Γ. ΕΙΔΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ Ώρες 2 εβδομαδιαίως

Κατά το σχολικό έτος 2007-2008 θα χρησιμοποιηθεί το σχολικό βιβλίο «Άλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου» των Σ. Ανδρεαδάκη, Β. Κατσαργύρη, Σ. Παπασταυρίδη, Γ. Πολύζου, Α. Σβέρκου. Η διδασκαλία, όμως, θα πρέπει να γίνει σύμφωνα με τη σειρά που περιγράφεται στον πίνακα και στις οδηγίες που ακολουθούν.

Στην πρώτη στήλη του πίνακα αναγράφονται οι ενότητες και οι παράγραφοι κάθε μιας ενότητας στις οποίες χωρίζεται η διδακτέα ύλη, στη δεύτερη στήλη αναγράφεται ο τίτλος κάθε παραγράφου, στη τρίτη στήλη αναγράφονται οι παράγραφοι του διδακτικού βιβλίου, ενώ στην τέταρτη στήλη αναγράφονται οι προτεινόμενες ώρες διδασκαλίας.

Οι οδηγίες που ακολουθούν αναφέρονται στους **σκοπούς** και τον **τρόπο διδασκαλίας** των παραγράφων κάθε ενότητας. Στο τέλος κάθε ενότητας προτείνεται και μια **δραστηριότητα**. Ανάλογα με το επίπεδο της τάξης και το διαθέσιμο χρόνο, ο διδάσκων μπορεί να δώσει στους μαθητές κάποιες από τις δραστηριότητες αυτές.

Αν, παρά τον προγραμματισμό της ύλης, δημιουργηθεί πρόβλημα με τον διαθέσιμο χρόνο διδασκαλίας, δεν θα πρέπει να επιδιωχθεί η με κάθε τρόπο ολοκλήρωση της ύλης (π.χ. συνοπτική παρουσίαση ή «αυτοδιδασκαλία») εις βάρος της ποιότητας της μαθησιακής διαδικασίας. Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να ολοκληρωθεί η ύλη τις πρώτες εβδομάδες της επόμενης σχολικής χρονιάς. Ειδικότερα, σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να γίνει «συνοπτική διδασκαλία» των παραγράφων Ε2, Ε3 και Ε4 προκειμένου να ολοκληρωθεί η ενότητα ΣΤ. Η ολοκλήρωση ή και ολόκληρη η ενότητα ΣΤ μπορεί να διδαχθεί στη Β΄ Τάξη με την έναρξη των μαθημάτων της Άλγεβρας.

ΕΝΟΤΗΤΑ	ΤΙΤΛΟΣ	ΠΑΡ/ΦΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ	ΩΡΕΣ
Α	**Λογισμός στο $\mathbb{R}$ – Διάταξη στο $\mathbb{R}$**		**12**
Α.1	Οι πράξεις στο $\mathbb{R}$ και οι ιδιότητές τους	1.1.	2
Α.2	Δυνάμεις – Ταυτότητες – Παραγοντοποίηση	1.2.	2

Α.3	Επίλυση – Διερεύνηση της εξίσωσης: $ax+\beta=0$	1.3.	2
Α.4	Εξισώσεις και προβλήματα των οποίων η επίλυση ανάγεται σε επίλυση εξισώσεων α΄ βαθμού	1.3.	3
Α.5	Διάταξη πραγματικών αριθμών	1.4.	2
Α.6	Οι ανισώσεις: $ax+\beta>0$ και $ax+\beta<0$	1.5.	1
Β	**Απόλυτη τιμή – Ρίζες – Εξισώσεις β΄ βαθμού**		**10**
Β.1	Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού	1.6.	3
Β.2	Ρίζες πραγματικών αριθμών	1.7.	3
Β.3	Επίλυση της εξίσωσης $ax^2+\beta x+\gamma=0,\ \ a\neq 0$	4.1.	2
Β.4	Άθροισμα και γινόμενο ριζών	4.2.	1
Β.5	Εξισώσεις και προβλήματα των οποίων η επίλυση ανάγεται σε επίλυση εξισώσεων β΄ βαθμού	4.3.	1
Γ	**Συναρτήσεις**		**7**
Γ.1	Σύνολα	2.1.	1
Γ.2	Η έννοια της συνάρτησης	2.2.	2
Γ.3	Γραφική παράσταση συνάρτησης	2.3.	2
Γ.4	Η συνάρτηση $f(x)=ax+\beta$	2.4.	2
Δ	**Συστήματα εξισώσεων**		**7**
Δ.1	Συστήματα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους	3.1.	2
Δ.2	Επίλυση - Διερεύνηση γραμμικού συστήματος 2×2	3.2.	1
Δ.3	Συστήματα γραμμικών εξισώσεων με περισσότερους από δύο αγνώστους	3.3.	2
Δ.4	Συστήματα β΄ βαθμού	4.3.	2
Ε	**Μελέτη συνάρτησης**		**12**
Ε.1	Μελέτη συνάρτησης	2.5.	4

Ε.2	Η συνάρτηση $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma,\ \ a\neq 0$	4.4.	4
Ε.3	Πρόσημο των τιμών της συνάρτησης $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma,\ \ a\neq 0$	4.5.	2
Ε.4	Οι ανισώσεις: $P_1(x)\cdot P_2\cdot(x)...P_v(x)\geq 0$ ή ≤ 0 και $\dfrac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$ ή $\leq 0.$	4.5.	2
ΣΤ	**Τριγωνομετρία**		**6**
ΣΤ.1	Τριγωνομετρικοί αριθμοί	5.1.	2
ΣΤ.2	Τριγωνομετρικές ταυτότητες	5.2.	2
ΣΤ.3	Αναγωγή στο 1^{o}τεταρτημόριο	5.3.	2

Ενότητα Α΄: Προτείνεται να διατεθούν 12 διδακτικές ώρες.

Η ενότητα αυτή έχει **επαναληπτικό** χαρακτήρα και γι' αυτό δεν πρέπει να διατεθούν περισσότερες από τις προτεινόμενες διδακτικές ώρες.

Στην αρχή της ενότητας επαναλαμβάνονται οι βασικές ιδιότητες των πράξεων και των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο, οι βασικές ταυτότητες και η παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων. Ακολουθεί η επίλυση και η διερεύνηση της εξίσωσης $ax+\beta=0,$ καθώς και η εφαρμογή της στην επίλυση προβλημάτων. Στη συνέχεια, αφού οριστεί η διάταξη των πραγματικών αριθμών, με τη βοήθεια της ισοδυναμίας $a>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0,$ αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητες των ανισοτήτων και επιλύονται οι ανισώσεις $ax+\beta>0$ και $\alpha\chi+\beta<0.$

Για πληρέστερη ενημέρωση των διδασκόντων προσδιορίζονται κατά παράγραφο οι επιδιωκόμενοι στόχοι και παρέχονται ειδικές διδακτικές οδηγίες.

Α.1 (§ 1.1): Οι μαθητές πρέπει:

i. Να γνωρίζουν την έννοια του ρητού και του άρρητου αριθμού.

ii. Να μπορούν να αξιοποιούν τις ιδιότητες των πράξεων στο λογισμό.

iii. Να μπορούν να αξιοποιούν σωστά τους συνδέσμους «ή», «και» καθώς και το σύμβολο της ισοδυναμίας. Η χρήση των παραπάνω συμβόλων να διευκρινιστεί με περισσότερα παραδείγματα. Για παράδειγμα να τονιστεί ότι:

- Η εξίσωση $(x^2-x)(x^2-1)=0$ αληθεύει, μόνο όταν ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες x^2-x και x^2-1 είναι ίσος με το μηδέν, δηλαδή μόνο όταν αληθεύει η διάζευξη

$$x^2-x=0 \text{ ή } x^2-1=0 \quad (1)$$

- Παρατηρούμε ότι για $x=1$ αληθεύουν συγχρόνως και οι δυο εξισώσεις της διάζευξης, ενώ για $x=0$ και για $x=-1$ αληθεύει ακριβώς μια από τις δυο.
- Ο ισχυρισμός «$x^2-x=0$ και $x^2-1=0$» αληθεύει μόνο, όταν αληθεύουν συγχρόνως και οι δυο εξισώσεις του, δηλαδή μόνο για $x=1$, που είναι η κοινή ρίζα των εξισώσεων.
- Οι εξισώσεις $x=1$ και $x^2=1^2$ δεν είναι ισοδύναμες και γενικά οι εξισώσεις $x=a$ και $x^{2v}=a^{2v}$ $(v\in\mathbb{N}^*)$ δεν είναι ισοδύναμες.

Κατά τη διδασκαλία της Α.1 να **μη διδαχθούν** το ερώτημα iv) της εφαρμογής της σελίδας 13 και οι ασκήσεις της Β' ομάδας της σελίδας 16.

Α.2 (§ 1.2): Οι μαθητές πρέπει:

i. Να γνωρίζουν την έννοια της δύναμης και να εφαρμόζουν τις ιδιότητες των δυνάμεων.

ii. Να γνωρίζουν τις βασικές ταυτότητες και να μπορούν να τις αποδεικνύουν.

iii. Να μπορούν να μετατρέπουν παραστάσεις σε γινόμενο, του οποίου οι παράγοντες δεν αναλύονται περαιτέρω.

iv. Να μπορούν να απλοποιούν ρητές παραστάσεις.

Κατά τη διδασκαλία της Α.2

- Να **μη διδαχτούν:**

1. Η ταυτότητα $a^v-\beta^v=(a-\beta)(\alpha^{v-1}+\alpha^{v-2}\beta+...+\beta^{v-1})$
2. Οι εφαρμογές 1(iii) της σελίδας 18 και 3(i) της σελίδας 19.

3. Η άσκηση 5 της Α' ομάδας της σελίδας 22 και οι ασκήσεις της Β' ομάδας της σελίδας 23.

- Να δοθούν, όμως, προς επίλυση μερικές από τις ακόλουθες ασκήσεις:

1. Να απλοποιήσετε τη παράσταση $(a+\beta)^2-(a-\beta)^2$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:
$$\left(\frac{999}{1000}+\frac{1000}{999}\right)^2-\left(\frac{999}{1000}-\frac{1000}{999}\right)^2=4.$$
2. Να απλοποιήσετε την παράσταση $a^2-(a-1)(a+1)$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι
$$1{,}3265^2-0{,}3265\cdot 2{,}3265=1$$
και
$$3{,}12345^2-2{,}12345\cdot 4{,}12345=1$$
3. Να απλοποιήσετε τις ακόλουθες παραστάσεις, αφού πρώτα βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες ορίζονται:
$$\frac{x^2+x+1}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x^3-1},\qquad \frac{x^3-2x^2+x}{x^2-x},$$
$$\frac{(x^2-x)+2x-2}{x^2-1},\qquad \frac{x^2-3x+2}{x^2-x}\cdot\frac{x^2+2x}{x^2+x-2},$$
$$(x-\frac{1}{x})^2\cdot\frac{x^3+x^2}{(x+1)^3},\qquad \frac{x(x-2)+1}{(x-2)(x-1)}.$$

Η σπουδαιότητα της παραγοντοποίησης θα φανεί ιδιαίτερα κατά τη διδασκαλία των παραγράφων Α.4, Β.5 και Ε.4, όπου θα δοθεί ξανά η ευκαιρία για επανάληψη των βασικών ταυτοτήτων και της παραγοντοποίησης.

Α.3(§1.3): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να επιλύουν και να διερευνούν εξισώσεις της μορφής $ax+\beta=0$.

Κατά τη διδασκαλία της Α.3 προτείνεται:

- Πριν από το παράδειγμα της σελίδας 25 για την διερεύνηση εξίσωσης, να λυθούν ορισμένα απλούστερα παραδείγματα όπως:

  Να λυθούν οι εξισώσεις:

  i) $(\lambda-1)\chi=\lambda-1$, ii) $(\lambda-1)\chi=\lambda$, iii) $\lambda(\lambda-1)\chi=\lambda-1$

Σε καμία περίπτωση **δεν πρέπει** να διατεθεί υπερβολικός χρόνος για τη διερεύνηση πολύπλοκων εξισώσεων που έχει ως αποτέλεσμα τη μη ολοκλήρωση της διδακτέας ύλης.

- Να δοθούν ως ασκήσεις και τύποι προς επίλυση από άλλα μαθήματα. Για παράδειγμα:
  α) Να λυθεί ο τύπος $v = v_0 + at$ ως προς t
  β) Να λυθεί ο τύπος $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ως προς R_1
  γ) Από τους τύπους $S = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ και $v = v_0 + at,$
  να δείξετε ότι $S = \frac{v + v_0}{2}t.$

- Στο πρόβλημα 5 της Β' ομάδας της σελίδας 28 να διευκρινισθεί ότι η ταχύτητα 900km/h του αεροπλάνου αναφέρεται σε κατάσταση νηνεμίας.
- Να μη διδαχτούν οι ασκήσεις 2 και 3 της Β' ομάδας της σελίδας 28.

Α.4(§1.3): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις και προβλήματα των οποίων η επίλυση ανάγεται σε επίλυση εξισώσεων α΄ βαθμού.

Κατά τη διδασκαλία της §Α.4:
- Να δοθεί έμφαση στην **επίλυση προβλημάτων**.
- Να δοθούν στους μαθητές να επιλύσουν και μερικές από τις ακόλουθες εξισώσεις:

i. $x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0$
ii. $x(x^2-1) - x^3 + x^2 = 0$
iii. $(x+1)^2 + x^2 - 1 = 0$
iv. $(x-2)^2 - (2-x)(4+x) = 0$
v. $x(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$
vi. $(x^2-4)(x-1) = (x^2-1)(x-2)$
vii. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$
viii. $x^3 - 2x^2 - (2x-1)(x-2) = 0$

ix. $\frac{1}{x+2}=\frac{x}{x^2-4}$

x. $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x^2-x}$

xi. $\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{2}{x^2-2x+1}=0$

A.5 (§ 1.4): Οι μαθητές πρέπει:

i. Να γνωρίζουν πως ορίζεται η διάταξη των πραγματικών αριθμών, καθώς και τις άμεσες συνέπειες του ορισμού αυτού.

ii. Να γνωρίζουν τις ιδιότητες των πράξεων σε σχέση με τη διάταξη.

iii. Να μπορούν να αποδεικνύουν απλές ανισότητες.

Κατά τη διδασκαλία της §Α.5:

- Να δοθεί ιδιαίτερη βαρύτητα:
  - α) Στο 3° παράδειγμα της σελίδας 32 και τις αντίστοιχες ασκήσεις.
  - β) Στην ανισότητα $a^2+\beta^2\geq 0$ και στην άσκηση 1 της Β΄ ομάδας της σελίδας 37, η οποία προτείνεται να λυθεί με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων. Να τονιστεί ιδιαίτερα ότι

$$a^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ και } \beta=0$$

$$a^2+\beta^2>0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0 \text{ ή } \beta\neq 0$$

- Να **μη διδαχτούν** το $1^{\text{ο}}$ παράδειγμα της σελίδας 31, το $4^{\text{ο}}$ παράδειγμα της σελίδας 33 και οι ασκήσεις 6 και 8 της Α΄ ομάδας της σελίδας 36 και 2 και 3 της Β΄ ομάδας της σελίδας 37.
- Μπορεί, όμως, να δοθεί η ακόλουθη δραστηριότητα:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Κατασκευάστε μερικά ορθογώνια με διαστάσεις x, y που να έχουν άθροισμα ίσο με 10 *cm*. (Για παράδειγμα: $x=9cm$ και $y=1cm$ ή $x=8cm$ και $y=2cm$ ή ... ή $x=5cm$ και $y=5cm$) και διαπιστώστε ότι:

1. Τα εμβαδά τους είναι όλα μικρότερα ή ίσα των $25cm^2$
2. Τα εμβαδά των τετραγώνων με πλευρές τις διαγώνιες των ορθογωνίων είναι μεγαλύτερα ή ίσα των $50cm^2$

Αποδείξτε ότι τα πάνω συμπεράσματα ισχύουν για κάθε ορθογώνιο με διαστάσεις x, y των οποίων το άθροισμα είναι ίσο με $10cm$, ακολουθώντας τα επόμενα βήματα:

- Εκφράστε το y συναρτήσει του x.
- Εκφράστε το εμβαδόν του ορθογωνίου συναρτήσει του x και αποδείξτε ότι αυτό είναι μικρότερο ή ίσο των $25cm^2$.
- Εκφράστε το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά τη διαγώνιο του ορθογωνίου συναρτήσει του x και αποδείξτε ότι αυτό είναι μεγαλύτερο ή ίσο των $50cm^2$.

Α.6 (§ 1.5): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:

i. Να επιλύουν ανισώσεις της μορφής
$ax+\beta>0$ και $ax+\beta<0$

ii. Να γράφουν τις λύσεις των ανισώσεων αυτών με μορφή διαστημάτων.

Ενότητα Β΄: Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες

Στην αρχή της ενότητας αυτής, αφού ορισθεί η έννοια της απόλυτης τιμής ενός αριθμού και αποδειχθούν οι βασικές της ιδιότητες, διαπιστώνεται ότι η απόσταση δύο σημείων του άξονα είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των τετμημένων τους. Στη συνέχεια εισάγεται η έννοια της νιοστής ρίζας και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητες των ριζών.

Στο βιβλίο για λόγους διδακτικούς η νιοστή ρίζα ορίζεται μόνο για μη αρνητικούς αριθμούς.

Τέλος, επιλύεται η εξίσωση β΄ βαθμού με τη χρησιμοποίηση και της διακρίνουσας και υπολογίζονται το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης συναρτήσει των συντελεστών της. Επίσης επιλύονται εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις β΄ βαθμού.

Οι στόχοι που επιδιώκονται κατά παράγραφο είναι οι εξής:

Β.1 (§ 1.6): Οι μαθητές πρέπει:

i. Να γνωρίζουν πώς ορίζεται η απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού.

ii. Να γνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες των απόλυτων τιμών.

iii. Να μπορούν να επιλύουν **απλές** εξισώσεις και ανισώσεις με απόλυτες τιμές.

iv. Να γνωρίζουν την έννοια της απόστασης δύο αριθμών.

Κατά τη διδασκαλία της §Β.1:

- Να δοθεί έμφαση στη γεωμετρική σημασία της απόλυτης τιμής, δηλαδή, ότι η $|a|$ είναι η απόσταση του α από το 0 (συμβολικά $|a| = d(a,0)$), ανεξάρτητα από το αν είναι $a \geq 0$ ή $a < 0$. Για την κατανόηση της έννοιας της απόλυτης τιμής να δοθούν στους μαθητές απλά παραδείγματα, όπως:

  α) Να συμπληρωθούν τα δεύτερα μέλη των ισοτήτων χωρίς τις απόλυτες τιμές:

  $|-7| = ...,\quad |\sqrt{2}-1| = ...,\quad |3-\pi| = ...,\quad |\sqrt{2}-2| = ...$

  β) Να εκφράσετε για τις διάφορες τιμές του x τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές:

  $|x+5| = ...,\quad |x-2| = ...,\quad |x+5| + |x-2| ...$
- Η απόδειξη της ιδιότητας $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < \chi < \theta$, για $\theta > 0$, προτείνεται να γίνει πρώτα γεωμετρικά και έπειτα αλγεβρικά ως εξής:

  Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

  – Αν $x \geq 0$, τότε έχουμε $|x| < \theta \Leftrightarrow \chi < \theta$ και $x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < \theta$

  – Αν $x < 0$, τότε έχουμε $|x| < \theta \Leftrightarrow -\chi < \theta$ και $x < 0 \Leftrightarrow -\theta < x < 0$

  Επομένως, η $|x| < \theta$ αληθεύει για εκείνα μόνο τα x για τα οποία ισχύει $-\theta < \chi < \theta$, δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία

  $$|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta.$$
- Η απόδειξη της ιδιότητας $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta$ ή $x > \theta$ να δοθεί ως άσκηση και να εξαιρεθεί από την εξεταστέα ύλη.
- Η απόδειξη της ιδιότητας $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ προτείνεται να γίνει ως εξής:

  Διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις:

  – Αν $a \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\alpha\beta \geq 0$, οπότε

  $$|\alpha\beta| = \alpha\beta = |a||\beta|$$

  – Αν $a \geq 0$ και $\beta < 0$, τότε $\alpha\beta \leq 0$, οπότε

  $$|\alpha\beta| = -\alpha\beta = a(-\beta) = |a||\beta|$$

  – Αν $a < 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\alpha\beta \leq 0$, οπότε

  $$|\alpha\beta| = -\alpha\beta = (-a)\beta = |a||\beta|$$

– Αν $a<0$ και $\beta<0$, τότε $\alpha\beta>0$, οπότε

$$|\alpha\beta| = \alpha\beta = (-a)(-\beta) = |a||\beta|$$

- Ομοίως εργαζόμαστε για την απόδειξη της $\left|\frac{a}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$.
- Η απόδειξη της ιδιότητας $|a+\beta| \le |\alpha|+|\beta|$ **να παραλειφθεί**.

Να διαπιστωθεί, όμως, με παραδείγματα ότι

$$\big||a|-|\beta|\big| \le |\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta|$$

και να τονιστεί ότι, όπως μάθαμε στο Γυμνάσιο:

– Όταν οι αριθμοί είναι ομόσημοι, τότε ισχύει η δεξιά ισότητα και η αριστερή ανισότητα

– Όταν οι αριθμοί είναι ετερόσημοι, τότε ισχύει η αριστερή ισότητα και η δεξιά ανισότητα και

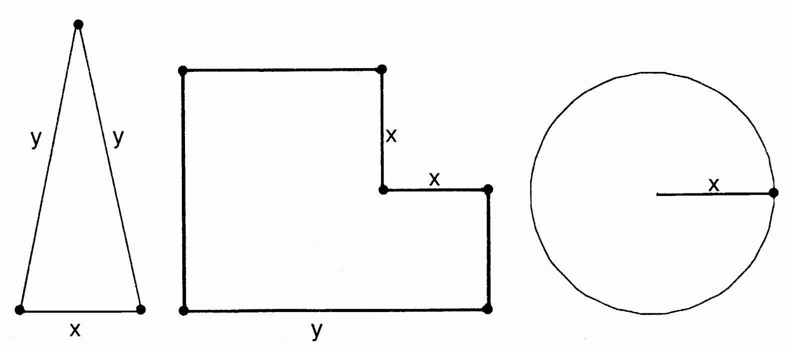
– Όταν ένας από τους αριθμούς είναι ίσος με 0, τότε ισχύουν και οι δυο ισότητες.

- Να **μη διδαχθούν** οι ασκήσεις της Β΄ ομάδας της σελίδας 43.
- Να δοθούν, όμως, ως εφαρμογές των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, οι ακόλουθες ασκήσεις:

  α) Να λυθούν πρώτα γεωμετρικά και έπειτα αλγεβρικά οι εξισώσεις:

  i) $|x-1| = |x-3|$ ii) $|x-2| = 2|x+1|$

  β) Αν $|x-2| < 0{,}1$ και $|y-4| < 0{,}2$ να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω σχημάτων:



- Τέλος, μπορεί να δοθεί η ακόλουθη δραστηριότητα:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ:

Χαράξτε έναν άξονα και πάρτε πάνω σ' αυτόν τα σημεία Α, Β και Μ με συντεταγμένες 1, 2 και x αντιστοίχως, για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $x<1$, β) $x=1$, γ) $1<x<2$, δ) $x=2$, ε) $2<x$

Α) 1) Τι παριστάνουν γεωμετρικά οι παραστάσεις $|x-1|$ και $|x-2|$ και τι παριστάνει η παράσταση $|x-1|+|x-2|$

2) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|x-1|+|x-2|$ και πότε αυτή παρουσιάζεται;

3) Παίρνει η παράσταση αυτή μέγιστη τιμή;

Β) 1) Τι παριστάνει γεωμετρικά η παράσταση $\left||x-1|-|x-2|\right|$;

2) Ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη τιμή της παράστασης $\left||x-1|-|x-2|\right|$ και πότε αυτές παρουσιάζονται;

Β.2 (§ 1.7): Οι μαθητές πρέπει: Να γνωρίζουν την έννοια του συμβόλου $\sqrt[\nu]{a},(a\geq 0)$.

i. Να αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες των ριζών.
ii. Να μπορούν να μετατρέπουν απλές παραστάσεις με άρρητους παρανομαστές σε ισοδύναμες με ρητούς παρανομαστές.
iii. Να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις της μορφής $x^\nu = a$.

Κατά την διδασκαλία της §Β.2:

- Η άσκηση 6 της Α΄ ομάδας της σελίδας 36 και η άσκηση 4 της Β΄ ομάδας της σελίδας 51 μπορούν να δοθούν ως ενιαία εργασία στους μαθητές με την εξής διατύπωση:
  «Για θετικούς αριθμούς α, β με α<β να αποδείξετε ότι:

  α) $a \leq \dfrac{a+\beta}{2} \leq \beta$

  β) $a \leq \dfrac{2a\beta}{a+\beta} \leq \beta$

γ) $\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \le \sqrt{\alpha\beta} \le \frac{\alpha+\beta}{2}$

- Να **μη διδαχθούν** οι ασκήσεις 5 και 6 της Β' ομάδας των σελίδων 51 και 52.

Β.3 (§ 4.1): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:

i. Να βρίσκουν τον τύπο που δίνει τις ρίζες μιας εξίσωσης β΄ βαθμού.

ii. Να κατανοήσουν και να συνειδητοποιήσουν τη σχέση που συνδέει το πρόσημο της διακρίνουσας και το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης β΄ βαθμού.

iii. Να χρησιμοποιούν σωστά και με ευχέρεια, όταν είναι απαραίτητο, τον τύπο που δίνει τις ρίζες μιας εξίσωσης β΄ βαθμού.

iv. Να επιλύουν προβλήματα που ανάγονται σε εξισώσεις β΄ βαθμού. Για την προπαρασκευή της διδασκαλίας της παραγράφου αυτής κρίνεται σκόπιμο να δοθεί ως άσκηση στην τάξη η λύση της εξίσωσης $x^{\nu}=a,$ με $\nu=2$ και $a>0,$ ώστε οι μαθητές να θυμηθούν ότι αυτοί έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $\sqrt{a}, -\sqrt{a}$

Κατά τη διδασκαλία της §Β.3 **να μη διδαχθούν** το παράδειγμα 2.ii) και οι ασκήσεις της Β΄ ομάδας της σελίδας 122.

Β.4 (§ 4.2): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν :

i. Να αποδεικνύουν τους τύπους που εκφράζουν το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών μιας εξίσωσης β΄ βαθμού, αφού βέβαια τονιστεί ότι πρέπει $\Delta \ge 0$.

ii. Να χρησιμοποιούν με ευχέρεια τους τύπους του αθροίσματος και του γινομένου των ριζών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Κατά τη διδασκαλία της §Β.4 **να μη διδαχτούν** το 1° παράδειγμα και οι ασκήσεις 1 iii) και iv), 4 ii) και iii), 5 και 6 της Α΄ ομάδας και όλες οι ασκήσεις της Β΄ ομάδας των σελίδων 124 και 125.

Β.5 (§ 4.3): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις της μορφής:

$$ax^2+\beta|\chi|+\gamma=0,\ \ a\neq 0$$

$$ax^{2\nu}+\beta x^{\nu}+\gamma=0,\ \ a\neq 0$$

καθώς και ρητές εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις β΄ βαθμού.

Ενότητα Γ΄: Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες

Στην αρχή της ενότητας εισάγεται η έννοια του συνόλου, οι βασικές πράξεις των συνόλων και ορίζεται η συνάρτηση με τη βοήθεια ορολογίας των συνόλων.

Στη συνέχεια επαναλαμβάνονται τα γνωστά από το Γυμνάσιο για τις καρτεσιανές συντεταγμένες και εξετάζονται οι συντεταγμένες σημείων συμμετρικών ως προς τους άξονες, ως προς την αρχή των αξόνων και ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων. Οι ιδιότητες των συντεταγμένων των σημείων αυτών χρησιμοποιούνται για την κατανόηση παρακάτω της άρτιας συνάρτησης, της περιττής συνάρτησης κτλ., καθώς και των ιδιοτήτων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Τέλος επαναλαμβάνεται η μελέτη της συνάρτησης $y = \alpha\chi + \beta$, που είναι γνωστή από το Γυμνάσιο, και διατυπώνεται η συνθήκη παραλληλίας δύο ευθειών. Με την βοήθεια της θα αποφανθούμε στην επόμενη ενότητα πότε ένα γραμμικό σύστημα έχει μοναδική λύση και πότε είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Οι στόχοι που επιδιώκονται κατά παράγραφο είναι οι εξής:

Γ.1 (§2.1): Οι μαθητές πρέπει:

i. Να μπορούν να παριστάνουν ένα σύνολο με περιγραφή ή αναγραφή των στοιχείων του καθώς και με τα διαγράμματα του Venn.
ii. Να μπορούν να διακρίνουν αν δύο σύνολα είναι ίσα και αν ένα σύνολο είναι υποσύνολο άλλου συνόλου.
iii. Να γνωρίζουν την έννοια του κενού συνόλου.
iv. Να γνωρίζουν τις έννοιες: ένωση συνόλων, τομή συνόλων, διαφορά συνόλων και συμπλήρωμα συνόλου και να τις παριστάνουν με διαγράμματα του VENN.

Η διδασκαλία της παραγράφου Γ.1 σε καμία περίπτωση **δεν πρέπει** να πάρει θεωρητική μορφή.

Γ.2 (§2.2): Οι μαθητές πρέπει:

i. Να γνωρίζουν τον ορισμό και το συμβολισμό της συνάρτησης.
ii. Να μπορούν να βρίσκουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης όταν δίνεται ο τύπος με τον οποίο ορίζεται το f(x).
iii. Να μπορούν να υπολογίζουν τις τιμές μιας συνάρτησης f για τις διάφορες τιμές του x.

Γ.3 (§2.3): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:

Να παριστάνουν ένα ζεύγος αριθμών με σημείο του επιπέδου. Στη σελίδα 70 να γίνει αντιδιαστολή μεταξύ του συνόλου {α,β} και του διατεταγμένου ζεύγους (α,β).

i. Να βρίσκουν το συμμετρικό ενός σημείου Α(x,y), ως προς τους άξονες, την αρχή των αξόνων και ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

ii. Να υπολογίζουν την απόσταση δύο σημείων.

iii. Να αναγνωρίζουν, αν μία καμπύλη είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

iv. Να βρίσκουν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τους δύο άξονες.

Γ.4 (§2.4): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:

i. Να σχεδιάζουν τις ευθείες $y = ax, y = ax + \beta$. Για το σκοπό αυτό να δοθούν ως παραδείγματα στην τάξη η σχεδίαση των ευθειών

$$y = \pm 3x,\ y = \pm\frac{1}{3}x,\ y = \pm 3x + 1$$

ii. Να αναγνωρίζουν πότε δύο ευθείες είναι παράλληλες.

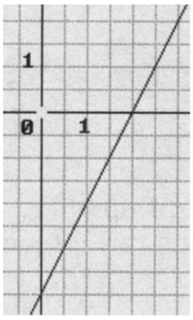
Κατά τη διδασκαλία της Γ.4:

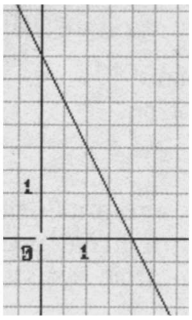
- Να επιλυθούν γραφικά ανισώσεις της μορφής:

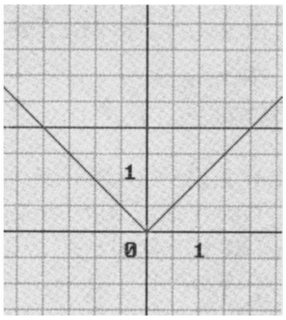
$$ax + \beta > 0 \text{ ή } ax + \beta < 0 \text{ ή } |x| < \theta \text{ ή } |x| > \theta$$

όπως για παράδειγμα οι ανισώσεις:

$$2x - 4 > 0,\ \ -2x + 4 > 0,\ \ |x| < 2 \text{ και } |x| > 2.$$



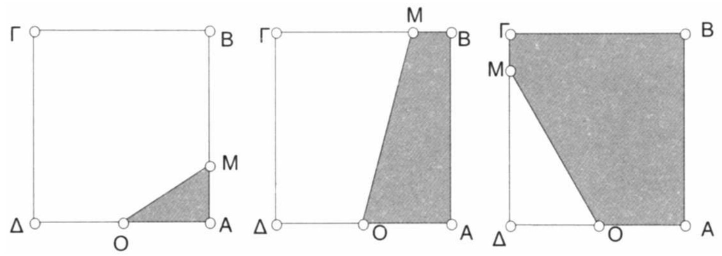




- **Να μη διδαχτεί** η υποπαράγραφος «ευθείες κάθετες», το παράδειγμα 4 της σελίδας 76 και οι ασκήσεις 1ii), 1iii) και 3 της Β΄ ομάδας της σελίδας 78.
- Μπορεί, όμως, να δοθεί η παρακάτω δραστηριότητα:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 20 cm και το μέσον Ο της ΑΔ. Ένα κινητό σημείο Μ ξεκινά από το Α και, διαγράφοντας την πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔ, καταλήγει στο Δ.



Αν με x συμβολίσουμε το μήκος της διαδρομής που έκανε το κινητό Μ και με $f(x)$ το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου,

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να παραστήσετε γραφικά την f

γ) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ισχύει $f(x) = 120cm^2$

Ενότητα Δ΄ : Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες

Και η ενότητα αυτή είναι, κατά το μεγαλύτερο μέρος της, **επανάληψη** της αντίστοιχης ενότητας της Γ' Γυμνασίου.

Στην αρχή της ενότητας γίνεται γραφική ερμηνεία της λύσης ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, προκειμένου να κατανοήσουν οι μαθητές ότι εκτός από την περίπτωση μίας λύσης, ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να είναι αδύνατο ή να έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Συγχρόνως **επαναλαμβάνονται** οι γνωστές αλγεβρικές μέθοδοι επίλυσης γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η διερεύνηση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Για τη διερεύνηση αυτή χρησιμοποιείται η έννοια της ορίζουσας 2x2 έτσι, ώστε τα σχετικά συμπεράσματα να είναι ευκολομνημόνευτα από τους μαθητές.

Ακολουθεί η παρουσίαση και επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. Από τις διάφορες μεθόδους επίλυσης τέτοιων συστημάτων χρησιμοποιείται μόνο η μέθοδος των διαδοχικών απαλοιφών αγνώστων με την βοήθεια των αντίθετων συντελεστών, ώστε να προκύψει ένα κλιμακωτό σύστημα. Η μέθοδος αυτή αποτελεί τη βάση για την επίλυση τέτοιων συστημάτων με την βοήθεια των Η/Υ.

Δε γίνεται διερεύνηση τέτοιων συστημάτων στη γενική μορφή, αλλά εξετάζονται συστήματα με αριθμητικούς συντελεστές και διαπιστώνεται αν έχουν μοναδική λύση ή αν είναι αδύνατα ή έχουν άπειρο πλήθος λύσεων.

Δε κρίνεται σκόπιμο σε καμία περίπτωση να επεκταθεί η διδασκαλία της ενότητας σε θέματα που δεν περιλαμβάνονται στο διδακτικό βιβλίο.

Οι στόχοι που επιδιώκονται κατά παράγραφο είναι οι εξής:

Δ.1 (§3.1): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:

i. Να παριστάνουν γραφικά τις λύσεις μιας εξίσωσης της μορφής $ax+\beta y=\gamma$ με $a\neq 0$ ή $\beta\neq 0$.

ii. Να επιλύουν αλγεβρικά και γραφικά ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.

iii. Να επιλύουν **προβλήματα** με την βοήθεια ενός συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Δ.2 (§3.2): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να επιλύουν ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με τη μέθοδο των οριζουσών.

Κατά τη διδασκαλία της §Δ.2:

- Να δοθεί μόνο ο πίνακας διερεύνησης ως εξής:

Το σύστημα $\left\{\begin{matrix} ax+\beta y=\gamma \\ \alpha'\chi++\beta' y=\gamma' \end{matrix}\right\}$

- αν $D\neq 0$, τότε έχει μοναδική λύση την $x=\dfrac{D_x}{D}, y=\dfrac{D_x}{D}$
- αν $D=0$, τότε είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις

και να τονιστεί η γεωμετρική ερμηνεία κάθε συμπεράσματος, αφού πρώτα οριστούν οι ορίζουσες D, D_x και D_y.

- Πριν από την εφαρμογή της διερεύνησης συστήματος του βιβλίου **είναι σκόπιμο** να λυθούν απλούστερα παραδείγματα συστημάτων 2x2 με παράμετρο, όπως για παράδειγμα:

i. Για ποια τιμή του λ έχει άπειρες λύσεις το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda\chi - 3y = 4 \\ \chi - y = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

ii. Για ποιες τιμές του λ είναι αδύνατο το σύστημα:

$$\begin{cases} \chi - y = 2 \\ 2\chi - 2y = \lambda \end{cases}$$

iii. Υπάρχουν τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει μοναδική λύση;

$$\begin{cases} \chi + 2y = \lambda \\ 2\chi + 4y = 5 \end{cases}$$

Σε καμία περίπτωση **να μη καθυστερήσει** η διδασκαλία με την επίλυση πολύπλοκων συστημάτων με παράμετρο.

- **Να μη διδαχτούν** οι ασκήσεις 6 της Α΄ ομάδας και 1 της Β΄ ομάδας της σελ. 109.

Δ.3 (§3.3): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:

i. Να επιλύουν ένα σύστημα τριών γραμμικών εξισώσεων με τρεις αγνώστους με τη μέθοδο των διαδοχικών απαλοιφών.
ii. Να διαπιστώνουν, αν ένα τέτοιο σύστημα έχει μοναδική λύση ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.
iii. Να επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια ενός συστήματος.

Κατά τη διδασκαλία της Δ.3 **να μη διδαχτούν** οι ασκήσεις 1 και 2 της Β’ ομάδας της σελ. 114.

Δ.4 (§4.3): Πρέπει να μπορούν να επιλύουν αλγεβρικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους στα οποία η μία είναι εξίσωση α΄ βαθμού και η άλλη β΄ βαθμού ή και οι δυο εξισώσεις β΄ βαθμού. Η γεωμετρική επίλυση μερικών από αυτά προτείνεται να γίνει μετά τη διδασκαλία της μελέτης συνάρτησης.

Για την κατανόηση των συστημάτων β΄ βαθμού και το ρόλο των παραμέτρων, είναι σκόπιμο, όπου είναι δυνατόν, να υπάρχει γεωμετρική ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Για το σκοπό αυτό μπορεί να δοθεί η ακόλουθη δραστηριότητα:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ:

Στο καρτεσιανό επίπεδο πάρτε το σημείο Α(1,1) και χαράξτε τον κύκλο C με κέντρο Ο και ακτίνα R=(ΟΑ). Χαράξτε επιπλέον την ευθεία ε με εξίσωση $x+y=\mu, \mu>0$ για μία τυχαία τιμή του μ.

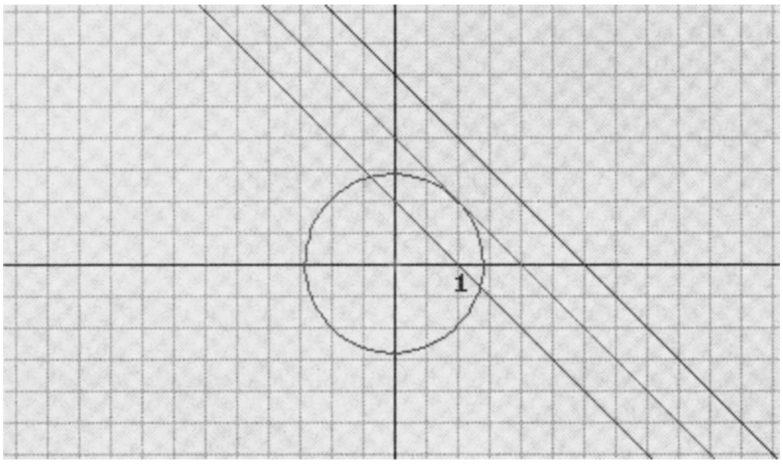
Α) α) Υπολογίστε την ακτίνα του κύκλου

β) Βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες και στη συνέχεια αποδείξτε ότι η απόσταση του Ο από την ευθεία ε είναι ίση με

$$d=\frac{\mu\sqrt{2}}{2}$$

γ) Αποδείξτε ότι:

- Η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο όταν $\mu>2$.
- Η ευθεία και ο κύκλος εφάπτονται όταν $\mu=2$.
- Η ευθεία και ο κύκλος τέμνονται όταν $0<\mu<2$.



Β) α) Αποδείξτε ότι ένα σημείο Μ(x,y) ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση

$$x^2 + y^2 = 2$$

β) Καταλήξτε στα ίδια συμπεράσματα για τις σχετικές θέσεις της ευθείας και του κύκλου λύνοντας το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = \mu \end{cases}$$

Ενότητα Ε΄ : Προτείνεται να διατεθούν 12 διδακτικές ώρες

Στην αρχή της ενότητας με τη βοήθεια παραδειγμάτων κατανοείται η σκοπιμότητα και η αναγκαιότητα της μελέτης συνάρτησης για την ακριβέστερη σχεδίαση της γραφικής της παράστασης. Έτσι, εισάγονται οι έννοιες της άρτιας και περιττής συνάρτησης, της γνησίως μονότονης συνάρτησης, καθώς και η έννοια του μέγιστου και του ελαχίστου μιας συνάρτησης. Με τη βοήθεια των εννοιών αυτών γίνεται η μελέτη και η γραφική παράσταση των συναρτήσεων

$$f(x) = ax^2 \text{ και } f(x) = \frac{a}{x}.$$

Ακολουθεί η μελέτη της συνάρτησης

$$f(x) = ax^2 + \beta x = +\gamma, \text{ με } a \neq 0$$

και τα συμπεράσματα της μελέτης χρησιμοποιούνται σε διάφορες εφαρμογές, όπως είναι η εύρεση ακρότατων συνάρτησης και η επίλυση των ανισώσεων $ax^2 + \beta\chi + \gamma \geq 0$ ή ≤ 0.

Τέλος, μελετάται το πρόσημο της συνάρτησης

$$f(x) = P_1(x)P_2(x)\cdot\ldots\cdot P_\nu(x),$$

της οποίας οι παράγοντες είναι πολυώνυμα α΄ βαθμού ή β΄ βαθμού με αρνητική διακρίνουσα. Με τη βοήθεια της παραπάνω μελέτης επιλύονται ανισώσεις των μορφών

$$P_1(x)P_2(x)\cdot\ldots\cdot P_\nu(x) \geq 0 \text{ ή } \leq 0 \quad \text{και} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ ή } \leq 0$$

Ειδικότερα, οι στόχοι που περιγράφονται κατά παράγραφο είναι οι εξής:

Ε.1 (§2.5): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:

i. Να αναγνωρίζουν αν μία συνάρτηση είναι άρτια ή αν είναι περιττή και να διαπιστώνουν τις αντίστοιχες συμμετρίες στη γραφική παράσταση.

ii. Να βρίσκουν τα διαστήματα μονοτονίας απλών συναρτήσεων.

iii. Να βρίσκουν τα ακρότατα απλών συναρτήσεων.

iv. Να μελετούν τις συναρτήσεις $f(x)=ax^2$ και $f(x)=\frac{a}{x}$, με $a\neq 0$ και να σχεδιάζουν τις γραφικές τους παραστάσεις.

Κατά τη διδασκαλία της §Ε.1 πρέπει να κυριαρχεί η εποπτεία. Οι έννοιες της άρτιας συνάρτησης, της περιττής συνάρτησης, της γνησίως μονότονης συνάρτησης και των ακρότατων συνάρτησης μπορούν να κατανοηθούν στην τάξη αυτή μέσα από τις γραφικές παραστάσεις. Σε καμία περίπτωση η διδασκαλία **δεν πρέπει** να πάρει θεωρητική μορφή, διότι στην τάξη αυτή οι μαθητές δεν έχουν την απαραίτητη ωριμότητα και δεν διαθέτουν τις γνώσεις για να κατανοήσουν τις αφηρημένες αυτές έννοιες (βλέπε και πρόταση για το μάθημα αυτό στις σελίδες 24-29 του κειμένου).

Η διδασκαλία της παραγράφου Ε.1 **να γίνει** σύμφωνα με τις οδηγίες που ακολουθούν:

1) Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης.
2) Άρτια – Περιττή συνάρτηση
3) Οι συναρτήσεις $f(x)=x^2$ και $f(x)=ax^2$, $a>0$.
4) Η συνάρτηση $f(x)=ax^2$, $a<0$.
5) Οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{x}$ και $f(x)=\frac{a}{x}$, $a>0$.
6) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{a}{x}$, $a<0$.

1) Η μελέτη της μονοτονίας και των ακρότατων **προτείνεται να γίνει** όπως παρουσιάζεται στις σελίδες 23 έως και 29.

2) Η μελέτη της άρτιας και της περιττής συνάρτησης **προτείνεται να γίνει** ως εξής:

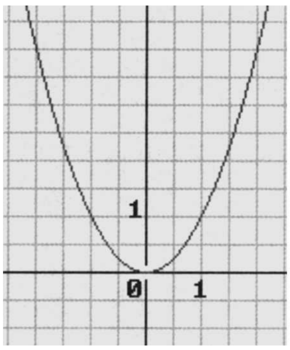
Άρτια Συνάρτηση

- Στην αρχή να δοθεί η γραφική παράσταση C μιας άρτιας συνάρτησης σε ένα σύνολο Α, όπως της συνάρτησης του παρακάτω σχήματος α) και να ζητηθεί από τους μαθητές να διαπιστώσουν ότι

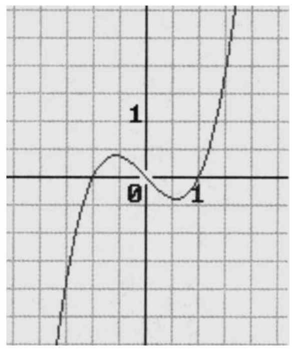
i. Η C έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y

ii. Το πεδίο ορισμού της f έχει κέντρο συμμετρίας το 0 και επιπλέον ότι οι τιμές της στα αντίθετα x είναι ίσες, δηλαδή ότι για κάθε $x \in$ Α ισχύει:

$$-x \in \mathrm{A} \text{ και } f(-x) = f(x).$$



Σχήμα α



Σχήμα β

- Στη συνέχεια να δοθεί ο ορισμός της άρτιας συνάρτησης και να τονιστεί ότι οι άρτιες συναρτήσεις έχουν αντίθετο είδος μονοτονίας σε συμμετρικά, ως προς το 0, διαστήματα του πεδίου ορισμού. Έτσι, ενώ στο $(0,+\infty)$ η f του παραπάνω σχήματος α) είναι γνησίως αύξουσα, στο $(-\infty,0)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως, η μελέτη και η χάραξη της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης μπορεί να γίνει πρώτα για τις μη αρνητικές τιμές του x και στη συνέχεια για όλες τις τιμές του x.
- Τέλος, να ζητηθεί από τους μαθητές να αποδείξουν ότι η

$$f(x) = x^2 \text{ και γενικά η } f(x) = ax^2$$

είναι άρτιες συναρτήσεις.

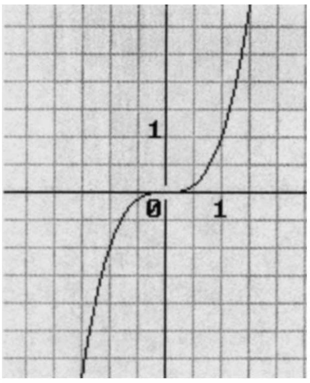
Περιττή συνάρτηση

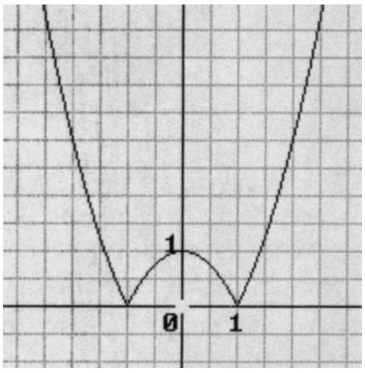
- Να παρουσιαστεί αναλόγως με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος β).

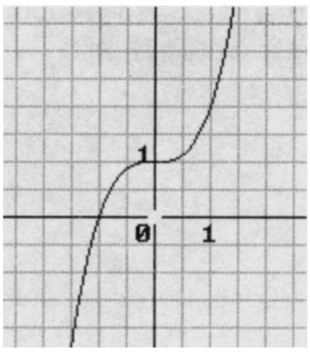
- Στη συνέχεια να δοθεί στους μαθητές να αποδείξουν ότι η
  $$f(x)=x^3 \text{ και γενικά η } f(x)=ax^3$$
  καθώς και η
  $$f(x)=\frac{1}{x} \text{ και γενικά η } f(x)=\frac{a}{x}$$
  είναι περιττές συναρτήσεις.
- Μετά τη διδασκαλία των εννοιών άρτια-περιττή συνάρτηση να δοθούν ως **ασκήσεις για το σπίτι** οι ακόλουθες:

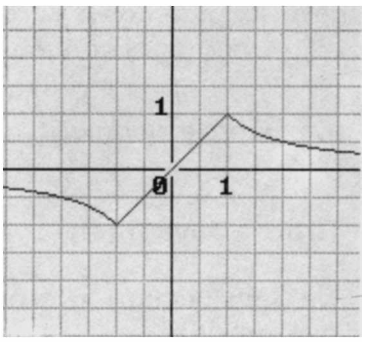
i. Η άσκηση 11 της Α΄ ομάδας της σελίδας 93.

ii. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές;



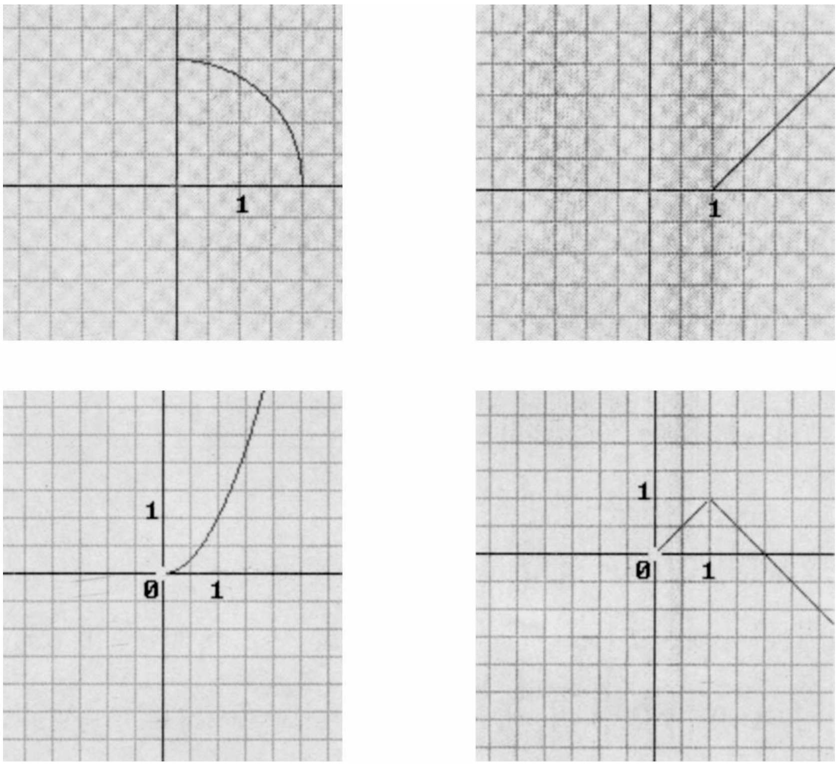






iii. Η άσκηση 13 της Α΄ ομάδας της σελίδας 93.

iv. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις
α) άρτιας συνάρτησης και β) περιττής συνάρτησης.



v. Οι ασκήσεις 9 και 10 i), 10 ii) και 12 της Α΄ ομάδας της σελίδας 93.

Να **μη διδαχτούν** οι ασκήσεις 10 iii) και 10 iv) της Α΄ ομάδας της σελίδας 93.

3. Η μελέτη της συνάρτησης $f(x)=x^2$ **προτείνεται να γίνει** ως εξής:

α) Αποδεικνύουμε ότι η f είναι άρτια και επομένως έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y

β) Μελετούμε την f στο διάστημα $[0,+\infty)$ και χαράσσομε τη γραφική της παράσταση στο διάστημα αυτό.

γ) Κάνοντας χρήση της παραπάνω συμμετρίας, χαράσσομε τη γραφική παράσταση της f σε όλο το $\mathbb{R}$ και εξάγουμε τα συμπεράσματα για τη μονοτονία και τα ακρότατα αυτής.

4. Για τη μελέτη της $f(x)=\dfrac{1}{x}$ εργαζόμαστε αναλόγως.

Κατά τη διδασκαλία της §Ε.1 να **μη διδαχτούν** η άσκηση 2 της Α΄ ομάδας της σελίδας 92 και οι ασκήσεις της Β' ομάδας της σελίδας 94.

Function probe, Μελέτη της συνάρτησης $y=\dfrac{a}{x}$ σελ. 80-84 (αφορά τη §2.5 σχολ. βιβλίου)

Ε.2 §(4.4): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:

i. Να γράφουν ένα τριώνυμο $f(x)=ax^2+\beta\chi+\gamma,\ \ a\neq 0$ στη μορφή $f(x)=a\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4\alpha}$ και, ανάλογα με το πλήθος των ριζών του, σε μία από τις ακόλουθες μορφές

$$f(x)=a(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2),$$
$$f(x)=a(x-\rho)^2$$
$$f(x)=a\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\Delta}{4\alpha}$$

και να τις χρησιμοποιούν όταν χρειάζεται (π.χ εύρεση ακροτάτων τριωνύμου, απλοποίηση κλασματικών παραστάσεων κτλ.).

ii. Να παριστάνουν γραφικά συναρτήσεις μορφής $f(x)=\phi(\chi)\pm c$.

iii. Να παριστάνουν γραφικά συναρτήσεις μορφής $f(x)=\phi(\chi\pm c)$.

iv. Να κάνουν τη μελέτη και τη γραφική παράσταση της $f(x)=ax^2+\beta\chi+\gamma,\ a\neq 0$

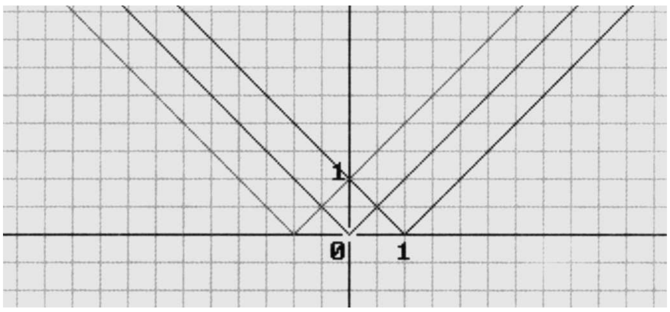
v. Να επιλύουν γραφικά την εξίσωση $ax^2+\beta\chi+\gamma=0,\ a\neq 0$

Κατά τη διδασκαλία της §Ε.2:

- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)=\phi(\chi)\pm c,\ c>0$, που είναι κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες άνω ή κάτω, δεν παρουσιάζει δυσκολίες κατανόησης. Μεγάλες, όμως, δυσκολίες κατανόησης παρουσιάζονται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\phi(\chi\pm c),\quad c>0$, που είναι οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες αριστερά ή δεξιά. Γι' αυτό πρέπει να γίνει προετοιμασία των μαθητών με κατάλληλα απλά παραδείγματα, όπως:

α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x)=|x|,\quad g(x)=|x-1|,\quad h(x)=|x+1|.$$



β) Να κατασκευάσετε έναν πίνακα τιμών των συναρτήσεων:

$$\phi(x)=2\chi^2,\quad f(x)=2(x-3)^2,\quad g(x)=2(x+3)^2.$$

Τι παρατηρείτε;

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$\phi(\chi)=2x^2$	50	32	18	8	2	0	2	8	18	32	50
$f(x)=2(x-3)^2$	128	98	72	50	32	18	8	2	0	2	8
$g(x)=2(\chi+3)^2$	8	2	0	2	8	18	32	50	72	98	128

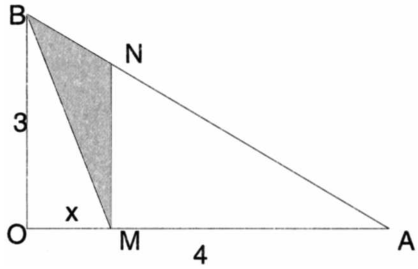
[Οι τιμές της f ακολουθούν με διαφορά τριών βημάτων, ενώ οι τιμές της g προηγούνται κατά τρία βήματα]

- Στο λυμένο πρόβλημα της σελίδας 135, αμέσως μετά τον μετασχηματισμό του τριωνύμου f(x), στη μορφή $f(x)=2(x-3)^2+1$, να επισημανθεί ότι η συνάρτηση έχει για $x=3$ ελάχιστο, το $f(3)=1$. Με τη μέθοδο αυτή να γίνουν και άλλες εφαρμογές υπολογισμού του ακρότατου ενός τριωνύμου.

- Οι μαθητές πρέπει με την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου ή με τη βοήθεια των πινάκων των σελίδων 136 και 137 να μπορούν να βρίσκουν το ακρότατο ενός τριωνύμου και να κατανοήσουν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ax^2+\beta\chi+\gamma$ είναι η παραβολή $y=ax^2$ παράλληλα μετατοπισμένη σε μια άλλη θέση με κορυφή το σημείο $K\left(\frac{-\beta}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$

- Προτείνεται να δοθεί η ακόλουθη δραστηριότητα:

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ:



Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο, το Μ είναι τυχαίο σημείο της ΟΑ και ΜΝ//ΟΒ. Αν (ΟΑ)=4, (ΟΒ)=3 και (ΟΜ)=x, και Ε(x) είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΒΜΝ,
α) Να αποδείξετε ότι:

$$(MN) = \frac{3(4-x)}{4} \text{ και } E(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$$

β) Να βρείτε τη θέση του Μ για την οποία το εμβαδόν Ε(x) μεγιστοποιείται. Ποια είναι η μέγιστη τιμή του Ε (x);

> **Function probe**, Βολή-Δευτεροβάθμιες εξισώσεις σελ. 40-43 (αφορά την §4.4 σχολ. βιβλίου).
> Η πρόσκληση σελ. 44-46 (αφορά την §4.4 σχολ. βιβλίου),
> Μετασχηματισμοί στη συνάρτηση $y = ax^2 + \beta\chi + \gamma$ σελ. 50-52 (αφορά την §4.4 σχολ. βιβλίου),
> Οικογένειες παραβολών σελ. 48-51 (αφορά την §4.4 σχολ. βιβλίου)

Ε.3 (§4.5): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να αποδεικνύουν τα συμπεράσματα που αναφέρονται στο πρόσημο τριωνύμου και να επιλύουν ανισώσεις β΄ βαθμού χρησιμοποιώντας αυτά τα συμπεράσματα.

Τα συμπεράσματα για το πρόσημο του τριωνύμου να εξαχθούν μόνο με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης του τριωνύμου και να μη γίνει η αλγεβρική απόδειξη.

Ε.4 (§4.5): Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να βρίσκουν το πρόσημο του πολυωνύμου $f(x) = P_1(x) \cdot P_2(x) ... P_\nu(x)$ και να επιλύουν ανισώσεις της μορφής:

$$P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot ... \cdot P_\nu(x) \geq 0 \text{ ή } \leq 0 \text{ και } \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ ή } \leq 0$$

Η εύρεση του πρόσημου του $f(x) = P_1(x) \cdot P_2(x) ... P_\nu(x)$ μπορεί να γίνει και ως εξής:

- Βρίσκουμε τις ρίζες των παραγόντων $P_1(x), P_2(x), ..., P_\nu(x)$ και τις τοποθετούμε πάνω σε έναν άξονα κατά τάξη μεγέθους.

- Στο διάστημα που είναι δεξιά της μεγαλύτερης ρίζας θέτουμε ως πρόσημο του $f(x)$ το πρόσημο του γινομένου των συντελεστών των μεγιστοβάθμιων όρων των παραγόντων $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... και $P_\nu(x)$.

- Στα υπόλοιπα διαστήματα το πρόσημο του $f(x)$ καθορίζεται ακολουθώντας τον επόμενο κανόνα:
  «Όταν μεταβαίνουμε από ένα διάστημα στο αμέσως προηγούμενο, αν η πολλαπλότητα της ρίζας που χωρίζει τα διαστήματα είναι περιττός αριθμός, τότε αλλάζουμε το πρόσημο, αν όμως είναι άρτιος αριθμός, τότε διατηρούμε το ίδιο πρόσημο».

Σύμφωνα με τα παραπάνω, επειδή το πολυώνυμο

$$f(x) = (-x^2+4)(x^2-3x+2)(x^2+x+1)$$

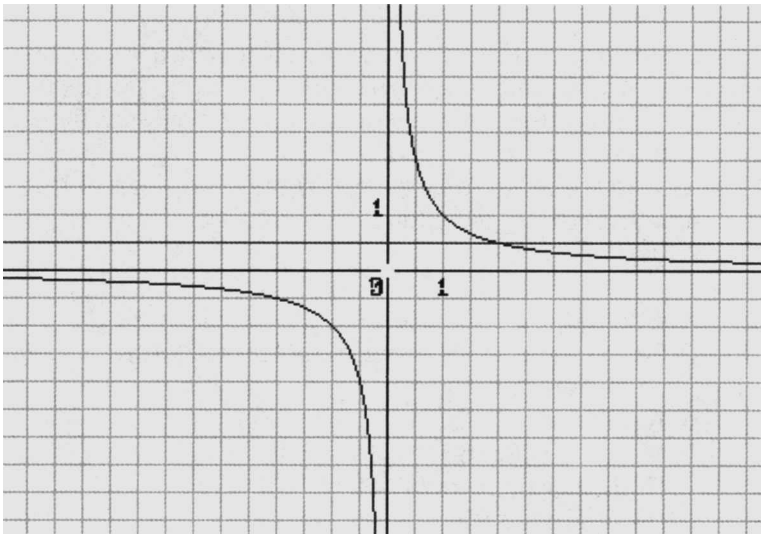
έχει ρίζες τις -2, 1 και 2 (διπλή) και επειδή το πρόσημο του γινομένου των συντελεστών των μεγιστοβάθμιων όρων των παραγόντων του είναι αρνητικό, το πρόσημο του $f(x)$ θα δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

x		-2		1		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

Έτσι η ανίσωση $f(x)$ αληθεύει μόνο αν $x \in [-2,1] \cup \{2\}$

Κατά τη διδασκαλία της Ε.4 **να μη διδαχτούν** οι ασκήσεις της Β΄ ομάδας της σελίδας 152. Να επιλυθούν, όμως, γραφικά ανισώσεις όπως για παράδειγμα οι:

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{2} \text{ και } \frac{1}{x} > \frac{1}{2}.$$



Ενότητα ΣΤ: Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες. (Αν ο διαθέσιμος χρόνος δεν επαρκεί για την ολοκλήρωση της διδασκαλίας της ενότητας θα πρέπει να διατεθούν οι απαιτούμενες ώρες στις αρχές του επόμενου σχολικού έτους).

Στην αρχή της ενότητας επαναλαμβάνονται οι ορισμοί των τριγωνομετρικών αριθμών οι οποίοι είναι γνωστοί από το Γυμνάσιο.

Στη συνέχεια, αφού γενικευθεί η έννοια της γωνίας, ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οποιασδήποτε γωνίας με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου και αποδεικνύονται οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Ακολουθεί η αναγωγή του υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας στο 1ο τεταρτημόριο.

Ειδικότερα, οι στόχοι που επιδιώκονται κατά παράγραφο είναι:

ΣΤ.1: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:

i. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου καθώς και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

ii. Τη σχέση που συνδέει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών που διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο των 360°.
iii. Την έννοια του τριγωνομετρικού κύκλου και τον τρόπο που παριστάνονται σ' αυτόν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας σε μοίρες ή ακτίνια.

ΣΤ.2: Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν να αποδεικνύουν τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες και να τις χρησιμοποιούν:
i. Για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών όταν δίνεται ένας από αυτούς και
ii. Για να αποδεικνύουν άλλες ταυτότητες. Έτσι δίνεται η ευκαιρία για άσκηση στον αλγεβρικό λογισμό και την αποδεικτική διαδικασία.

ΣΤ.3: Οι μαθητές πρέπει
i. Να γνωρίζουν τις σχέσεις που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών.
- Αντιθέτων
- Με άθροισμα 180°
- Που διαφέρουν κατά 180°
- Με άθροισμα 90°

ii. Να μπορούν να χρησιμοποιούν τις προηγούμενες σχέσεις για την αναγωγή του υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας στον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας από 0° μέχρι 90°.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Κατά το σχολικό έτος 2007-2008 θα διδαχτεί το βιβλίο Ευκλείδεια Γεωμετρία των Αργυροπούλου Η., Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάτη Σ. και Σίδερη Π. Το βιβλίο αυτό συνοδεύεται και από βιβλίο του καθηγητή, στο οποίο υπάρχουν αναλυτικές οδηγίες για την διδασκαλία. Από το βιβλίο θα διδαχθούν στην Α΄ τάξη του Γενικού Λυκείου τα κεφάλαια 1-8. Στη συνέχεια προτείνεται μια ενδεικτική κατανομή των ωρών διδασκαλίας ανά κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: (**Προτείνεται να διατεθεί** 1 διδακτική ώρα)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: (**Προτείνεται να διατεθούν** 4-5 διδακτικές ώρες). Η διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού πρέπει να έχει **χαρακτήρα επανάληψης** και ο διδάσκων να επιμείνει μόνο στην κατανόηση των βασικών εννοιών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: (**Προτείνεται να διατεθούν** 16-18 διδακτικές ώρες).
Δε θα διδαχθούν:
- Οι αποδείξεις των θεωρημάτων των § 3.2,3.3,3.4
- Η απόδειξη του θεωρήματος της § 3.5
- Οι αποδείξεις των θεωρημάτων I &II της § 3.6
- Η απόδειξη του θεωρήματος της § 3.10
- Η απόδειξη του θεωρήματος της § 3.12
- Η 4η εφαρμογή της § 3.12
- Οι αποδείξεις των θεωρημάτων της §3.13
- Η απόδειξη του θεωρήματος της §3.14
- Οι γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου σελ. 70

Cabri II, Συμμετρία ως προς σημείο και ως προς άξονα σελ. 15 (αφορά την §3.8 και την §3.9 σχολ. βιβλίου)
Κριτήρια ισότητας τριγώνου σελ.19 (αφορά την §3.4 σχολ. βιβλίου)

The Geometer's Sketchpad, Ισότητα τριγώνων (Γ-Π-Γ) σελ. 74 (αφορά την §3.2 σχολ. βιβλίου)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: (**Προτείνεται να διατεθούν** 6-7 διδακτικές ώρες).
Δε θα διδαχθούν:
- Η απόδειξη της πρότασης IV της § 4.2
- Οι γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου.

The Geometer's Sketchpad, Μεσοκάθετοι τριγώνου σελ. 54-55 (αφορά την §4.5 σχολ. βιβλίου),
Διχοτόμοι τριγώνου σελ. 59-60 (αφορά την §4.5 σχολ. βιβλίου)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: (**Προτείνεται να διατεθούν** 12-14 διδακτικές ώρες).
Δε θα διδαχθούν:
- Η απόδειξη του θεωρήματος της § 5.8
- Οι γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου.

💻 **The Geometer's Sketchpad**, Ιδιότητες ορθογωνίων παραλ-ληλογράμμων σελ.61-62 (αφορά την §5.3 σχολ. βιβλίου), Τε-τράπλευρο με κορυφές τα μέσα των πλευρών άλλου τετρα-πλεύρου σελ. 15 (αφορά την §5.3 σχολ. βιβλίου), Ιδιότητες ρόμβων σελ. 63-64 (αφορά την §5.4 σχολ. βιβλίου), Διάμεσοι τριγώνου σελ. 52-53 (αφορά την §5.7 σχολ. βιβλίου), Ύψη τρι-γώνου σελ. 56-58 (αφορά την §5.8 σχολ. βιβλίου), Μεσοκάθετοι τριγώνου σελ. 54-55 (αφορά την §5.12 σχολ. βιβλίου), Διχοτό-μοι τριγώνου σελ. 59-60 (αφορά την §5.12 σχολ. βιβλίου)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: (**Προτείνεται να διατεθούν** 5-6 διδακτικές ώρες).
- Στην απόδειξη του θεωρήματος της § 6.2 να διδαχθεί μόνο η περίπτωση (i)

Δε θα διδαχθούν :
- Η εφαρμογή 2 της § 6.3
- Η §6.4
- Η απόδειξη του θεωρήματος της § 6.6
- Η εφαρμογή 3 της § 6.6
- Τα προβλήματα 1,2,4 της § 6.7
- Οι γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου

💻 **The Geometer's Sketchpad**, Γεωμ. Τόπος μέσων παραλλήλων χορδών σελ. 43-44 και 46-47 (αφορά τις §6.4-6.7 σχολ. βιβλίου)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: (**Προτείνεται να διατεθούν** 5-6 διδακτικές ώρες). Η διδασκαλία των § 7.1 έως και 7.6 να γίνει περιληπτικά μέσα από τις ερωτήσεις κατανόησης και εμπέδωσης και να μην απαι-τείται η απομνημόνευση των τύπων των σελίδων 149 και 150.
Δε θα διδαχθούν:
- Η απόδειξη του θεωρήματος του Θαλή § 7.7
- Η § 7.9
- Οι γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου

💻 Cabri **II**, Δραστηριότητα 1 και 2 σελ. 43-44 (αφορά την §7.7 σχολ. βιβλίου)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: (**Προτείνεται να διατεθούν** 4 διδακτικές ώρες). Δε θα διδαχθούν:

- Οι αποδείξεις των θεωρημάτων ΙΙ και ΙΙΙ της § 8.2
- Οι εφαρμογές 1 και 3 της § 8.2
- Οι γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου

Cabri **II**, Δραστηριότητα 1 σελ. 45 (αφορά επαναλ. Κεφ. 8 σχολ. βιβλίου)

Να μη διδαχθούν οι ασκήσεις από σύνθετα θέματα:
σελ. 48 οι ασκήσεις 1,2
σελ. 58 οι ασκήσεις 2,3,4
σελ. 83 οι ασκήσεις 1,3,4
σελ. 88 οι ασκήσεις 3,4,5,6
σελ. 100 ασκήσεις 1,4,5
σελ. 104 οι ασκήσεις 1,2
σελ. 111οι ασκήσεις 2,4,6,7,8
σελ. 115 οι ασκήσεις 3,4,5
σελ. 130 οι ασκήσεις 2,3
σελ. 134 οι ασκήσεις 1-2-3-4
σελ. 140 οι ασκήσεις 1-2-3
σελ. 157 οι ασκήσεις 1-2-3-4-5
σελ. 163 οι ασκήσεις 1-2-3-4-5
σελ. 178 οι ασκήσεις 1-2-3