Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ι. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ: Ώρες 2 εβδομαδιαίως.

Το αργότερο μέχρι **10 Οκτωβρίου** θα πρέπει να έχει ολοκληρωθεί η διδασκαλία της ύλης της Άλγεβρας Α΄ Γενικού Λυκείου. Στη συνέχεια θα διδαχτεί η προβλεπόμενη από το Πρόγραμμα Σπουδών ύλη της Άλγεβρας Β΄ Γενικού Λυκείου. Ως διδακτικό εγχειρίδιο θα χρησιμοποιηθεί το σχολικό βιβλίο «Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου» των Σ. Ανδρεαδάκη, Β. Κατσαργύρη, Σ. Παπασταυρίδη, Γ. Πολύζου και Α. Σβέρκου.

Για την πληρέστερη ενημέρωση των διδασκόντων δίνονται ειδικότερες οδηγίες για κάθε κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 1. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 17 διδακτικές ώρες.

Στο κεφάλαιο αυτό συμπληρώνεται η ύλη της τριγωνομετρίας που προβλέπεται από το Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών του Λυκείου.

Το περιεχόμενο του κεφαλαίου αυτού μπορεί να χωριστεί σε 4 ευρύτερες ενότητες. Η πρώτη ενότητα περιλαμβάνει την έννοια της περιοδικής συνάρτησης, τις γραφικές παραστάσεις περιοδικών συναρτήσεων καθώς και την επίλυση βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων. Η δεύτερη ενότητα περιλαμβάνει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς αθροίσματος και διαφοράς δύο γωνιών και πολλαπλασίων μιας γωνίας, η τρίτη τους μετασχηματισμούς τριγωνομετρικών παραστάσεων και η τέταρτη την επίλυση τριγώνου.

Το τυπολόγιο της δεύτερης και τρίτης ενότητας είναι διαρθρωμένο με τέτοιο τρόπο, ώστε να φαίνεται η εξάρτηση του από το βασικό τύπο $συν(α-β) = συνασυνβ + ημαημβ$. Έτσι κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού δίνεται ευκαιρία στους μαθητές για δημιουργική εργασία.

Η ανάπτυξη του κεφαλαίου είναι λιτή και απαλλαγμένη από ενότητες που δεν έχουν σήμερα πρακτική σκοπιμότητα, όπως για παράδειγμα η επίλυση τριγώνου από δευτερεύοντα στοιχεία του.

Ακόμη έχει γίνει σαφέστερη η σύνδεση των τριγωνομετρικών μεγεθών με φαινόμενα που παρουσιάζουν περιοδικότητα. Έτσι υπάρχει ιδιαίτερη παράγραφος που αναφέρεται στη μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x$ και τις εφαρμογές της στη Φυσική και άλλες επιστήμες.

Ειδικότερα οι στόχοι που επιδιώκονται κατά παράγραφο είναι:

1.1: Οι μαθητές πρέπει:

i) Να γνωρίζουν την έννοια της περιοδικής συνάρτησης.

ii) Να μπορούν να σχεδιάζουν τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$y = \eta\mu x$, $y = \sigma\upsilon\nu x$, $y = \alpha\eta\mu(\nu x)$, $y = \alpha\sigma\upsilon\nu(\nu x)$

καθώς και της συνάρτησης $y = \varepsilon\varphi x$. Η μελέτη των συναρτήσεων αυτών κρίνεται απαραίτητη, αφού εκφράζουν πλήθος φαινομένων κυρίως της Φυσικής.

> **The Geometer's Sketchpad**. Σχεδίαση ημιτονοειδούς καμπύλης σελ. 28-30.

> **Function probe**. Μελέτη των συναρτήσεων $y = \eta\mu x$ και $y = \sigma\upsilon\nu x$ και των μετασχηματισμών τους σελ. 62-65.
>
> Μελέτη των συναρτήσεων $y = \varepsilon\varphi x$ και $y = \sigma\varphi x$ και των μετασχηματισμών τους σελ. 67-69.

1.2: Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να επιλύουν τις βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις: $\eta\mu x=\alpha$, $\sigma\upsilon\nu x=\alpha$ και $\varepsilon\varphi x=\alpha$, καθώς και άλλες τριγωνομετρικές εξισώσεις που η επίλυσή τους ανάγεται στις βασικές. Θεωρείται σκόπιμο η επίλυση των βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων να εξηγείται με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των αντίστοιχων συναρτήσεων, αφού μ' αυτό τον τρόπο γίνεται καλύτερα κατανοητή η πολλαπλότητα των λύσεων και η παραγωγή των τύπων των λύσεων αυτών των εξισώσεων. Ακόμη προτείνεται οι ασκήσεις 1 (Β΄ Ομάδας της § 1.1) και 13 (Α΄ ομάδας της §1.2) να λυθούν στην τάξη.

1.3 και 1.4: Οι μαθητές πρέπει:

i) Να γνωρίζουν τον τύπο του συνημίτονου της διαφοράς δύο γωνιών.

ii) Να παράγουν από τον τύπο αυτό τους υπόλοιπους τύπους των τριγωνομετρικών αριθμών του αθροίσματος και της διαφοράς γωνιών καθώς και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α.

iii) Με τη βοήθεια των προηγούμενων τύπων:
α) να υπολογίζουν την τιμή ορισμένων παραστάσεων τριγωνομετρικών αριθμών,
β) να αποδεικνύουν απλές τριγωνομετρικές ταυτότητες,
γ) να επιλύουν απλές τριγωνομετρικές εξισώσεις.

1.5: Η παράγραφος αυτή **δε θα διδαχτεί**.

1.6: Οι μαθητές πρέπει να μπορούν:
i) Να μελετούν τη συνάρτηση $f(x) = \rho\eta\mu\ (\chi + \phi)$
ii) Να μετασχηματίζουν τη συνάρτηση $f(x) = \alpha\eta\mu\chi + \beta\sigma\upsilon\nu$ στη μορφή $f(x) = \rho\eta\mu\ (\chi + \phi)$.
iii) Να επιλύουν απλές τριγωνομετρικές εξισώσεις με την βοήθεια των προηγούμενων μετασχηματισμών.

1.7: Η παράγραφος αυτή **δε θα διδαχτεί**.

Κεφάλαιο 2. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 12 διδακτικές ώρες.

Στο κεφάλαιο αυτό επαναλαμβάνονται και συμπληρώνονται όσα έχουν διδαχθεί μέχρι τώρα οι μαθητές σχετικά με τα πολυώνυμα και τις πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις.

Ακόμη επιχειρείται μια πρώτη παρουσίαση του προσδιορισμού ρίζας μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με προσέγγιση.

Για να επιτευχθεί ο στόχος της ολοκλήρωσης της ύλης **δεν είναι σκόπιμη** η επέκταση σε δύσκολες ασκήσεις θεωρίας πολυωνύμων και σε μορφές εξισώσεων που άλλοτε αποτελούσαν ενότητες της διδακτέας ύλης των Μαθηματικών (π.χ. αντίστροφες εξισώσεις διτετράγωνες, με ριζικά) και οι οποίες σύμφωνα με τις σύγχρονες αντιλήψεις δεν αποτελούν πια κύρια ύλη του μαθήματος.
Ειδικότερα, οι στόχοι που επιδιώκονται κατά παράγραφο είναι:

2.1: Οι μαθητές πρέπει:
i) Να μπορούν να αναγνωρίζουν πότε μια αλγεβρική παράσταση της πραγματικής μεταβλητής x, είναι πολυώνυμο και να διακρίνουν τα στοιχεία του: **όροι, συντελεστές, σταθερός όρος** και **βαθμός**.
ii) Να καταλάβουν τις έννοιες: σταθερό πολυώνυμο - μηδενικό πολυώνυμο - ίσα πολυώνυμα - αριθμητική τιμή πολυωνύμου - ρίζα πολυωνύμου.

iii) Να μπορούν να αντιδιαστέλλουν τις έννοιες:
   α) Μηδενικό πολυώνυμο -Τιμή πολυωνύμου ίση με το μηδέν.
   β) Ίσα πολυώνυμα - Πολυώνυμα ίσα για ορισμένες τιμές της μεταβλητής.

iv) Να μπορούν να προσθέτουν, να αφαιρούν και να πολλαπλασιάζουν πολυώνυμα.

2.2: Οι μαθητές πρέπει:

i) Να κατανοήσουν την αλγοριθμική διαίρεση πολυωνύμων με πρότυπο την αλγοριθμική διαίρεση μεταξύ θετικών ακεραίων.

ii) Να μπορούν να κάνουν τη διαίρεση πολυωνύμων και να γράφουν την ταυτότητα της διαίρεσης.

iii) Να κατανοήσουν γιατί κάθε πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x-\rho$ παίρνει τη μορφή: $P(x)=(x-\rho)\pi(x)+P(\rho)$ και να μπορούν με βάση την ταυτότητα αυτή:
   α) Να υπολογίζουν το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-\rho)$
   β) Να αποδεικνύουν ότι: $P(\rho)=0 \Leftrightarrow P(x)=(x-\rho)\pi(x)$

Να μπορούν να κάνουν χρήση του σχήματος Horner για τον υπολογισμό των τιμών μιας πολυωνυμικής συνάρτησης (μέθοδος προσαρμόσιμη σε υπολογιστή) καθώς και του πηλίκου και του υπολοίπου της διαίρεσης πολυωνύμου με πρωτοβάθμιο παράγοντα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από την §2.2 **να μη διδαχτούν** οι ασκήσεις 1, 2, 4 και 5 της Β΄ ομάδας της σελίδας 73.

2.3: Οι μαθητές πρέπει:

i) Να εμπεδώσουν τον τρόπο επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού $\nu \geq 2$ με παραγοντοποίηση, που ήδη έχουν διδαχθεί

ii) Να κατανοήσουν το θεώρημα των ακέραιων ριζών και τη σχετική απόδειξη.

iii) Να εφαρμόζουν το προηγούμενο θεώρημα στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων (ανισώσεων) με ακεραίους συντελεστές.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η υποπαράγραφος «Προσδιορισμός ρίζας με προσέγγιση» **δε θα διδαχτεί**

2.4: Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις, των οποίων η επίλυση ανάγεται στη επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων γνωστής μορφής.

Κεφάλαιο 3. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 10 διδακτικές ώρες.

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγεται με παραδείγματα η έννοια της ακολουθίας ως συνάρτησης με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών ακεραίων και εξετάζονται κυρίως δύο ειδικές μορφές ακολουθιών, που ορίζονται αναδρομικά, η αριθμητική και η γεωμετρική πρόοδος.

Δε δίνεται ο αυστηρός «εψιλοντικός» ορισμός του ορίου μιας ακολουθίας αλλά επιχειρείται μια πρώτη προσέγγιση στην έννοια του ορίου κατά την αναζήτηση του αθροίσματος των άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο απολύτως μικρότερο της μονάδας.

Επίσης γίνεται αναφορά σε θέματα οικονομικής φύσης, όπως ο ανατοκισμός, οι ίσες καταθέσεις και η χρεολυσία, που αντιμετωπίζονται με την βοήθεια των γεωμετρικών προόδων.

Ειδικότερα, οι στόχοι που επιδιώκονται κατά παράγραφο είναι:

3.1: Οι μαθητές πρέπει:

i) Να κατανοήσουν την έννοια της ακολουθίας και τη σχετική με αυτή ορολογία.

ii) Να μπορούν να βρίσκουν τους όρους ακολουθίας από το γενικό της όρο ή από τον αναδρομικό της τύπο και να τους παριστάνουν γραφικά.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από την §3.1 **να μη διδαχτούν** οι ασκήσεις της Β΄ ομάδας της σελίδας 93.

3.2 και 3.3: Οι μαθητές πρέπει:

i) Να μπορούν να διακρίνουν αν μια ακολουθία είναι αριθμητική ή γεωμετρική πρόοδος με τον υπολογισμό της διαφοράς $a_{\nu+1}-a_\nu$ και του λογού $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ αντιστοίχως.

ii) Να μπορούν να βρίσκουν το νιοστό όρο μιας προόδου όταν δίνονται επαρκή στοιχεία και να επιλύουν σχετικές ασκήσεις.

iii) Να κατανοήσουν τις έννοιες αριθμητικός μέσος - γεωμετρικός μέσος και να επιλύουν, σχετικές με αυτά, απλές ασκήσεις.

iv) να μπορούν να αποδείξουν τους τύπους που δίνουν το ά-θροισμα ν διαδοχικών όρων, μιας αριθμητικής και μιας γεω-μετρικής προόδου και να επιλύουν προβλήματα και ασκή-σεις με την βοήθεια αυτών των τύπων.

3.4: Η παράγραφος αυτή **δε θα διδαχτεί**.

3.5: Οι μαθητές πρέπει:

i) Να κατανοήσουν τις έννοιες:

α) Άθροισμα των απείρων όρων γεωμετρικής προόδου,

β) Όριο του S_ν, όταν το ν τείνει στο $+\infty$

ii) Να κατανοήσουν τη διαδικασία με την οποία προκύπτει ο τύ-πος $S=\frac{a_1}{1-\lambda},\ |\lambda|<1$ και να τον εφαρμόζουν σε προβλήματα και ασκήσεις.

iii) Να προσεγγίσουν την έννοια του ορίου μέσα από προβλήμα-τα και παραδείγματα που θα παρουσιάσει ο διδάσκων στην τά-ξη.

Κεφάλαιο 4. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 12 διδακτικές ώρες.

Στην αρχή του κεφαλαίου συμπληρώνεται ο ορισμός της δύ-ναμης πραγματικού αριθμού με την εισαγωγή της έννοιας της δύναμης με εκθέτη ρητό και άρρητο αριθμό.

Στη συνέχεια ορίζεται η εκθετική συνάρτηση με βάση το $\alpha>0$, διατυπώνονται οι βασικές της ιδιότητες και τονίζεται η ση-μασία της εκθετικής συνάρτησης $y=e^x$ ως μοντέλου για την περιγραφή φαινομένων σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους. Για παράδειγμα, στη Φυσική η εκθετική συνάρτηση περιγράφει διαδικασίες διάσπασης και απόσβεσης, στην Οικονομία και Βιολογία αυξητικές διαδικασίες κτλ.

Τέλος, ορίζεται η έννοια του λογάριθμου και της λογαριθμι-κής συνάρτησης.

Οι λογάριθμοι έχουν χάσει βέβαια την εξέχουσα θέση που είχαν άλλοτε στους υπολογισμούς. Παραμένει όμως τεράστια η σημασία των δεκαδικών και νεπέριων λογαρίθμων για εφαρμο-γές στις διάφορες επιστήμες όπως είναι η Φυσική, η Χημεία, η Σεισμολογία, η Αστρονομία κτλ. Επιβάλλεται λοιπόν και εδώ, όπως και στην εκθετική συνάρτηση, η διδασκαλία να έχει σαφή προσανατολισμό προς τις εφαρμογές. Αν οι μαθητές δε διαθέτουν «επιστημονικό υπολογιστή τσέπης» να δίνονται οι τιμές των λογαρίθμων που ενδεχομένως θα χρειαστούν στις διάφορες ε-φαρμογές.

Ειδικότερα, οι στόχοι που επιδιώκονται κατά παράγραφο είναι:

4.1: Οι μαθητές πρέπει:

i) Να κατανοήσουν τη διαδικασία με την οποία ορίζονται δυνάμεις με άρρητο εκθέτη και να μπορούν να υπολογίζουν τέτοιες δυνάμεις με την βοήθεια υπολογιστή τσέπης.

ii) Να γνωρίζουν την εκθετική συνάρτηση και τις βασικές της ιδιότητες και να μπορούν να τη σχεδιάζουν.

iii) Να μπορούν να επιλύουν απλές εκθετικές εξισώσεις-ανιώσεις και απλά εκθετικά συστήματα.

iv) Να μπορούν να περιγράφουν τη διαδικασία ορισμού του αριθμού e και να εξοικειωθούν στην επίλυση προβλημάτων εκθετικής μεταβολής.

4.2: Οι μαθητές πρέπει:

i) Να καταλάβουν ότι ο $log_a\theta,\ \theta>0,$ είναι η λύση της εξίσωσης $a^x=\theta,$ δηλαδή ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$$a^x=\theta \Leftrightarrow x=\log_a\theta$$

και ειδικότερα ότι:

$$10^x=\theta \Leftrightarrow x=\log\theta \text{ ή } e^x=\theta \Leftrightarrow x=\ln\theta$$

ii) Να γνωρίζουν ότι:

$$10^{\log\theta}=\theta,\quad log10^x=x,\quad e^{\ln\theta}=\theta,\quad \ln e^x=x, \text{ και } a^x=e^{xlna}$$

i) Να γνωρίζουν τις ιδιότητες των λογαρίθμων, να μπορούν να τις αποδεικνύουν και να τις εφαρμόζουν.

iv) Να γνωρίζουν ότι ο υπολογισμός του λογάριθμου ενός αριθμού θ, ως προς οποιαδήποτε βάση α, ανάγεται˙ στον υπολογισμό του δεκαδικού ή του νεπέριου λογάριθμου του αριθμού αυτού σύμφωνα με τους τύπους

$$log_a\theta=\frac{log\theta}{loga} \text{ και } log_a\theta=\frac{ln\theta}{lna}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από την §4.2 **να μη διδαχτούν**:

- Η απόδειξη του τύπου αλλαγής βάσης λογαρίθμων και
- Οι ασκήσεις που αναφέρονται σε λογάριθμους **με βάση διαφορετική του 10 και του e**.

4.3. Οι μαθητές πρέπει:

i) Να γνωρίζουν ότι η λογαριθμική συνάρτηση με βάση 10 είναι η συνάρτηση με την οποία κάθε θετικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στον δεκαδικό του λογάριθμο, ενώ η λογαριθμική συνάρτηση με βάση e είναι η συνάρτηση με την οποία κάθε θετικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο φυσικό του λογάριθμο.

ii) Να γνωρίζουν τις ιδιότητες των λογαριθμικών συναρτήσεων με βάσεις 10 και e και να μπορούν να τις σχεδιάζουν.

iii) Να μπορούν να επιλύουν απλές λογαριθμικές εξισώσεις και λογαριθμικά συστήματα με βάσεις 10 και e.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η διδασκαλία της §4.3 **να περιοριστεί** στις λογαριθμικές συναρτήσεις με **βάσεις 10 και e**.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Κατά το σχολικό έτος 2007-2008 θα διδαχτεί το βιβλίο Ευκλείδεια Γεωμετρία των Αργυροπούλου Η., Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάτη Σ. και Σίδερη Π. Το βιβλίο αυτό συνοδεύεται και από βιβλίο του καθηγητή, στο οποίο υπάρχουν αναλυτικές οδηγίες για την διδασκαλία. Από το βιβλίο θα διδαχθούν στη Β’ τάξη του Γενικού Λυκείου τα κεφάλαια 9-13.

Πριν τη διδασκαλία των κεφαλαίων 9-13 και το αργότερο **μέχρι 15 Οκτωβρίου** θα πρέπει να έχει ολοκληρωθεί η διδασκαλία των εννοιών που είναι απαραίτητες για τη διδασκαλία της διδακτέας ύλης της Β΄ Λυκείου.

Στη συνέχεια προτείνεται μια ενδεικτική κατανομή των ωρών διδασκαλίας ανά κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: (Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες). **Δε θα διδαχτούν** η §9.6 και οι αποδείξεις του Θεωρήματος ΙΙ της §9.4, της εφαρμογής 2 της §9.4.

Cabri II, Το Πυθαγόρειο θεώρημα σελ. 49 (αφορά τη §9.2 σχολ. βιβλίου), Γενίκευση Πυθαγόρειου θεωρήματος σελ. 49 (αφορά τη §9.4 σχολ. βιβλίου), Δύναμη σημείου ως προς κύκλο σελ. 57 (αφορά τη §9.7 σχολ. βιβλίου)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10: (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες). Δε θα διδαχτεί η §10.6 και η απόδειξη του τύπου 3 της §10.4.

Cabri II, Εμβαδόν ορθογωνίου σελ. 63 (αφορά τη §10.3 σχολ. βιβλίου), Εμβαδόν τριγώνου σελ. 69 (αφορά τη §10.3 σχολ. βιβλίου), Εμβαδόν τραπεζίου σελ.73 (αφορά τη §10.3 σχολ. βιβλίου).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11: (Προτείνεται να διατεθούν 8 διδακτικές ώρες). **Δε θα διδαχτεί** η απόδειξη των Θεωρημάτων της §11.2 και οι εφαρμογές ΙΙ και ΙΙΙ της §11.3.

Cabri II, Κανονικά πολύγωνα-Ομοιότητα σελ. 79 (αφορά τη §11.1 σχολ. βιβλίου), Κανονικά πολύγωνα σελ. 75 (αφορά τις §11.1-11.3 σχολ. βιβλίου) Μήκος τόξου και κύκλου σελ. 81 (αφορά τη §11.5 σχολ. βιβλίου), Εμβαδόν τόξου και κύκλου σελ. 83 (αφορά τη §11.7 σχολ. βιβλίου)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12: (Προτείνεται να διατεθούν 11 διδακτικές ώρες). Δε θα διδαχτούν οι αποδείξεις των θεωρημάτων Ι, ΙΙ και ΙΙΙ της §12.5 και των θεωρημάτων ΙΙ και ΙΙΙ της § 12.7. Στη §12.6 να δοθούν μόνο οι ορισμοί και οι εφαρμογές χωρίς αποδείξεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13: (Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες). Στις § 13.4-13.18 να δοθούν μόνο οι τύποι των εμβαδών και όγκων. Η § 13.19 να μη διδαχθεί.

Να μη διδαχθούν οι ασκήσεις:
Σύνθετα θέματα:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: σελ. 186 ασκήσεις 4, 6
σελ. 194 ασκήσεις 1, 2, 3
σελ. 199 ασκήσεις 4, 5
σελ. 204 ασκήσεις 3, 4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10: σελ. 218 ασκήσεις 1, 5
σελ. 221 ασκήσεις 1, 2
σελ. 225 ασκήσεις 1, 2, 3, 4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11: σελ. 237 άσκηση 1
σελ. 238 ασκήσεις 2, 3
σελ. 242 ασκήσεις 1, 2, 3
σελ. 245 άσκηση 2
σελ. 251 άσκηση 4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12: Να μη διδαχθούν τα σύνθετα θέματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13: Να μη διδαχθούν τα σύνθετα θέματα. Από τις υπόλοιπες ομάδες ασκήσεων να διδαχθούν εκείνες μόνο τις οποίες ο διδάσκων θεωρεί απαραίτητες για την κατανόηση της ύλης, των όγκων και εμβαδών.

ΓΕΝΙΚΗ ΟΔΗΓΙΑ:
Ο διδάσκων αν θεωρεί αναγκαίο για διδακτικούς σκοπούς μπορεί να διδάξει και κάποιες από τις ασκήσεις που έχουν εξαιρεθεί από τη διδακτέα ύλη (4-5 το πολύ σε όλη την έκταση της ύλης).

II. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ώρες: 3 εβδομαδιαίως

Θα χρησιμοποιηθεί το βιβλίο «Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης» Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου, των Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α. Η ύλη του μαθήματος, η οποία περιέχεται στο αντίστοιχο διδακτικό βιβλίο, είναι εκείνη που εκπόνησε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο για τις κατευθύνσεις αυτές.

Για την πληρέστερη ενημέρωση των διδασκόντων δίνονται ειδικότερες οδηγίες για κάθε κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 1. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 22 διδακτικές ώρες.

Τα διανύσματα έχουν ιδιαίτερη σημασία όχι μόνο για τα Μαθηματικά, αλλά και για πολλές άλλες επιστήμες, αφού προσφέρουν τη δυνατότητα μαθηματικοποίησης μεγεθών τα οποία δεν ορίζονται μόνο με την αριθμητική τιμή τους. Εξάλλου, η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ενός σημείου του επιπέδου με ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών οδηγεί στην «αλγεβροποίηση» της Γεωμετρίας, δηλαδή στη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων με αλγεβρικές μεθόδους. Ειδικότερα:

Το διάνυσμα εισάγεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα, και δεν γίνεται καμιά αναφορά στα ελεύθερα ή στα εφαρμοστά διανύσματα. Όμως, με την εισαγωγή της έννοιας της ισότητας των διανυσμάτων, κάθε διάνυσμα παραμένει «αναλλοίωτο» αν μετακινηθεί παράλληλα προς την αρχική του θέση. Έτσι, κάθε διάνυσμα του χώρου είναι ίσο με ένα μοναδικό διάνυσμα που έχει αρχή ένα σταθερό σημείο Ο (σημείο αναφοράς).

Ως γωνία δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ ορίζεται η κυρτή γωνία $A\hat{O}B.$ Επομένως, αν $\theta = A\hat{O}B,$ τότε $0\leq\theta\leq\pi.$ Η επιλογή αυτή διευκολύνει το διανυσματικό λογισμό και δεν επιβαρύνει τους μαθητές με νέο συμβολισμό.

Οι πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού διανύσματος με αριθμό, καθώς και οι βασικές τους ιδιότητες, παρουσιάζονται με τη βοήθεια της γεωμετρικής εποπτείας και τονίζεται ιδιαίτερα ότι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μπορεί να γραφτεί ως διαφορά $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ όπου Ο είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του χώρου. Στην τριγωνική ανισότητα

$$\left||\vec{a}|-|\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$$

να τονιστεί ότι η αριστερή ισότητα ισχύει όταν τα διανύσματα είναι **αντίρροπα**, ενώ η δεξιά ισότητα όταν τα διανύσματα είναι **ομόρροπα**. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη παραλληλίας δυο διανυσμάτων:

$$\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta} \quad (\text{όταν } \vec{\beta}\neq\vec{0})$$

χρησιμοποιείται για την απόδειξη της συγγραμμικότητας τριών σημείων (π.χ. άσκηση 6Α΄ ομάδας §1.3). Τέλος, δεν γίνεται αναφορά στον απλό λόγο στον οποίο διαιρείται ένα διάνυσμα από ένα σημείο. Ο απλός λόγος δεν περιλαμβάνεται στη διδακτέα ύλη, αλλά είναι αντικείμενο διαπραγμάτευσης στην άσκηση14 Β΄ ομάδας §1.3.

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος ένα διάνυσμα συμβολίζεται ως ένα διατεταγμένο ζεύγος με στοιχεία τις συντεταγμένες του και έτσι διευκολύνεται ο λογισμός των διανυσμάτων. Με αφορμή την απόδειξη της ικανής και αναγκαίας συνθήκης παραλληλίας δυο διανυσμάτων $\vec{a}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$: $\vec{a}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0$

εισάγεται ο συμβολισμός det $(\vec{a},\vec{\beta})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ ο οποίος θα χρησιμοποιηθεί και για την έκφραση του εμβαδού τριγώνου.

Τέλος, ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων και αποδεικνύονται οι βασικές του ιδιότητες. Το εσωτερικό γινόμενο αποτελεί τη σημαντικότερη ενότητα του κεφαλαίου των διανυσμάτων και αυτό φαίνεται από την ποικιλία των εφαρμογών του.

Οι διάφορες εκφράσεις του εσωτερικού γινομένου, επιτρέπουν τον υπολογισμό του μέτρου ενός διανύσματος και της γωνίας διανυσμάτων, καθώς και την ευκολότερη απόδειξη πολλών προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται:

- Να εξοικειωθούν οι μαθητές με το λογισμό των διανυσμάτων, ώστε να ανταποκρίνονται επιτυχώς στις απαιτήσεις άλλων κλάδων που χρησιμοποιούν διανύσματα (Κινηματική, Ηλεκτρισμός κτλ.)
- Να προσεγγίζουν οι μαθητές γεωμετρικά θέματα μέσω των διανυσμάτων, μια προσέγγιση που σε πολλές περιπτώσεις διευκολύνει τη μελέτη και την εξαγωγή των συμπερασμάτων.
- Να μπορούν οι μαθητές να χρησιμοποιούν τα διανύσματα στη μελέτη θεμάτων της Αναλυτικής Γεωμετρίας και των μιγαδικών αριθμών.

Τέλος, πρέπει να τονιστεί ότι, όπως έχει αποδείξει η διδακτική πράξη, το κεφάλαιο των διανυσμάτων είναι μια ενότητα το περιεχόμενο της οποίας δύσκολα αφομοιώνουν οι μαθητές. Γι' αυτό απαιτείται εποπτική παρουσίαση των εννοιών και προσπάθεια ενεργού συμμετοχής των μαθητών.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από το κεφάλαιο 1 **δε θα διδαχτούν** οι εφαρμογές 1 και 2 της §1.3 και οι αντίστοιχες ασκήσεις.

Κεφάλαιο 2. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 10 διδακτικές ώρες.

Ένα μεγάλο μέρος του κεφαλαίου αυτού το έχουν διδαχτεί οι μαθητές σε προηγούμενες τάξεις, αλλά εδώ τα θέματα που σχετίζονται με την ευθεία παρουσιάζονται συστηματικότερα και με μεγαλύτερη πληρότητα και ακρίβεια. Ειδικότερα:

Τονίζεται η σημασία του συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας με τη βοήθεια του οποίου διατυπώνονται οι συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας δυο ευθειών, και προσδιορίζονται οι διάφορες μορφές της εξίσωσης ευθείας.

Το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ αποτελείται από την κατακόρυφη ευθεία $x = x_0$ και τις μη κατακόρυφες ευθείες $y - y_0 = \lambda(x - x_0), \lambda \in \mathbb{R}$. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από δυο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με

$x_1 \neq x_2$, δίνεται μόνο με τον τύπο $y - y_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_0)$, ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από ένα σημείο και έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης. Δεν αναφέρεται ο αντίστοιχος τύπος με την ορίζουσα 3x3, αφού οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί τις ορίζουσες και τις ιδιότητες τους. Το πρόβλημα της συγγραμμικότητας τριών σημείων αντιμετωπίζεται διανυσματικά ή εξετάζεται αν η εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα δυο σημεία διέρχεται και από το τρίτο σημείο.

Δεν περιλαμβάνεται στη διδακτέα ύλη η σχέση της γωνίας δυο ευθειών και των συντελεστών διεύθυνσής τους. Ο προσδιορισμός της γωνίας δυο ευθειών γίνεται με τον προσδιορισμό της γωνίας αντίστοιχων παράλληλων διανυσμάτων.

Για το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ του οποίου δίνονται οι κορυφές $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ δεν χρησιμοποιείται ο τύπος της ορίζουσας 3x3, αλλά ο τύπος:

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \psi_2 - \psi_1 \\ x_3 - x_1 & \psi_3 - \psi_1 \end{vmatrix}\right|$$

Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να γνωρίσουν την εξίσωση της ευθείας και να μελετήσουν με αλγεβρικές μεθόδους τις ιδιότητες της στο επίπεδο.
- Να εξοικειωθούν με τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας.
- Να κατανοήσουν τις δυνατότητες και τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας για την αντιμετώπιση σύνθετων προβλημάτων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από το κεφάλαιο 2 **δε θα διδαχτούν** οι αποδείξεις των τύπων της απόστασης σημείου από ευθεία και του εμβαδού τριγώνου.

Κεφάλαιο 3. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 30 διδακτικές ώρες.

Οι κωνικές τομές είχαν μελετηθεί από τους αρχαίους Έλληνες, οι οποίοι είχαν ανακαλύψει τις γεωμετρικές τους ιδιότητες, πολύ πριν από την εισαγωγή των μεθόδων της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Σήμερα το ενδιαφέρον για τη μελέτη των κωνικών τομών είναι αυξημένο, λόγω του μεγάλου αριθμού των θεωρητικών και πρακτικών εφαρμογών τους (τροχιές πλανητών, κομητών, βλημάτων, ηλεκτρονίων κτλ.). Ειδικότερα:

Προσδιορίζεται η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρή των αξόνων, καθώς και οι παραμετρικές εξισώσεις του. Με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου υπολογίζονται οι συντεταγμένες του κέντρου και η ακτίνα του κύκλου που παριστάνει η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0.$ Η εξίσωση της εφαπτομένης ενός κύκλου σε ένα σημείο του προσδιορίζεται από την ιδιότητά της να είναι κάθετη στην ακτίνα που αντιστοιχεί στο σημείο επαφής.

Δίνεται ο ορισμός της παραβολής και βρίσκεται η εξίσωση της με άξονα των τετμημένων τον άξονα συμμετρίας της και άξονα των τεταγμένων τη μεσοκάθετη της απόστασης της εστίας της από τη διευθετούσα. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής σε ένα σημείο της M_1, ορίζεται ως η εξίσωση της ευθείας που αποτελεί την οριακή θέση μιας τέμνουσας M_1M_2 της παραβολής, καθώς το M_2 κινούμενο επί της παραβολής τείνει να συμπέσει με το M_1, (αργότερα στη Γ΄ τάξη η αναλυτική εξίσωση της εφαπτομένης των κωνικών τομών θα προσδιοριστεί και με τις μεθόδους της Ανάλυσης).

Αποδεικνύεται τέλος η ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής η οποία έχει πολλές πρακτικές εφαρμογές.

Ακολουθεί η έλλειψη, για την εξίσωση της οποίας δεν αποδεικνύεται το αντίστροφο. Δίνονται και οι παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης, οι οποίες βοηθούν στο γεωμετρικό προσδιορισμό των σημείων της. Δεν αποδεικνύεται ο τύπος της εξίσωσης της εφαπτομένης της έλλειψης αλλά ορίζεται κατ' αναλογία προς την εφαπτομένη της παραβολής. Τονίζεται ιδιαίτερα η έννοια της εκκεντρότητας και η σημασία της για τη μορφή της έλλειψης. Τέλος (χωρίς απόδειξη) αναφέρεται η ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης και οι εφαρμογές της στις ακουστικές στοές και στη λιθοθρυψία.

Με ανάλογο τρόπο παρουσιάζονται και τα σχετικά με την υπερβολή. Για τον προσδιορισμό των ασύμπτωτων της υπερβολής δεν γίνεται χρήση της αυστηρής έννοιας του ορίου και του συμβολισμού του, άλλο χρησιμοποιείται διαισθητικά η έννοια αυτή.

Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τη μελέτη της εξίσωσης $Ax^2+By^2+\Gamma\chi+\Delta y+E=0.$ Με τη βοήθεια κατάλληλης μεταφοράς των αξόνων προσδιορίζεται η μορφή της κωνικής που παριστάνει η εξίσωση. Επίσης, με την επίλυση του συστήματος

$$\begin{cases} y=\lambda\chi+\beta \\ \mathrm{A}\chi^2+\mathrm{B}y^2+\Gamma x+\Delta y+E=0 \end{cases}$$

εξετάζεται η σχετική θέση ευθείας και κωνικής.

Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται:

- Να διευρύνουν οι μαθητές το πεδίο των γεωμετρικών τους γνώσεων και με άλλη κατηγορία γραμμών εκτός της ευθείας και του κύκλου.
- Να γνωρίσουν οι μαθητές τις βασικές ιδιότητες των κωνικών τομών. Να έρθουν οι μαθητές σε επαφή με την ποικιλία των εφαρμογών των κωνικών τομών

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από το κεφάλαιο 3 **δε θα διδαχτούν**:

- Οι αποδείξεις των εξισώσεων της παραβολής, της έλλειψης και της υπερβολής.
- Η απόδειξη του τύπου της εφαπτόμενης της παραβολής και των ασύμπτωτων της υπερβολής.
- Οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου και της έλλειψης και οι αντίστοιχες εφαρμογές και ασκήσεις.
- Η εφαρμογή 1 της σελίδας 96, η εφαρμογή της σελίδας 107 και η εφαρμογή 2 της σελίδας 110.

Κεφάλαιο 4. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 13 διδακτικές ώρες.

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί μια εισαγωγή στη Θεωρία Αριθμών, στην ανάπτυξη της οποίας μεγάλη είναι η συμβολή των Αρχαίων Ελλήνων.

Παρά το γεγονός ότι το περιεχόμενο του κεφαλαίου αυτού κατά το μεγαλύτερο μέρος του είναι θεωρητικό και αφηρημένο, ωστόσο δεν αναμένεται η διδασκαλία του να παρουσιάσει ιδιαίτερες δυσκολίες, αφού:

i) Για την παρουσίαση του δεν απαιτούνται, αλλά και δεν προστίθενται, νέες έννοιες πέραν των όσων περίπου γνωρίζουν οι μαθητές από το Δημοτικό και το Γυμνάσιο.

ii) Όλα τα προβλήματα που τίθενται είναι πλήρως κατανοητά από το σύνολο των μαθητών.

iii) Αποτελεί ίσως τον πιο ελκυστικό κλάδο της μαθηματικής επιστήμης και αναμένεται να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών και να διεγείρει την πνευματική περιέργεια και την ερευνητική τους διάθεση.

Ειδικότερα:

Εισάγεται η αποδεικτική μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής για την οποία πρέπει να γίνει κατανοητό ότι η αλήθεια ενός ισχυρισμού P(ν) για ν=1 και η μετάβαση από την αλήθεια του P(ν) στην αλήθεια του P(ν+1) διασφαλίζουν την αλήθεια του ισχυρισμού για κάθε θετικό ακέραιο ν.

Αποδεικνύεται η γνωστή ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης μόνο στην περίπτωση των θετικών ακεραίων, ενώ για τις άλλες περιπτώσεις παρατίθενται κατάλληλα παραδείγματα. Η ευκλείδεια διαίρεση μας επιτρέπει να διαμερίσουμε το σύνολο των ακεραίων σε υποσύνολα, σύμφωνα με το υπόλοιπο που **αφήνουν** όταν διαιρεθούν με έναν ορισμένο ακέραιο. Στο γεγονός αυτό στηρίζεται η § 4. 7 για τους ισοϋπόλοιπους αριθμούς.

Η έννοια της διαιρετότητας παρουσιάζεται ως η ειδική περίπτωση της ευκλείδειας διαίρεσης που έχει υπόλοιπο 0.

Ορίζεται ο Μ.Κ.Δ. δυο φυσικών αριθμών και αποδεικνύεται η ιδιότητα (α, β) = (β, υ), όπου υ το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με τον β. Η ιδιότητα αυτή είναι η βάση για τον αλγόριθμο του Ευκλείδη και για τη γραμμική έκφραση του Μ.Κ.Δ. Επίσης, ορίζεται το Ε.Κ.Π. δυο φυσικών αριθμών και αποδεικνύεται η σχέση (α, β) · [α, β] = αβ. Ο προσδιορισμός του Ε.Κ.Π. δυο φυσικών αριθμών διευκολύνεται από τη σχέση [κα, κβ] = κ[α, β] (εφαρμογή σελ. 159).

Η μελέτη των πρώτων αριθμών παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αφού κάθε ακέραιος αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Αποτελούν δηλαδή οι πρώτοι αριθμοί τα «δομικά υλικά με τα οποία κατασκευάζονται οι άλλοι φυσικοί αριθμοί. Ο προσδιορισμός των πρώτων αριθμών που δεν υπερβαίνουν έναν ορισμένο φυσικό, γίνεται με το «κόσκινο του Ερατοσθένη. Η απόδειξη της ύπαρξης άπειρου πλήθους πρώτων αριθμών, που οφείλεται στον Ευκλείδη, αποτελεί μέχρι σήμερα υπόδειγμα μαθηματικής κομψότητας.

Η ειδική λύση της διοφαντικής εξίσωσης $ax+\beta y=\gamma$ βρίσκεται από τη γραμμική έκφραση του Μ.Κ.Δ. των α και β. Οι τύποι που εκφράζουν τις λύσεις της εξίσωσης αυτής παίρνουν την απλούστερη μορφή $x=x_0+\beta t$ και $y=y_0-at$ όταν (α, β) = 1. Γι' αυτό αν $(a,\beta)|\gamma$ και $(\alpha,\beta)\neq 1,$ είναι σκόπιμο να διαιρέσουμε τα μέλη της $ax+\beta y=\gamma$ με (α,β), οπότε αυτή ανάγεται σε μια ισοδύναμη της οποίας οι συντελεστές των x και y είναι πρώτοι προς αλλήλους.

Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με το λογισμό των ισοϋπόλοιπων αριθμών ο οποίος διευκολύνει σημαντικά τη μελέτη της διαιρετότητας των ακεραίων.

Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται η άσκηση των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία και η κατανόηση της έννοιας του αλγόριθμου.

Με την επίλυση των ασκήσεων και των προβλημάτων, αυτού ιδιαίτερα του κεφαλαίου, θα δοθεί η ευκαιρία εξάσκησης των μαθητών:

- Στη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.
- Στην ευθεία απόδειξη.
- Στη μέθοδο της «εις άτοπον απαγωγής»

αλλά και σε ευρετικές διαδικασίες οι οποίες απαιτούνται για την επίλυση προβλήματος, που σύμφωνα με τις επικρατούσες απόψεις στη διδακτική των Μαθηματικών αποτελεί το πλαίσιο μέσα στο οποίο συντελείται η διδασκαλία και η μάθηση.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από το κεφάλαιο 4 **δεν θα διδαχθούν**:

- οι ασκήσεις της Β΄ Ομάδας της §4.1
- οι ασκήσεις 5 και 7 της Β΄ Ομάδας της §4.3.

Από τις υπόλοιπες ασκήσεις των Α΄ και Β΄ Ομάδων προτείνεται να διδαχθούν με επιλογή του διδάσκοντος όσες κρίνει ότι είναι απαραίτητες για την εμπέδωση της ύλης.

Επίσης **δεν θα διδαχθούν** οι παράγραφοι:

- 4.4 Μέγιστος κοινός διαιρέτης – Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο
- 4.5 Πρώτοι αριθμοί
- 4.6 Γραμμική διοφαντική εξίσωση
- 4.7 Ισοϋπόλοιποι αριθμοί.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ «ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ»

Κεφάλαιο 1

1. (i)Σ (ii)Λ (iii)Λ (iv)Σ (v)Λ (vi)Σ

2. (i) $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$, (ii) $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$, (iii) $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$, (iv) $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$, (v) $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$, (vi) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$,
(vii) $\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}$, (viii) $\vec{0}$, (ix) $\vec{0}$

3. i) $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$, (ii) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, (iii) $2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, (iv) $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$, (v) $2\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$,

4. (ii)

5. (i)(–3,2), (ii)(3,–2), (iii)(3,2) (iv) (–2,–3)

6. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,4),\ \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=(-7-3),\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}=(-6,4),\ \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=(0,-4),\ \overrightarrow{\mathrm{BE}}=(-9,0)$

7. $\mathrm{AB}\to\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right),\ \mathrm{B\Gamma}\to\left(-\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right),\ \mathrm{\Gamma\Delta}\to(0,-3),\ \mathrm{A\Gamma}\to(0,0)$

8. (i)4, (ii)4

9. (i)0 (ii)α^2, (iii)0, (iv) $\frac{a^2}{2}$, (v) α^2, (vi) –α^2

10. (i)6, (ii) $3\sqrt{3}$, (iii)3, (iv)0, (v)–3 (vi) $-3\sqrt{3}$, (vii)–6

11. Γ

12. 1. Οξεία, 2. Αμβλεία, 3. Οξεία, 4. Αμβλεία, 5. Ορθή, 6. Ορθή

13. (iii)

Κεφάλαιο 2

1. • Ψ •Α •Ψ •Α •Ψ

2. $A\to x=2\quad B\to y=3,\ 3x-2y=0\quad \Gamma\to 2x-5y=-8\quad \Delta\to y=3$
$E\to 3x-2y=0\quad Z\to x=2$

3. • Γ(3,2) • $B\neq 0$ • x+y=8

4. • y=3x+1, y=3x–2 • $y=-\frac{1}{3}x+8,\ y=-\frac{1}{3}x+10$ • $y=3x$
• $y=-\frac{1}{3}x$

5. ε_3

6. Γ

Κεφάλαιο 3

1. Γ **2.** Α **3.** Γ **4.** Γ **5.** Γ **6.** Γ **7.** Α **8.** Γ **9.** Β **10.** Γ **11.** Β
12. • $a^2+\beta^2=\rho^2$ • β=0 •α=0 •ρ=β •ρ=α •α=β=ρ
13. • Ζεύγος ευθειών • Κύκλος • Παραβολή • Έλλειψη
• Υπερβολή
14. • Έλλειψη • Κύκλος • Έλλειψη • Υπερβολή
• Ισοσκελής Υπερβολή

Κεφάλαιο 4

1. (i)Α (ii)Ψ (iii) Α
2. (i) Α (ii) Ψ (iii) Ψ (iv) Ψ (v) Ψ
3. (i) Ψ (ii) Α (iii) Α (iv) Ψ
4. (i) Α (ii) Ψ
5. (i)Ψ (ii)Α
6. (i) Ψ (ii) Α
7. (i) Ψ (ii) Α
8. (i) Ψ (ii) Ψ
9. (i) Ψ (ii) Α (iii) Α
1.Δ 2.Γ 3. Γ 4. Β 5. Β 6. Γ