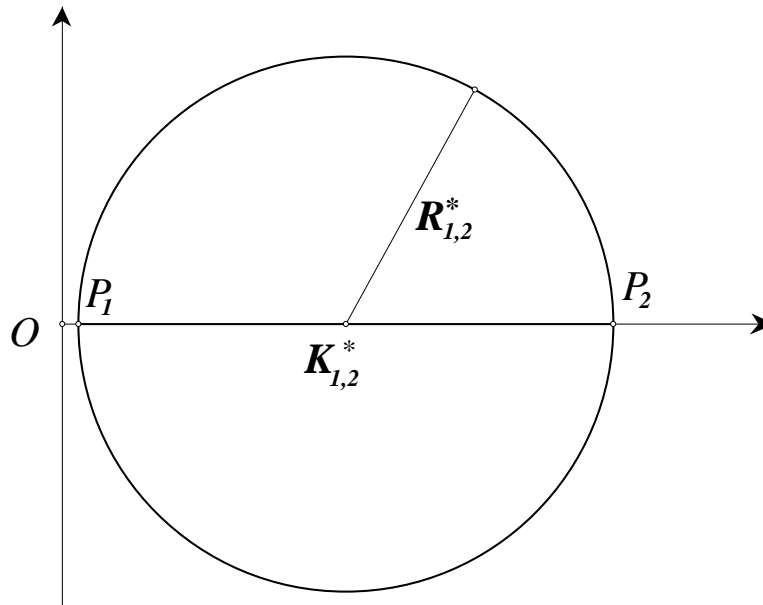
$$P_1 \left(4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{20} \right), 0 \right), \quad P_2 \left(4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{20} \right), 0 \right).$$

Ακολουθώντας τον Αλγόριθμο για την εύρεση του βέλτιστου **π.κ.** της \mathcal{H} παρατηρούμε ότι και οι δυο κορυφές της έχουν την ίδια *πολική γωνία* ίση με μηδέν. Επομένως πηγαίνουμε στο Βήμα 3. Είναι φανερό ότι στην περίπτωσή μας υπάρχει ένας *μόνος π.κ.* δύο-σημείων, ο οποίος πρέπει να είναι και ο βέλτιστος **π.κ.** δύο-σημείων. Ο κύκλος αυτός, $C_{1,2}^*$, έχει κέντρο $K_{1,2}^*(c_{1,2}^*, 0)$ με τετμημένη ίση με το ημίθροισμα των τετμημένων των σημείων P_1 και P_2 , $c_{1,2}^* = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$, και ακτίνα $R_{1,2}^* = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}$. Τα στοιχεία αυτά βρίσκονται ίσα με

$$\begin{aligned} c_{1,2}^* &= \frac{1}{2} \left(4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{20} \right) + 4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{20} \right) \right) = 2, \\ R_{1,2}^* &= \frac{1}{2} \left(4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{20} \right) - 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{20} \right) \right) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{10} \right) = 1.90211303259031 \end{aligned}$$

(βλ. Σχήμα 12). Η βέλτιστη παρεχβαλλόμενη παράμετρος μπορεί να βρεθεί από την πρώτη των (7.1) ότι είναι ίση με

$$\omega^* = \frac{1}{\sqrt{c_{1,2}^{*2} - R_{1,2}^{*2}}} = \frac{1}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} = 1.61803398874989. \quad (9.13)$$



Σχήμα 12: Βέλτιστος Περικλείων Κύκλος Ενός-Σημείου

Για την επίλυση του LCP χρησιμοποιώντας την επαναληπτική μέθοδο (9.6) με αρχικό διάνυσμα $z^{(0)} = [111111111]^T \in \mathbb{R}^9$, οπότε $\rho(F) = 0.82168115604716$, βρίσκεται ότι απαιτούνται **125** επαναλήψεις ώστε να βρεθούν δυο διαδοχικές τιμές της λύσης LCP που να συμπίπτουν σε όλα τα 14 δεκαδικά ψηφία που δίνει η MATLAB. Από την άλλη μεριά χρησιμοποιώντας την (9.9) με το ίδιο $z^{(0)}$, όπως και πριν, αλλά με τη βέλτιστη παρεκβαλλόμενη παράμετρο ω^* , οπότε $\rho(F_{\omega^*}) = 0.72654252800536$, απαιτούνται μόνον **93** επαναλήψεις. Και στις δυο περιπτώσεις η λύση που βρίσκεται είναι η ακόλουθη

$$\begin{aligned} x &= [1.0000000000000000 0 0 0 0 0 0 0 0]^T, \\ r &= [0 0.0000000000000000 1.0000000000000000 1.0000000000000000 1.0000000000000000 \\ &\quad 1.0000000000000000 1.0000000000000000 1.0000000000000000 1.0000000000000000]^T. \end{aligned} \quad (9.14)$$

10 Τελικά Σχόλια και Παρατηρήσεις στις Εφαρμογές

Πριν κλείσουμε την παρούσα εργασία θα θέλαμε να κάνουμε ορισμένα σχόλια που αφορούν κυρίως στις αναφερθείσες εφαρμογές της.

1) Στην εργασία [16] βρίσκουμε, μεταξύ άλλων, τους τύπους για τους βέλτιστους **π.κ.** στις περιπτώσεις όπου η κλειστή κυρτή θήκη \mathcal{H} είναι ορθογώνιο, ισοσκελές τραπέζιο, κυκλικό τμήμα, κυκλικός τομέας και έλλειψη με το μεγάλο άξονά της στο θετικό πραγματικό ημιάξονα ή κάθετο σ'

αυτόν. Με βάση την ακολουθηθείσα λογική θα μπορούσε κάποιος να βρει εύκολα τους βέλτιστους **π.κ.** στις περιπτώσεις όπου η \mathcal{H} είναι ζώνη κύκλου, ελλειπτικός τομέας, ελλειπτικό τμήμα ή ελλειπτική ζώνη, για να αναφερθούμε σε ορισμένες χαρακτηριστικές περιπτώσεις μόνο.

Σημείωση: Θα πρέπει να τονιστεί ότι κάποιοι από τους βέλτιστους **π.κ.** κατά τη βελτιστοποίηση του απλούστερου προβλήματος παρεκβολής $\max_{a \in \mathcal{H}} |1 - \omega a|$, όπως περιγράφηκε στην αρχή της Παραγράφου 8 για την πραγματική ή τη μιγαδική περίπτωση, είχαν βρεθεί σε προηγούμενες εργασίες (βλ., π.χ., [18], [19], [13], [14], [26], [5], [4], [15]).

2) Οι Kappel και Watson [20] κατόρθωσαν να βελτιώσουν επιταχύνοντας τη σύγκλιση της Επαναληπτικής Μεθόδου (Modulus Algorithm) του van Bokhoven, για την επίλυση του LCP, εργαζόμενοι, μετά από συγκεκριμένους ευρισκόμενους αριθμούς επαναλήψεων, με ολοένα μικρότερους κύριους υποπίνακες του πραγματικού *συμμετρικού και θετικά ορισμένου* πίνακα A . Εχμεταλλευόμενοι τους εκάστοτε υποπίνακες της μεθόδου των Kappel και Watson θα μπορούσαμε να βρίσκουμε διαφορετικά βέλτιστα ω κάθε φορά με συνέπεια την ακόμη ταχύτερη σύγκλιση της υπόψη μεθόδου.

3) Αν θεωρήσουμε την περίπτωση της επίλυσης του προβλήματος μοντέλου της εξίσωσης Poisson στο μοναδιαίο τετράγωνο Ω

$$-\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (10.1)$$

όπου $f(x, y)$ γνωστή συνάρτηση αρκούντως διαφορίσιμη, με συνοριακές συνθήκες Dirichlet, δηλαδή

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (10.2)$$

με $g(x, y)$ γνωστή συνάρτηση στο σύνορο $\partial\Omega$ του Ω , τότε με μεθόδους της Α.Α. το συνεχές πρόβλημα (10.1)-(10.2) μετατρέπεται σε διακριτό. Για την επίλυση του διακριτού προβλήματος, όπου εμπλέκονται πίνακες με συγκεκριμένες ιδιότητες και ένα άγνωστο διάνυσμα u , υιοθετείται συνήθως η καλούμενη Πεπλεγμένη Επαναληπτική Μέθοδος Εναλλασσόμενων Διευθύνσεων (βλ. [28], [31], [32] κ.λπ.). Στην τελευταία, εισχωρεί μία θετική παράμετρος r η εύρεση της οποίας, πραγματοποιούμενη με την ελαχιστοποίηση της έκφρασης

$$\max_{0 < \beta_1 \leq a \leq \beta_2} \left| \frac{r - a}{r + a} \right|, \quad (10.3)$$

επιταχύνει στο μεγαλύτερο δυνατό βαθμό τη σύγκλιση της προαναφερθείσας Μεθόδου για την εύρεση της λύσης u . Είναι δυνατόν να παρατηρήσει κανείς ότι η σύμμορφη απεικόνιση

$$T\left(\frac{a}{r}\right) := \left(1 + \frac{a}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{a}{r}\right) = \frac{r - a}{r + a}$$

δεν αποτελεί παρά ένα βαθμωτό ανάλογο του Παρεκβαλλόμενου Μετασχηματισμού Cayley

$$F\left(\frac{1}{r}A\right) = \left(I + \frac{1}{r}A\right)^{-1} \left(I - \frac{1}{r}A\right),$$

με παράμετρο παρεκβολής $\omega = \frac{1}{r}$ και κλειστή κυρτή θήκη \mathcal{H} το ευθύγραμμο τμήμα $[\beta_1, \beta_2]$ στο θετικό πραγματικό ημιάξονα. Η εύρεση του βέλτιστου r , r^* , έχει ήδη δοθεί στο Παράδειγμα της Παραγράφου 9 και είναι

$$r^* = \frac{1}{\omega^*} = \sqrt{\beta_1\beta_2}. \quad (10.4)$$

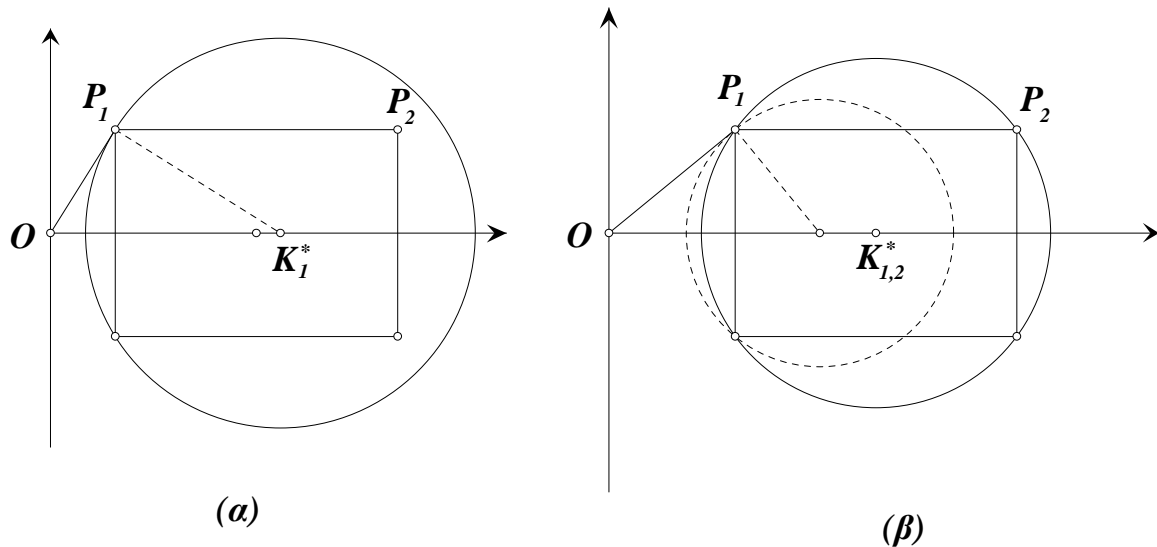
Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ίδια ακριβώς τιμή δίνεται και στα βιβλία αναφοράς [31] και [32], όπου η βέλτιστη αυτή τιμή έχει βρεθεί με καθαρά αλγεβρικές μεθόδους.

4) Για την επίλυση ενός Μιγαδικού Γραμμικού Συστήματος Αλγεβρικών Εξισώσεων με την ADI-τύπου Μέθοδο της Ερμιτιανής/ Αντιερμιτιανής Διάσπασης των Bai, Golub και Ng [2], παρουσιάζεται ακριβώς το ίδιο πρόβλημα της εύρεσης της βέλτιστης επιταχυντικής παραμέτρου r , κάτω ακριβώς από τους ίδιους περιορισμούς, όπως στο πρόβλημα της προηγούμενης περίπτωσης (3). Συνεπώς η λύση για τη βέλτιστη τιμή του r είναι ακριβώς η ίδια όπως και στην περίπτωση (3). Σημείωση: Επειδή είναι δυνατόν οι ακραίες ιδιοτιμές του εμπλεκόμενου Ερμιτιανού πίνακα να μη δίνονται αναλυτικά, τότε χρησιμοποιούμε άνω και κάτω φράγματα για τις τιμές των β_2 και β_1 , αντίστοιχα. Ένα άνω φράγμα είναι εύκολο να βρεθεί αν θεωρήσουμε μια από τις πιο απλές norms, π.χ., τη $\|\cdot\|_\infty$, για τον εμπλεκόμενο Ερμιτιανό πίνακα. Σ' ό,τι αφορά το κάτω φράγμα για τον ίδιο πίνακα χρησιμοποιούμε μια από τις μεθόδους των Ma και Zarowski [23] ή καλύτερα του Sun [29].

5) Για την επίλυση ενός Μιγαδικού Γραμμικού Συστήματος Αλγεβρικών Εξισώσεων με την ADI-τύπου Μέθοδο της Κανονικής/ Αντιερμιτιανής Διάσπασης των ίδιων ερευνητών, όπως στην (4) [12], παρουσιάζεται ακριβώς το ίδιο πρόβλημα της εύρεσης της βέλτιστης επιταχυντικής παραμέτρου r , με τη μόνη βασική διαφορά ότι η κλειστή κυρτή θήκη \mathcal{H} είναι ορθογώνιο, με συντεταγμένες κορυφών του στο πρώτο τερτημόριο του μιγαδικού επιπέδου $P_1(\beta_1, \gamma)$ και $P_2(\beta_2, \gamma)$ ($0 < \beta_1 < \beta_2$, $\gamma > 0$). Η εύρεση της βέλτιστης παραμέτρου r , στην εργασία [12], γίνεται με καθαρά αλγεβρικές μεθόδους. Αν κάποιος ακολουθήσει τον Αλγόριθμο της παρούσας εργασίας, όπως στην εργασία [16], έχουμε ότι η όλη διαδικασία έχει ως εξής. Ακολουθώντας το Βήμα 2 του Αλγόριθμου έχουμε ότι η κορυφή P_1 είναι αυτή με τη μεγαλύτερη *παλική γωνία*. Έτσι βρίσκουμε το κέντρο του κύκλου $K_1(c_1, 0)$, που εφάπτεται στην OP_1 στο P_1 . Αυτό έχει τετμημένη $c_1 = \frac{\beta_1^2 + \gamma^2}{\beta_1}$. Αν $\frac{\beta_1^2 + \gamma^2}{\beta_1} \geq \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$, τότε ο C_1^* είναι ο βέλτιστος **π.κ.** για το υπόψη ορθογώνιο (βλ. Σχήμα 13(α)). Αν $\frac{\beta_1^2 + \gamma^2}{\beta_1} < \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$, τότε το Βήμα 3 του Αλγόριθμου δίνει ότι ο βέλτιστος **π.κ.** για το δοθέν ορθογώνιο είναι ο $C_{1,2}^*$, που έχει κέντρο $K_{1,2}^*(c_{1,2}^*, 0)$, $c_{1,2}^* = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$, και ακτίνα $R_{1,2}^* = \sqrt{\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{2} - \beta_1\right)^2 + \gamma^2}$ (βλ. Σχήμα 13(β)). Τα στοιχεία των βέλτιστων **π.κ.** στις δύο αυτές περιπτώσεις δίνονται αναλυτικά στις σχέσεις (10.5)

$$\begin{aligned} \text{Αν } \frac{\beta_1^2 + \gamma^2}{\beta_1} \geq \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \quad \text{τότε } c_1^* &= \frac{\beta_1^2 + \gamma^2}{\beta_1}, \quad R_1^* = \frac{\gamma\sqrt{\beta_1^2 + \gamma^2}}{\beta_1}, \\ \text{Αν } \frac{\beta_1^2 + \gamma^2}{\beta_1} < \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \quad \text{τότε } c_{1,2}^* &= \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}, \quad R_{1,2}^* = \frac{1}{2}\sqrt{(\beta_2 - \beta_1)^2 + 4\gamma^2}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Σημειώσεις: α) Μια εκφυλισμένη περίπτωση του ορθογωνίου είναι να έχουμε $\gamma = 0$, δηλαδή ευθύγραμμο τμήμα P_1P_2 πάνω στο θετικό πραγματικό ημιάξονα. Στην περίπτωση αυτή ισχύει μόνον



Σχήμα 13: Ο Βέλτιστος Περικλείων Κύκλος στις Δυο Περιπτώσεις του Ορθογωνίου (α) Ενόσ-Σημείου και β) Δύο-Σημείων)

η δεύτερη περίπτωση από τις (10.5). Τότε, από τις απλοποιημένες εκφράσεις των $c_{1,2}^*$, $R_{1,2}^*$, και την (7.1) μπορεί να προκύψει αμέσως ότι $r^* = \frac{1}{\omega^*} = \sqrt{\beta_1\beta_2}$, δηλαδή η έκφραση στη (10.4). β) Αν κάποια επιπλέον πληροφορία είναι διαθέσιμη για το φάσμα των ιδιοτιμών του δοθέντος Μιγαδικού Συστήματος τότε είναι δυνατόν η εμπλεκόμενη κλειστή κυρτή θήκη \mathcal{H} να είναι ένα γενικότερο τετράπλευρο (συγκεκριμένα ισοσκελές τραπέζιο) ή πολύγωνο, οπότε η βέλτιστη τιμή του $r = \frac{1}{\omega}$, ευρισκόμενη με βάση τον Αλγόριθμο της παρούσας εργασίας, θα δίνει ακόμη ταχύτερη σύγκλιση από ό,τι η ευρεθείσα στην εργασία των προαναφερθέντων τριών ερευνητών.

Αναφορές

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions. Applied Mathematics Series-55*. National Bureau of Standards, United States Department of Commerce, 1964.
- [2] Z.-Z. Bai, G.H. Golub and M. Ng. *Hermitian and Skew-Hermitian Splitting Methods for Non-Hermitian Positive Definite Linear Systems*. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 24 (2003), 603–626.
- [3] A. Berman and R.J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Classics in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, 1994.

- [4] M.-Q. Chen and C. Chiu, *Region-Dependent Optimal m -Stage Runge-Kutta Schemes for Solving a Class of Nonsymmetric Linear Systems*. Linear Algebra Appl. 212/213 (1994), 523–546.
- [5] C. Chiu, *Optimal One-Stage and Two-Stage Schemes for Steady-State Solutions of Hyperbolic Equations*. Appl. Numer. Math. 11 (1993), 475–496.
- [6] R.W. Cottle and G.B. Dantzig, *Complementarity Pivot Theory of Mathematical Programming*. Linear Algebra Appl. 1 (1968), 103–125.
- [7] R.W. Cottle, J.-S. Pang and R.E. Stone, *The Linear Complementarity Problem*. Academic Press, New York, 1992.
- [8] H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [9] C.W. Cryer, *The Solution of a Quadratic Programming Problem Using Systematic Over-relaxation*. SIAM J. Control 9 (1971), 385–392.
- [10] Β. Δουγαλής, Δ. Νούτσος και Α. Χατζηδημόσ. Σημειώσεις Αριθμητικής Γραμμικής Αλγεβρας. Τμήμα Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, Τηλεπικοινωνιών & Δικτύων, Πανεπιστημίο Θεσσαλίας, Βόλος, 2007.
- [11] S.M. Fallatt and M.J. Tsatsomeros, *On the Cayley Transform of Positivity Classes of Matrices*. Electr. J. Linear Algebra 9 (2002), 190–196.
- [12] G.H. Golub. *Solution of Non-Symmetric, Real Positive Linear Systems*. Paper presented at the Milovy 2002 Conference on “Computational Linear Algebra with Applications”, August 5–9, 2002, Milovy, Czech Republic.
- [13] A. Hadjidimos, *The Optimal Solution of the Extrapolation Problem of a First Order Scheme*. Intern. J. Comput. Math. 13 (1983), 153–168.
- [14] A. Hadjidimos, *The Optimal Solution to the Problem of Complex Extrapolation of a First Order Scheme*. Linear Algebra Appl. 62 (1984), 241–261.
- [15] A. Hadjidimos, *On the Equivalence of Extrapolation and Richardson’s Iteration and Its Applications*. Linear Algebra Appl. 402 (2004), 165–192.
- [16] A. Hadjidimos and M. Tzoumas, *The Principle of Extrapolation and the Cayley Transform*. Linear Algebra Appl. accepted for publication. Παρουσιάστηκε από το δεύτερο συγγραφέα της παρούσας ομιλίας στα εξής Συνέδρια: α) Computational Methods with Applications (Harrachov 2007), August 19-25, 2007, Harrachov, Czech Republic. β) Προσκαλεσμένη Ομιλία:

Conference in Numerical Analysis (NumAn 2007) Recent Approaches to Numerical Analysis: Theory, Methods and Applications, September 3-7, 2007, Kalamata, Greece. γ) 8th Hellenic European Research on Computer Mathematics and Its Applications Conference (HERCMA 2007), September 20-22, Athens, Greece.

- [17] E. Hille, *Analytic Function Theory*, Vol. 1, 4th Printing, Blaisdel, New York, 1965.
- [18] A.J. Hughes Hallett, *Some Extensions and Comparisons in the Theory of Gauss-Seidel Iterative Technique for Solving Large Equation Systems*, in: E.G. Charatsis, Ed., *Proceedings of the Econometric Society European Meeting 1979*, 279–318, North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [19] A.J. Hughes Hallett, *Alternative Techniques for Solving Systems of Nonlinear Equations*. J. Comput. Appl. Maths 8 (1982), 35–48.
- [20] N.W. Kappel and L.T. Watson, *Iterative Algorithms for the Linear Complementarity Problems*. Int. J. Comput. Math. 19 (1986), 273–297.
- [21] M.D. Koulisianis and T.S. Papatheodorou, *Improving Projected Successive Overrelaxation Method for Linear Complementarity Problems*. Appl. Numer. Math. 45 (2003), 29–40.
- [22] C.E. Lemke, *Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming*. Management Sci. 11 (1965), 681–689.
- [23] E.M. Ma and C.J. Zarowski, *On Lower Bounds for the Smallest Eigenvalue of a Hermitian Matrix*. IEEE Trans. Inform. Theory 41 (1995), 539–540.
- [24] O.L. Mangasarian, *Nonlinear Programming*. McGraw Hill, New York, 1969. (Reprint: SIAM Classics in Applied Mathematics 10, Philadelphia, 1994.)
- [25] K.G. Murty, *Linear Complementarity, Linear and Nolinear Programming*. Internet Edition 1997.
- [26] G. Opfer and G. Schober, *Richardson's Iteration for Nonsymmetric Matrices*. Linear Algebra Appl. 58 (1984), 343–361.
- [27] K. Pantazopoulos, *Numerical Methods and Software for the Pricing of American Financial Derivatives*. PhD Thesis, Department of Computer Sciences, Purdue University, West Lafayette, IN, 1998.
- [28] D.W. Peaceman and H.H. Rachford, Jr. *The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations*. SIAM J. Appl. Math., 3 (1955), 28–41.

- [29] W. Sun, *Lower Bounds of the Minimal Eigenvalue of a Hermitian Positive-Definite Matrix*. IEEE Trans. Inform. Theory 46 (2000), 2760–2762.
- [30] W.M.G. van Bokhoven, *Piecewise-linear Modelling and Analysis*. Proefschrift, Eindhoven, 1981.
- [31] R.S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962. (Also: 2nd Edition, Revised and Expanded, Springer, Berlin, 2000.)
- [32] D.M. Young, *Iterative Solution of Large Linear Systems*. Academic Press, New York, 1971.