Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ώρες: 2 εβδομαδιαίως

Θα χρησιμοποιηθεί το βιβλίο "Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής" των Αδαμόπουλου Α., Δαμιανού Χ., και Σβέρκου Α. Κατά τη συγγραφή του καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια, ώστε το περιεχόμενό του να ανταποκρίνεται στις δυνατότητες των μαθητών για τους οποίους προορίζεται και να είναι δυνατή η ολοκλήρωση της διδασκαλίας του στο χρόνο που προβλέπεται από το αντίστοιχο ωρολόγιο πρόγραμμα.

Η ύλη του βιβλίου περιλαμβάνει τα κεφάλαια:

1°: Διαφορικός Λογισμός
2°: Στατιστική
3°: Πιθανότητες.

Το κάθε κεφάλαιο αρχίζει με μια σύντομη εισαγωγή, η οποία αναφέρεται στην ιστορική εξέλιξη και στη χρησιμότητα του αντίστοιχου κλάδου. Το γεγονός ότι το βιβλίο απευθύνεται σε όλους τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου, ανεξάρτητα από την κατεύθυνση που θα ακολουθήσουν, έχει επηρεάσει σημαντικά τη διάταξη της ύλης, τον τρόπο με τον οποίο αυτή παρουσιάζεται, καθώς και την επιλογή των ασκήσεων. Έτσι:

- Στην ανάπτυξη των κεφαλαίων ακολουθείται η ιστορική εξέλιξη των εννοιών και η εποπτική παρουσίαση τους.
- Αποφεύγονται οι αυστηρές αποδείξεις, αλλά μέσα από κατάλληλα παραδείγματα και εφαρμογές γίνεται προσπάθεια να εξηγηθούν οι διάφορες έννοιες και να γίνει κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο αυτές χρησιμοποιούνται.
- Δε συμπεριλαμβάνονται ασκήσεις των οποίων η λύση παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία ούτε ασκήσεις που λύνονται με τεχνάσματα. Αντιθέτως, έγινε προσπάθεια να επιλεγούν ασκήσεις και προβλήματα με τα οποία οι μαθητές εμπεδώνουν τη θεωρία, καλλιεργούν τη λογική και την κριτική σκέψη τους και ασκούνται στην οργάνωση των δεδομένων.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου έχουν προστεθεί "ερωτήσεις κατανόησης", οι οποίες επιδέχονται σύντομη απάντηση και στοχεύουν στην κατανόηση της θεωρίας και στη διευκρίνιση ορισμένων εννοιών. Οι ερωτήσεις αυτές σκόπιμο είναι να δίνονται στους μαθητές μαζί με την επεξεργασία της αντίστοιχης παραγράφου.

Θα πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα ότι το διδακτικό βιβλίο είναι ένα μέσο διδασκαλίας και δεν μπορεί να υποκαταστήσει τον διδάσκοντα. Ένας καθηγητής που προετοιμάζεται με επιμέλεια και προβληματίζεται συνεχώς για τον προσφορότερο τρόπο μετάδοσης της γνώσης στους μαθητές του είναι βέβαιο ότι θα επιτύχει σε μεγάλο βαθμό τους γενικούς και ειδικούς στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών.

Στις ειδικές οδηγίες κατά κεφάλαιο που ακολουθούν, δίνονται πρόσθετα θεωρητικά στοιχεία, τα οποία πρέπει να έχει υπόψη του ο διδάσκων χωρίς να απαιτείται η διδασκαλία τους στους μαθητές, καθώς και ένα ενδεικτικό χρονοδιάγραμμα, που θα βοηθήσει τον διδάσκοντα στον προγραμματισμό της διδασκαλίας του.

Κεφάλαιο 1. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 15 διδακτικές ώρες.

Σε όλο το κεφάλαιο γίνεται ευρεία χρήση της εποπτείας και των παραδειγμάτων για την ερμηνεία και για την κατανόηση των διάφορων εννοιών και προτάσεων.

Στην αρχή της §**1.1** γίνεται μια σύντομη αναφορά στην έννοια της συνάρτησης και των ιδιοτήτων της. Πολλές από τις έννοιες και τους συμβολισμούς αυτού του κεφαλαίου είναι ήδη γνωστά στους μαθητές από προηγούμενες τάξεις γι' αυτό και η διδασκαλία τους δεν πρέπει να στοχεύει στην αναλυτική παρουσίαση τους, αλλά στο να τα επαναφέρουν οι μαθητές στη μνήμη τους, επειδή θα τους χρειαστούν στα επόμενα κεφάλαια.

Στην ίδια παράγραφο παρουσιάζεται μέσω παραδειγμάτων και χωρίς μαθηματική αυστηρότητα η έννοια του ορίου και γίνεται μια σύντομη αναφορά στην έννοια της συνεχούς συνάρτησης. Επισημαίνεται ότι η διδασκαλία των εννοιών αυτών δεν αποτελεί αυτοσκοπό, αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου. Δεν πρέπει επομένως να καθυστερήσει η διδασκαλία με άσκοπη "ασκησιολογία". Κατά τη διδασκαλία των εννοιών της παραγράφου αυτής, για εξοικονόμηση χρόνου, συνιστάται οι πίνακες, τα σχήματα και η ερμηνεία τους να προσφέρονται σε διαφάνειες ή σε φωτοτυπίες ή, στην περίπτωση που αυτό είναι αδύνατον, οι μαθητές να χρησιμοποιούν τα βιβλία τους.

Σχετικά με την έννοια της συνεχούς συνάρτησης αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η πρόταση $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ μας πληροφορεί ότι οι τιμές του $f(x)$ είναι πολύ κοντά στο $f(x_0)$, όταν το x είναι πολύ κοντά στο x_0. Αυτό σημαίνει ότι μικρές μεταβολές στο x έχουν ως αποτέλεσμα μόνο μικρές μεταβολές στις τιμές μιας συνεχούς συνάρτησης.

Στην §**1.2** εισάγεται η έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της. Η παράγωγος είναι ένα από τα θεμελιώδη εργαλεία των Μαθηματικών και χρησιμοποιείται σε ένα ευρύ φάσμα επιστημών.

Για τον ορισμό της παραγώγου ακολουθείται η ιστορική πορεία της εξέλιξης της έννοιας. Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι ως εφαπτομένη ενός κύκλου (O, R) σε ένα σημείο του A θα μπορούσαμε να ορίσουμε την οριακή θέση μιας τέμνουσας AM, καθώς το M κινούμενο πάνω στον κύκλο τείνει να συμπέσει με το A. Με βάση την παρατήρηση αυτή ορίζουμε ως εφαπτομένη της καμπύλης μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο της $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ την ευθεία η οποία διέρχεται από το *A* και έχει ως συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό λ= $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Δε δίνεται ο τύπος της εξίσωσης της εφαπτομένης της καμπύλης μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο της $\left(x_0, f(x_0)\right)$. Όμως, μέσα από εφαρμογές, εξηγείται ο τρόπος με τον οποίο προσδιορίζεται κάθε φορά η εφαπτομένη αυτή, αφού γνωρίζουμε ένα σημείο της και μπορούμε να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσης της. Δε γίνεται επίσης αναφορά στην έννοια της κατακόρυφης εφαπτομένης. Μαθητές με αυξημένη μαθηματική περιέργεια θα ικανοποιήσουν τις αναζητήσεις τους αυτές στα Μαθηματικά της Θετικής και της Τεχνολογικής κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου.

Στη συνέχεια, διαπιστώνεται ότι και άλλα παραδείγματα, όπως ο προσδιορισμός της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινητού, του οριακού κόστους στην Οικονομία, της ταχύτητας μιας αντίδρασης στη Χημεία κτλ., οδηγούν στον υπολογισμό ενός ορίου της μορφής $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$. Το όριο αυτό, όταν υπάρχει, ονομάζεται παράγωγος της f στο t_0. Φυσικά το πρόβλημα της εφαπτομένης και το πρόβλημα της στιγμιαίας ταχύτητας έχουν προετοιμάσει το έδαφος, ώστε να γίνει αποδεκτός και κατανοητός ο ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της και η ερμηνεία της ως ρυθμού μεταβολής.

Στην §**1.3** ορίζεται **η** (πρώτη) **παράγωγος** μιας **συνάρτησης** f. Με τον όρο **παράγωγος της** f εννοείται η συνάρτηση f', η οποία σε κάθε σημείο *x* του πεδίου ορισμού της f, όπου αυτή είναι παραγωγίσιμη, αντιστοιχίζει την παράγωγο της στο σημείο αυτό. Με ανάλογο τρόπο ορίζεται και η **δεύτερη παράγωγος** της f και ως παραδείγματα αναφέρονται η ταχύτητα ***υ(t)=x΄(t)*** και η επιτάχυνση ***α(t)=x΄΄(t)*** στην ευθύγραμμη κίνηση ενός σώματος. Ακολουθεί η παραγώγιση βασικών συναρτήσεων και οι κανόνες παραγώγισης αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου και σύνθετης συνάρτησης. Αναφέρονται μόνο οι αποδείξεις όσων τύπων και κανόνων είναι απλές.

Επισημαίνεται ότι στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις *ημx, συνx* και *εφx* το *x* εκφράζει το μέτρο μιας γωνίας σε ακτίνια (rad). Αν θ είναι το μέτρο της ίδιας γωνίας σε μοίρες, τότε

$$\eta\mu x=\eta\mu\theta^{o} \ \ \kappa\alpha\iota \ \ x=\frac{\pi}{180}\theta. \text{ Επομένως,}$$

$$(\eta\mu\theta^{0})'_{\theta}=(\eta\mu\chi)'_{\theta}=(\eta\mu\chi)'_{\chi}\cdot\chi_{\theta}'=\sigma\upsilon\nu\chi\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{180}\sigma\upsilon\nu\theta^{0}.$$

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τις άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Στην §**1.3** υλοποιείται ο κύριος στόχος της διδασκαλίας του κεφαλαίου, που είναι η χρησιμοποίηση των παραγώγων στον προσδιορισμό των ακρότατων. Όπως και στις προηγούμενες παραγράφους, έτσι και εδώ για την κατανόηση των ιδιοτήτων κυριαρχεί η γεωμετρική εποπτεία. Για να συνδεθεί καλύτερα η σχέση του πρόσημου της πρώτης παραγώγου με τα ακρότατα, μπορεί ο διδάσκων να αναφέρει παραδείγματα και από τη Φυσική. Έτσι, στο παράδειγμα της σελίδας 39 του βιβλίου μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι όταν το σώμα φτάσει στο υψηλότερο σημείο, η ταχύτητα του πρέπει να μηδενιστεί, διότι διαφορετικά το σώμα θα εξακολουθούσε να ανεβαίνει. Επομένως, βρίσκουμε ότι η χρονική στιγμή t που θα έχουμε το μέγιστο ύψος, δηλαδή το μέγιστο της συνάρτησης $h(t)=20t-5t^2$, είναι όταν $υ(t)=h'(t)=20-10t=0$. Άρα για $t=2$ έχουμε το μέγιστο ύψος, που είναι ίσο με $h(2)=40-20=20$.

Στο βιβλίο, για τον προσδιορισμό των ακρότατων, αναφέρεται και το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου. Σε πολλές περιπτώσεις το κριτήριο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί ευκολότερα από τους μαθητές, αφού συνήθως τους απαλλάσσει από την επίλυση πολύπλοκων ανισώσεων για τον προσδιορισμό του προσήμου της πρώτης παραγώγου.

Οι μέθοδοι του Διαφορικού Λογισμού για τον προσδιορισμό των ακρότατων τιμών ενός μεταβαλλόμενου μεγέθους έχουν πρακτική εφαρμογή σε πολλές περιοχές των επιστημών αλλά και της καθημερινής ζωής. Για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων αυτό που κυρίως προέχει είναι η μετατροπή του προβλήματος που είναι διατυπωμένο στην καθημερινή γλώσσα σε πρόβλημα **μεγίστου** ή **ελαχίστου** με τον ορισμό μιας συνάρτησης, της οποίας πρέπει να βρεθούν τα ακρότατα. Είναι σκόπιμο επομένως να τονιστούν με τη βοήθεια κατάλληλου προβλήματος οι αρχές "επίλυσης προβλήματος", τις οποίες έχουν γνωρίσει οι μαθητές σε προηγούμενες τάξεις, και να προσαρμοστούν στη συγκεκριμένη κατάσταση. Επισημαίνεται ότι η διαδικασία επίλυσης προβλήματος δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια συλλογή στρατηγικών, τις οποίες κάθε λογικά σκεπτόμενος άνθρωπος πρέπει να χρησιμοποιήσει προκειμένου να αντιμετωπίσει ένα πρόβλημα.

Σχετικά με την επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια του Διαφορικού Λογισμού πρέπει να αναφερθεί ότι πολλά προβλήματα μεγίστου ή ελαχίστου περιέχουν διακριτές μεταβλητές. Για παράδειγμα, ο αριθμός των παραγόμενων μονάδων ενός προϊόντος, καθώς και ο αριθμός των εργαζομένων σε ένα εργοστάσιο πρέπει να είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί. Ο Διαφορικός Λογισμός όμως δεν εφαρμόζεται απευθείας σε προβλήματα που περιέχουν διακριτές μεταβλητές. Ωστόσο, μπορούμε μερικές φορές να οδηγηθούμε στη λύση ενός τέτοιου προβλήματος υποθέτοντας ότι κάθε μεταβλητή παίρνει τιμές σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή σε κάποιο διάστημα του, ακόμα και αν η φυσική ερμηνεία της μεταβλητής έχει νόημα μόνο για διακριτές τιμές. Έτσι, χρησιμοποιώντας το Διαφορικό Λογισμό βρίσκουμε μια λύση για το μαθηματικό μοντέλο, η οποία ελπίζουμε ότι προσεγγίζει τη λύση του πραγματικού προβλήματος.

Γενικά, με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν την έννοια της παραγώγου και να μπορούν να την ερμηνεύουν ως ρυθμό μεταβολής.
- Να μπορούν να βρίσκουν τις παραγώγους συναρτήσεων.
- Να κατανοήσουν ότι η γνώση του ρυθμού μεταβολής ενός μεταβαλλόμενου μεγέθους μας δίνει χρήσιμες πληροφορίες για το ίδιο το μέγεθος.
- Να μπορούν με τη βοήθεια των παραγώγων να επιλύουν προβλήματα ακροτάτων.

Κεφάλαιο 2 Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 16 διδακτικές ώρες.

Στην εποχή μας οι στατιστικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται ολοένα και περισσότερο για τη μελέτη σύνθετων επιστημονικών και κοινωνικών προβλημάτων, όπως είναι, για παράδειγμα, η μόλυνση του περιβάλλοντος, τα ατυχήματα, η ανεργία, ο πληθωρισμός, η υγεία, η οικονομία, η συμπεριφορά του εκλογικού σώματος κτλ. Οι μαθητές εφαρμόζοντας τη στατιστική μεθοδολογία σε διάφορες πρακτικές εφαρμογές εξοικειώνονται στο να επιχειρηματολογούν χρησιμοποιώντας αντικειμενικά επιχειρήματα, ενώ συγχρόνως ασκούνται στη δημιουργική και μεθοδολογική εργασία. Επίσης, η εξοικείωση με τη γλώσσα της Στατιστικής και η γνώση των δυνατοτήτων και των περιορισμών της στατιστικής μεθοδολογίας θα τους καταστήσει ικανούς, ώστε αργότερα, ως υπεύθυνοι πολίτες, να μπορούν να τηρούν κριτική στάση στον καταιγισμό των πληροφοριών που δέχονται είτε ως αναγνώστες είτε ως ακροατές από τα μέσα μαζικής ενημέρωσης, από τα γραφεία στατιστικών ερευνών, από τις διαφημίσεις κτλ.

Μεγάλο μέρος του κεφαλαίου της Στατιστικής έχει διδαχθεί στο Γυμνάσιο. Εδώ γίνεται συστηματικότερη παρουσίαση των σχετικών εννοιών, οι οποίες και συμπληρώνονται με την γραμμική παλινδρόμηση και τη συσχέτιση δύο μεταβλητών.

Για να μην καθυστερεί η διδασκαλία, οι στατιστικοί πίνακες και τα διαγράμματα, ο αριθμός των οποίων στο κεφάλαιο της Στατιστικής είναι μεγάλος, κρίνεται σκόπιμο να ετοιμάζονται σε φωτοτυπίες ή διαφάνειες πριν από το μάθημα. Αν αυτό δεν είναι εφικτό, συνιστάται να γίνεται η επεξεργασία τους μέσα από το βιβλίο.

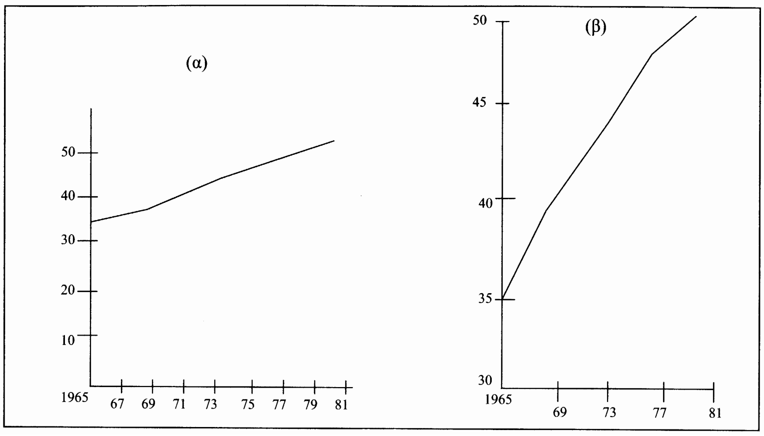
Στην §**2.1** πρέπει να καταβληθεί προσπάθεια, ώστε με κατάλληλα παραδείγματα να κατανοήσουν οι μαθητές τις έννοιες **πληθυσμός, μεταβλητή** (*ποσοτική, ποιοτική*), **απογραφή** και δείγμα. Να διευκρινιστεί ότι δε συμπίπτει το σύνολο των τιμών μιας μεταβλητής με τις παρατηρήσεις από την εξέταση ενός πληθυσμού ως προς τη μεταβλητή αυτή. Για παράδειγμα, οι τιμές της μεταβλητής "ομάδα αίματος" είναι Α, Β, ΑΒ και Ο, ενώ οι παρατηρήσεις από την εξέταση δέκα ατόμων μπορεί να είναι Α, Α, Β, Β, Β, ΑΒ, Α, ΑΒ,Ο, Β.

Όταν είναι πρακτικά αδύνατο ή οικονομικά ασύμφορο να εξετάσουμε κάθε μέλος ενός πληθυσμού, οδηγούμαστε στην εξέταση ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος. Είναι σημαντικό να αναγνωρίσουν οι μαθητές τη χρησιμότητα του δείγματος, από το οποίο μπορούν να προκύψουν αξιόπιστες πληροφορίες για ολόκληρο τον πληθυσμό.

Στην §**2.2** παρουσιάζονται οι κατανομές συχνοτήτων και οι γραφικές παραστάσεις τους. Μια από τις απλούστερες διαδικασίες για την οργάνωση και τη συνοπτική παρουσίαση των δεδομένων είναι η κατανομή συχνοτήτων. Η κατανομή συχνοτήτων θεωρείται ως το πρώτο βήμα σε κάθε ανάλυση δεδομένων. Ανάλογα ορίζονται η κατανομή σχετικών συχνοτήτων, η κατανομή αθροιστικών συχνοτήτων και η κατανομή αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

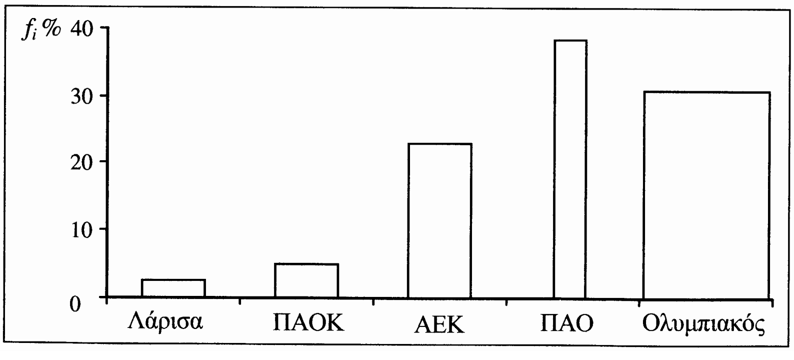
Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν ότι:

- Η (απόλυτη) **συχνότητα** $\boldsymbol{v_i}$, μιας τιμής x_i, δηλώνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i στο δείγμα.
- Η **σχετική συχνότητα** $\boldsymbol{f_i}$ εκφράζει το ποσοστό (επί τοις %) μιας τιμής x_i, η οποία εμφανίζεται στο δείγμα των ν παρατηρήσεων.
  Γι' αυτό η σχετική συχνότητα προσφέρεται για τη σύγκριση πληθυσμών, όταν εξετάζονται ως προς την ίδια μεταβλητή. Βέβαια με τις σχετικές συχνότητες χάνουμε τις απόλυτες συχνότητες. Αν όμως ν είναι το μέγεθος του δείγματος, τότε
  $v_i = f_i \cdot v$,
- Η **αθροιστική συχνότητα** $\boldsymbol{N_i}$ και η **αθροιστική σχετική συχνότητα** $\boldsymbol{F_i}$, οι οποίες έχουν νόημα μόνο για ποσοτικές μεταβλητές, εκφράζουν το πλήθος και το ποσοστό αντιστοίχως των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες με x_i.
- Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να παραστήσουν γραφικά τα δεδομένα που έχουν συλλέξει, χρησιμοποιώντας κάθε φορά το κατάλληλο διάγραμμα. Ακόμη πρέπει να είναι σε θέση να «διαβάζουν» τα διάφορα διαγράμματα τα οποία παρουσιάζουν με άμεσο και οργανωμένο τρόπο τα στατιστικά δεδομένα και επιτρέπουν ορισμένες φορές να φανούν αμέσως οι σχέσεις που ενδεχομένως υπάρχουν. Πρέπει όμως να επιστήσουμε την προσοχή των μαθητών, δίνοντας κατάλληλα παραδείγματα, για τον κίνδυνο παραπλάνησης που υπάρχει από την ανάγνωση ενός στατιστικού διαγράμματος. Για παράδειγμα, στο σχήμα 1 τα δυο διαγράμματα (α) και (β) αναφέρονται στο ποσοστό των εργαζομένων γυναικών στο σύνολο του γυναικείου πληθυσμού μιας χώρας άνω των 16 ετών. Δίνουν όμως εντελώς διαφορετική εικόνα για το πως μεταβάλλεται το ποσοστό αυτό.



Σχήμα 1

Το διάγραμμα (β) προκύπτει από το (α), αν απλώς μεγεθύνουμε την κλίμακα στον άξονα των y, σμικρύνουμε την κλίμακα στον άξονα των x και θεωρήσουμε ως αρχή μετρήσεων στον άξονα των y την ένδειξη 30. Ανάλογες παραποιήσεις μπορούν να πραγματοποιηθούν με το ραβδόγραμμα κατασκευάζοντας τα ορθογώνια με διαφορετικό πλάτος. Με τον τρόπο αυτό η οποιαδήποτε διαφορά στις συχνότητες εμφανίζεται πολλαπλάσια από ό,τι πραγματικά είναι. Για παράδειγμα, αν για την άσκηση 9 σελ. 80 παραστήσουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων όπως παρακάτω,

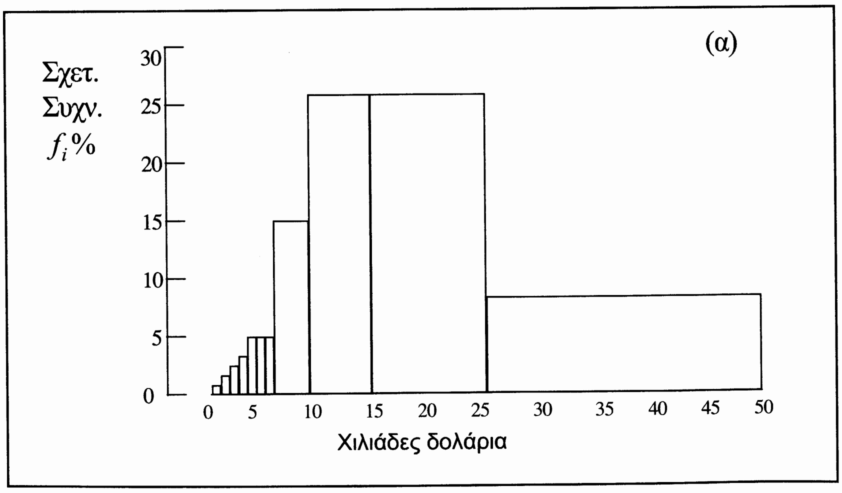


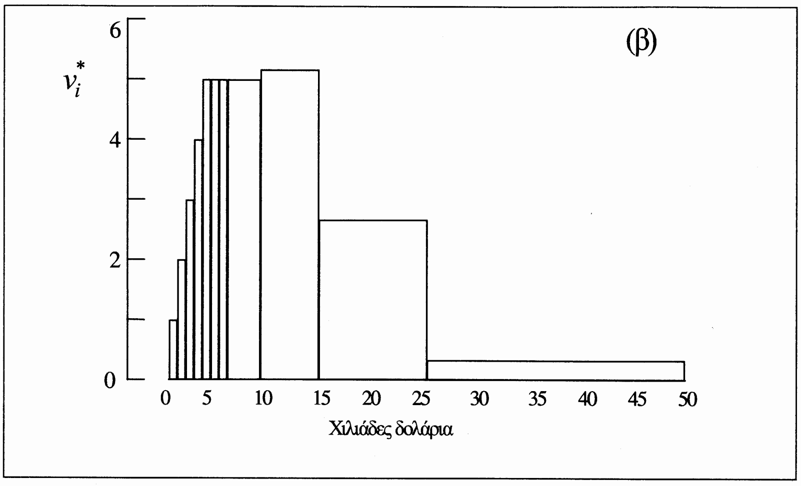
τότε η απεικόνιση της κατάστασης είναι παραπλανητική, σε βάρος του Παναθηναϊκού και υπέρ του Ολυμπιακού. Όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο, επιβάλλεται να γίνεται ομαδοποίηση. Στην ομαδοποίηση το **πλήθος των κλάσεων** ορίζεται αυθαίρετα από τον ερευνητή σύμφωνα με την πείρα του. Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί και ο εμπειρικός τύπος του Sturges: $\kappa=1+3{,}32\cdot\log\nu$, όπου κ είναι ο αριθμός των κλάσεων και ν είναι το μέγεθος του δείγματος.

Με την ομαδοποίηση έχουμε απώλεια πληροφοριών, η οποία είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μικρότερος είναι ο αριθμός των κλάσεων. Όμως, με την ομαδοποίηση διευκολύνεται η επεξεργασία των δεδομένων και η παρουσίαση τους είναι εποπτικότερη.

Όταν έχουμε μια ομαδοποιημένη κατανομή με άνισα πλάτη, τότε στο αντίστοιχο ιστόγραμμα **τα εμβαδά και όχι τα ύψη** των ορθογωνίων είναι ίσα με τις αντίστοιχες συχνότητες των κλάσεων. Αν δεν κατασκευαστεί σύμφωνα με αυτή την αρχή το ιστόγραμμα, τότε μπορεί να παραπλανηθεί ο αναγνώστης. Για παράδειγμα, στον παρακάτω πίνακα έχουμε την κατανομή των οικογενειών στις Η.Π.Α. ως προς το ετήσιο εισόδημα τους του έτους 1973 και στο σχήμα 2 δύο διαφορετικά ιστογράμματα για την κατανομή αυτή. Στο ιστόγραμμα (α) τα ύψη των ορθογωνίων είναι ίσα με τις σχετικές συχνότητες, ενώ στο ιστόγραμμα (β) τα εμβαδά των ορθογωνίων είναι ίσα με τις αντίστοιχες συχνότητες των κλάσεων (δηλαδή το ύψος του κάθε ορθογωνίου είναι ίσο με το λόγο της σχετικής συχνότητας προς το πλάτος της αντίστοιχης κλάσης). Η εντύπωση που αποκομίζει ο αναγνώστης από το ιστόγραμμα (α) είναι ότι η οικονομική κατάσταση των οικογενειών στις Η.Π.Α. είναι πιο "ανθηρή" από ό,τι είναι στην πραγματικότητα. Σύμφωνα με το ιστόγραμμα αυτό υπάρχουν πολύ περισσότερες οικογένειες με εισόδημα άνω των 25.000$ από ό,τι κάτω των 7.000$. Οι Η.Π.Α. είναι βέβαια μια πλούσια χώρα. αλλά όχι τόσο πλούσια όσο δείχνει το ιστόγραμμα (α).

Ετήσιο εισόδημα σε χιλιάδες \$	Ποσοστό $(f_i\%)$ Οικογενειών	Ύψος $v_i^* = \frac{f_i\%}{c_i}$
0 –1	1	1
1 – 2	2	2
3 – 2	3	3
3 – 4	4	4
4 – 5	5	5
5 – 6	5	5
6 – 7	5	5
7 – 10	15	5
10 – 15	26	5,2
15 – 25	26	2,6
25 – 50	8	0,32





Σχήμα 2

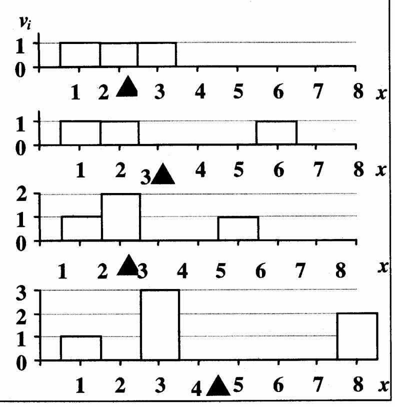
Στην § **2.3** εξετάζονται τα μέτρα θέσης και διασποράς μιας κατανομής.

Ένας μεγάλος αριθμός δεδομένων μπορεί σε πολλές περιπτώσεις να περιγραφεί με ένα μέτρο κεντρικής τάσης και με ένα μέτρο διασποράς. Οι μαθητές πρέπει να ενημερωθούν για τους περιορισμούς και τις επιπτώσεις από τη χρήση καθενός από τα μέτρα θέσης και διασποράς. Είναι επίσης σημαντικό να κατανοήσουν ότι με την αντικατάσταση των δεδομένων από ένα μέτρο θέσης έχουμε μεν μια σύντομη πληροφόρηση, αλλά συγχρόνως έχουμε και μια σημαντική απώλεια πληροφοριών. Αν, για παράδειγμα, θέλουμε να πληροφορήσουμε κάποιον για τη θερμοκρασία μιας πόλης θα ήταν κατάχρηση να του δώσουμε πλήρη κατάλογο των καθημερινών θερμοκρασιών. Δίνοντας του όμως για συντομία μόνο τη μέση ετήσια θερμοκρασία οπωσδήποτε δεν του δίνουμε πλήρη εικόνα της μεταβολής της θερμοκρασίας στη διάρκεια του έτους.

Η **μέση τιμή** είναι ο μέσος όρος των παρατηρήσεων μιας κατανομής. Η μέση τιμή ενός πληθυσμού συμβολίζεται με $\boldsymbol{\mu}$, ενώ ενός δείγματος με $\bar{x}$. Στη στατιστική συμπερασματολογία γίνεται διάκριση μεταξύ της μέσης τιμής πληθυσμού και της μέσης τιμής δείγματος. Όμως στο βιβλίο χρησιμοποιείται μόνο η μέση τιμή δείγματος και συμβολίζεται με $\bar{x}$. Η μέση τιμή είναι το μέτρο της κεντρικής τάσης, το οποίο χρησιμοποιείται συχνότερα από τα άλλα, κυρίως επειδή έχει τις δύο ακόλουθες ιδιότητες:

α. Το άθροισμα των αποκλίσεων όλων των τιμών από τη μέση τιμή είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή $\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})=0$. Η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική για την παραγωγή και την απλοποίηση πολλών τύπων της Στατιστικής. Την ερμηνεία αυτή της μέσης τιμής μπορούμε να τη δούμε και με το παρακάτω παράδειγμα:
Για καθένα από τα παρακάτω σύνολα δεδομένων υπολογίζουμε τη μέση τιμή τους και κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα συχνοτήτων. Στον άξονα 0x σημειώνουμε με "▲" τη μέση τιμή.

Παρατηρήσεις(x_i)	Μέση τιμή($\bar{X}$)	$\Sigma(x_i-\bar{x})$
1 2 3	2	0
1 2 6	3	0
1 2 2 5	2,5	0
1 3 3 3 8 8	4,333	0



Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει προφανώς και στην περίπτωση που έχουμε συχνότητες, όταν η παρατήρηση x_i. εμφανίζεται ν_i. φορές. Τότε ισχύει η σχέση

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})\nu_1=0,$$

η οποία σύμφωνα με όσα ξέρουμε από τη Φυσική δείχνει ότι το $\bar{x}$ είναι η θέση του **κέντρου βάρους** κ σωματιδίων με βάρη ν_1, $\nu_2,\ldots,\nu_\kappa$ τοποθετημένα στις θέσεις $x_1,x_2,\ldots,x_\kappa$. Αυτό ακριβώς φαίνεται και στα παραπάνω ιστογράμματα συχνοτήτων, όπου η μέση τιμή παριστάνεται με "▲". Αν θεωρήσουμε δηλαδή τον άξονα 0_x να μην έχει βάρος και τοποθετήσουμε τα βάρη ν_i, στις θέσεις x_i και το υποστήριγμα ▲ στη θέση $\bar{x}$, τότε θα έχουμε ισορροπία, όπως π.χ. σε μία "τραμπάλα".

β. Το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων από τη μέση τιμή είναι μικρότερο από το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων από οποιαδήποτε άλλη τιμή στην κατανομή (εφαρμογή 2, σελίδα 98). Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της διασποράς και της τυπικής απόκλισης.

Στο βιβλίο αναφέρεται και ο **σταθμικός μέσος**, ο οποίος χρησιμοποιείται στην περίπτωση που οι τιμές έχουν διαφορετική αξία. Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί και για τον προσδιορισμό της μέσης τιμής περισσότερων ομάδων δεδομένων με διαφορετικό μέγεθος των οποίων γνωρίζουμε τις μέσες τιμές. Για παράδειγμα, αν η μέση τιμή της βαθμολογίας 80 κοριτσιών είναι 17 και η μέση τιμή της βαθμολογίας 50 αγοριών είναι 15, τότε η μέση τιμή της βαθμολογίας των 80+50=130 παιδιών είναι

$$\bar{x} = \frac{17\cdot 80 + 15\cdot 50}{80+15} = \frac{2110}{130} \approx 16.23.$$

Η **διάμεσος** είναι το σημείο του άξονα των δεδομένων κάτω από το οποίο βρίσκεται το πολύ το 50% των παρατηρήσεων και συγχρόνως πάνω από αυτό το πολύ το 50% των παρατηρήσεων. Όταν ο αριθμός των παρατηρήσεων είναι μεγάλος, τότε γίνεται ομαδοποίηση των δεδομένων και η διάμεσος προσδιορίζεται με τη βοήθεια του ιστογράμματος των αθροιστικών συχνοτήτων.

Υποθέτοντας ότι οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση κατανέμονται ομοιόμορφα, αποδεικνύεται (με απλή μέθοδο των τριών) ότι ο τύπος που δίνει τη διάμεσο σε ομαδοποιημένα δεδομένα είναι:

$$\delta = L_i + \frac{\frac{\nu}{2} - N_{i-1}}{\nu_i}\cdot c_i$$

i	Κλάσεις	ν_i	N_i	F_i%
1	156-162	2	2	5,0
2	162-168	8	10	25,0
3	168-174	12	22	55,0
3	174-180	11	33	82,5
5	180-186	5	38	95,0
6	186-192	2	40	100,0

Όπου

L_i το κατώτερο όριο της κλάσης που περιέχει τη διάμεσο
v_i η συχνότητα της κλάσης
c_i το πλάτος της κλάσης
N_{i-1} η αθροιστική συχνότητα της **προηγούμενης** κλάσης, και
ν το πλήθος των παρατηρήσεων.

Εφαρμόζοντας, για παράδειγμα, τον τύπο της διαμέσου για τα δεδομένα του πίνακα 9 της σελίδας 73 του βιβλίου, βρίσκουμε ότι η διάμεσος βρίσκεται στην τρίτη κλάση, επειδή εδώ αντιστοιχούν αθροιστικά οι ν/2=20 παρατηρήσεις. Συνεπώς,

$$\delta = L_i + \frac{\frac{v}{2} - N_{i-1}}{v_i} \cdot c_i = 168 + \frac{\frac{40}{2} - 10}{12} \cdot 6 = 173cm,$$

όπως (περίπου) και στη γραφική μέθοδο.

Η **επικρατούσα τιμή** παρέχει σχετικά λίγες πληροφορίες για τα δεδομένα. Αν και η επικρατούσα τιμή προσδιορίζει την τιμή ή την κλάση με τη μεγαλύτερη συχνότητα, δεν προσφέρεται εύκολα για μαθηματική επεξεργασία και έτσι έχει **περιορισμένη σημασία** ως στατιστικό εργαλείο. Με τη βοήθεια του σχήματος 14 της σελίδας 91 του βιβλίου μπορούμε να βρούμε και ένα μαθηματικό τύπο για τον υπολογισμό της επικρατούσας τιμής μιας ομαδοποιημένης κατανομής με ισοπλατείς κλάσεις. Πιο συγκεκριμένα, αν L_i, είναι το αριστερό άκρο της επικρατούσας κλάσης, Δ_1 και Δ_2 είναι οι διαφορές των συχνοτήτων των γειτονικών κλάσεων από τη συχνότητα της επικρατούσας κλάσης, και c είναι το πλάτος των κλάσεων, τότε από τα όμοια τρίγωνα ΖΑΒ και ΖΓΔ έχουμε $\frac{M_0 + L_i}{c - (M_0 - L_i)} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ και επιλύνοντας ως προς M_0 βρίσκουμε: $M_0 = L_i + \frac{c\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$.

Τα διαγράμματα, τα μέτρα θέσης και τα μέτρα διασποράς μας παρέχουν πληροφορίες για ένα σύνολο δεδομένων. Χρειαζόμαστε όμως πολλές φορές και τρόπους για την περιγραφή **ατομικών** παρατηρήσεων. Για παράδειγμα, έστω ότι σε ένα τεστ ένας εξεταζόμενος πήρε βαθμό 70. Ποια είναι η σημασία του βαθμού αυτού; Αν και από μόνος του ο βαθμός έχει κάποια αξία, θα γινόταν περισσότερο χρήσιμος αν προσδιορίζαμε τη θέση του σε σχέση με τους άλλους βαθμούς. Αν δηλαδή μπορούσαμε να απαντήσουμε σε ερωτήματα, όπως: ο συγκεκριμένος βαθμός είναι κοντά στα άκρα της κατανομής ή κοντά στο κέντρο της κατανομής; Πόσοι βαθμοί της κατανομής είναι χαμηλότεροι από αυτόν; Ποιο ποσοστό αποτελούν στην κατανομή οι βαθμοί αυτοί;

Απάντηση σε τέτοια ερωτήματα δίνονται με τη βοήθεια των εκατοστημορίων.

Ένα **εκατοστημόριο** P_κ είναι μια τιμή στην κατανομή για την οποία το πολύ το k% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ (100- k)% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν. Ειδική περίπτωση των εκατοστημορίων είναι η διάμεσος (δ = P_{50}), τα τεταρτημόρια ($Q_1 = P_{25}$ και $Q_3 = P_{75}$) και τα δεκατημόρια $D_1 = P_{10}, D_2 = P_{20}, ..., D_9 = P_{90}$.

Εκτός από τα παραπάνω μέτρα θέσης σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως π.χ. στα οικονομικά, χρησιμοποιούνται για τη στατιστική ανάλυση ως μέτρα θέσης ο γεωμετρικός και ο αρμονικός μέσος.

Ως **γεωμετρικός μέσος** (geometric mean) ν θετικών τιμών $t_1, t_2, ..., t_\nu$ ορίζεται η νιοστή ρίζα του γινομένου των τιμών αυτών, δηλαδή

$$G = \sqrt[\nu]{t_1 \cdot t_2 \cdot ... \cdot t_\nu} \quad \text{ή} \quad G = \sqrt[\nu]{x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} ... x_k^{\nu_k}}$$

όταν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα.

Σε ακόμα πιο σπάνιες περιπτώσεις, κυρίως όταν μελετάμε ρυθμούς μεταβολής ή αναλογίες, χρησιμοποιείται ο **αρμονικός μέσος** (harmonic mean).

Ο αρμονικός μέσος ν θετικών τιμών $t_1, t_2, ..., t_\nu$ ορίζεται από τη σχέση

$$H = \frac{\nu}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + ... + \frac{1}{t_\nu}} \quad \text{ή} \quad H = \frac{\nu}{\frac{\nu_1}{x_1} + \frac{\nu_2}{x_2} + ... + \frac{\nu_k}{x_k}},$$

όταν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα.

Αν, για παράδειγμα, ένας μαθητής διαβάζει 5 σελίδες Μαθηματικών την ώρα, 10 σελίδες Ιστορίας την ώρα και 6 σελίδες Θρησκευτικών την ώρα τότε, ο μέσος ρυθμός διαβάσματος του μαθητή (για τα μαθήματα αυτά) είναι ο αρμονικός μέσος

$$\frac{3}{\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6}} \approx \text{ 6,4 σελίδες την ώρα.}$$

Ποιο είναι όμως το καλύτερο μέτρο θέσης μιας κατανομής; Σύμφωνα με ένα πρώτο κριτήριο, η απάντηση εξαρτάται από το αν η μεταβλητή είναι ποιοτική ή ποσοτική. Αν η μεταβλητή είναι ποιοτική, τότε προσφέρεται μόνο η επικρατούσα τιμή, αν όμως η μεταβλητή είναι ποσοτική, τότε μπορούν να χρησιμοποιηθούν και τα τρία μέτρα θέσης. Σύμφωνα με ένα δεύτερο κριτήριο, η επιλογή του καταλληλότερου μέτρου θέσης εξαρτάται από το σκοπό για τον οποίο θα χρησιμοποιηθεί. Αν επιθυμούμε περαιτέρω στατιστική επεξεργασία, τότε η μέση τιμή προσφέρεται περισσότερο. Αν όμως ο σκοπός είναι βασικά περιγραφικός, τότε πρέπει να χρησιμοποιείται το μέτρο που περιγράφει καλύτερα τα δεδομένα. Η παρουσία ακραίων παρατηρήσεων (πολύ μικρών ή πολύ μεγάλων αναφορικά με τις άλλες παρατηρήσεις) είναι συχνά ένα από τα βασικότερα κριτήρια για την επιλογή κατάλληλου μέτρου θέσης. Η επικρατούσα τιμή και η διάμεσος μένουν γενικά ανεπηρέαστες από τις ακραίες τιμές του δείγματος. Η μέση τιμή όμως επηρεάζεται σημαντικά από τις τιμές αυτές, επομένως δεν ενδείκνυται σε τέτοιες περιπτώσεις. Έτσι, για παράδειγμα, στη διαπραγμάτευση για τους μισθούς των εργαζομένων σε μια εταιρεία, οι εργαζόμενοι θα επικαλούνται ως αντιπροσωπευτικό μισθό τη διάμεσο ή την επικρατούσα τιμή, ενώ οι εκπρόσωποι της εταιρείας τη μέση τιμή που επηρεάζεται σημαντικά από τους μισθούς των υψηλόβαθμων στελεχών της.

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα πόσο διασπαρμένες είναι οι τιμές μιας κατανομής, χρησιμοποιούμε τα **μέτρα διασποράς**. Από τα μέτρα αυτά αναφέρονται στο βιβλίο το εύρος, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

Από τα μέτρα διασποράς το **εύρος** χρησιμοποιείται αρκετά συχνά σε περιπτώσεις ελέγχου ποιότητας βιομηχανικών προϊόντων, όταν εργαζόμαστε με πολλά ισομεγέθη δείγματα. Αυτό οφείλεται στον εύκολο υπολογισμό του και στην εύκολη ερμηνεία του. Το εύρος όμως έχει το μειονέκτημα να εξαρτάται μόνο από τις δύο ακραίες τιμές και έχει την τάση να αυξάνεται, καθώς το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει. Αυτό έχει ως συνέπεια να μην είναι συγκρίσιμα ως προς το εύρος δύο δείγματα διαφορετικού μεγέθους.

Η **διακύμανση** ενός πληθυσμού μεγέθους N συμβολίζεται με $\boldsymbol{\sigma^2}$ και ο τύπος της είναι

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(t_i-\mu)^2}{N} \qquad (1),$$

όπου $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i$ η μέση τιμή του πληθυσμού, ενώ η διακύμανση ενός δείγματος μεγέθους v συμβολίζεται με $\left(s^*\right)^2$ και ο τύπος της είναι

$$\left(s^*\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}\left(t_i - \overline{x}\right)^2}{\nu - 1} \qquad (2).$$

Στατιστικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται στις διάφορες επιστήμες συνήθως προσδιορίζουν τη διακύμανση $\left(s^*\right)^2$ ενός δείγματος, η οποία στη συνέχεια χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της διακύμανσης $\boldsymbol{\sigma^2}$ του πληθυσμού. Η δειγματική διακύμανση που προσδιορίζεται με τον τύπο (2) αποδεικνύεται ότι είναι μια *αμερόληπτη εκτιμήτρια*. Αν πάρουμε δηλαδή όλα τα δυνατά δείγματα μεγέθους *ν* και υπολογίσουμε τις διασπορές $\left(s^*\right)^2$ από τη σχέση (2), τότε η μέση τιμή τους θα ισούται με την πληθυσμιακή διασπορά σ^2. Αντίθετα, η δειγματική διακύμανση, όπως ορίζεται από τη σχέση $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}\left(t_i - \overline{x}\right)^2}{\nu}$, τείνει να υποεκτιμά τη πληθυσμιακή διακύμανση σ^2. Ωστόσο, στο βιβλίο για διδακτικούς λόγους χρησιμοποιούμε για τη δειγματική διακύμανση τον τύπο $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}\left(t_i - \overline{x}\right)^2}{\nu}$, αφού δεν πρόκειται να ασχοληθούμε με στατιστική συμπερασματολογία.

Η **τυπική απόκλιση** είναι η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης. Το μέτρο αυτό διασποράς ικανοποιεί την απαίτηση να εκφράζεται στην ίδια μονάδα μέτρησης με τις παρατηρήσεις.

Στην περίπτωση που οι παρατηρήσεις είναι μεγάλοι αριθμοί, μπορούμε να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς χρησιμοποιώντας την εφαρμογή 3 (σελίδα 99 του βιβλίου), σύμφωνα με την οποία αν $y = ax + \beta$, τότε $\boldsymbol{\overline{y} = \alpha\overline{x} + \beta}$ και $\boldsymbol{s_y = |\alpha| \cdot s_x}$.

Για την ερμηνεία της τυπικής απόκλισης ως μέτρου διασποράς, ας υποθέσουμε ότι ο μέσος μισθός των υπαλλήλων μιας εταιρείας Α είναι $\overline{x}_A = 900€$ με τυπική απόκλιση $s_A = 150€$. Μια ερμηνεία της μεταβλητότητας των απολαβών των εργαζομένων έγκειται στον καθορισμό του ποσοστού των εργαζομένων που αναμένεται να βρίσκονται στο διάστημα $(\overline{x} - s,\ \overline{x} + s)$, ή με δύο τυπικές αποκλίσεις στο διάστημα $(\overline{x} - 2s,\ \overline{x} + 2s)$ κτλ. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή, τότε έχουμε την ερμηνεία του σχήματος 15 της σελίδας 95. Αντίθετα, για οποιοδήποτε σύνολο παρατηρήσεων, ανεξάρτητα από την κατανομή που έχουμε, εφαρμόζεται το θεώρημα του Chebyshev, το οποίο λέει ότι "το ποσοστό των παρατηρήσεων που περιλαμβάνονται στο διάστημα $(\bar{x}-\kappa s,\ \bar{x}+\kappa s)$, $\kappa \geq 1$, είναι τουλάχιστον $1-\frac{1}{\kappa^2}$". Συνεπώς, στο διάστημα $(\bar{x}-2s,\ \bar{x}+2s)$ έχουμε τουλάχιστον το 75% των παρατηρήσεων, ενώ στο διάστημα $(\bar{x}-3s,\ \bar{x}+3s)$ έχουμε τουλάχιστον το 89% των παρατηρήσεων. Επομένως, για το παραπάνω παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι ο μισθός των υπαλλήλων ακολουθεί κανονική κατανομή, τότε αναμένεται το:

- 68% των υπαλλήλων να έχουν μισθό στο διάστημα (750,1050)

- 95% των υπαλλήλων να έχουν μισθό στο διάστημα (600,1200)

- 99,7% των υπαλλήλων να έχουν μισθό στο διάστημα (450,1350),

ενώ τα αντίστοιχα ποσοστά, όταν δεν υποθέτουμε κανονική κατανομή, γίνονται τουλάχιστον 0%, 75% και 89%.

Μερικές φορές σε στατιστικούς υπολογισμούς είναι αναγκαίο όχι μόνο να υπολογίσουμε απλώς τις τυπικές αποκλίσεις, αλλά να συγκρίνουμε μεταξύ τους τα μεγέθη των τυπικών αποκλίσεων σε διαφορετικές στατιστικές συλλογές. Δε φτάνουμε όμως στο σκοπό μας με το να παραλληλίσουμε μεταξύ τους τις τυπικές αποκλίσεις. Αυτό θα μας έδινε στην πλειοψηφία των περιπτώσεων μια εσφαλμένη εικόνα.

Ας υποθέσουμε ότι ο μέσος μισθός $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση *s* των υπαλλήλων δύο εταιρειών *A* και *B* δίνονται στον παρακάτω πίνακα για 3 διαφορετικές περιπτώσεις:

	Εταιρεία Α	Εταιρεία Β
Περίπτωση 1	$\bar{x}_A = 900€$ $s_A = 150€$	$\bar{x}_B = 900€$ $s_B = 200€$
Περίπτωση 2	$\bar{x}_A = 900€$ $s_A = 150€$	$\bar{x}_B = 3000€$ $s_B = 250€$
Περίπτωση 3	$\bar{x}_A = 900€$ $s_A = 150€$	$\bar{x}_B = 2000\$$ $s_B = 420\$$

Στην περίπτωση 1 έχουμε την ίδια μέση τιμή, οπότε η σύγκριση της μεταβλητότητας μπορεί να γίνει αμέσως, συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι η μεταβλητότητα των μισθών στην εταιρεία Β είναι μεγαλύτερη από την μεταβλητότητα των μισθών στην εταιρεία Α. Δηλαδή οι εργαζόμενοι στην εταιρεία Α παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια στις μηνιαίες αποδοχές τους από ό,τι στην εταιρεία Β. Αντίθετα, στη δεύτερη περίπτωση δεν μπορούμε να πούμε ότι έχουμε μεγαλύτερη μεταβλητότητα στην εταιρεία Β από ό,τι στην Α. Η τυπική απόκλιση $s_A = 150€$ έχει υπολογιστεί θεωρώντας τις αποκλίσεις των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή $\bar{x}_A = 900€$, ενώ η $s_B = 250€$ υπολογίστηκε θεωρώντας τις αποκλίσεις των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή $\bar{x}_B = 3000€$. Ανάλογη είναι και η τρίτη περίπτωση, όπου έχουμε διαφορετικές μονάδες μέτρησης.

Στις δύο αυτές περιπτώσεις η μεταβλητότητα των δεδομένων μπορεί να συγκριθεί, αφού πρώτα εκφράσουμε τις σχετικές ποσότητες σε μια κοινή βάση. Γι 'αυτό υπάρχει ανάγκη ορισμού μέτρων σχετικής μεταβλητότητας, τα οποία να συνδυάζουν μέτρα θέσης με μέτρα διασποράς. Το πιο γνωστό μέτρο σχετικής μεταβλητότητας είναι ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας, ο οποίος ορίζεται από τον τύπο $CV = \frac{s}{\bar{x}}$ και συνήθως εκφράζεται ως ποσοστό.

Σύγκριση μέσης τιμής, διαμέσου και επικρατούσας τιμής

Πλεονεκτήματα	**Μειονεκτήματα**
Μέση τιμή	
• Για τον υπολογισμό της χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές. • Είναι μοναδική για κάθε σύνολο δεδομένων. • Είναι εύκολα κατανοητή. • Ο υπολογισμός της είναι σχετικά εύκολος. • Έχει μεγάλη εφαρμογή για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.	• Επηρεάζεται πολύ από ακραίες τιμές. • Μπορεί να μην αντιστοιχεί σε δυνατή τιμή της μεταβλητής. Όταν η Χ είναι διακριτή, με ακέραιες τιμές, τότε η μέση τιμή μπορεί να μην είναι ακέραιος. • Δεν υπολογίζεται για ποιοτικά δεδομένα. • Είναι δύσκολος ο υπολογισμός της σε ομαδοποιημένα δεδομένα με ανοικτές τις ακραίες κλάσεις.
Διάμεσος	
• Είναι εύκολα κατανοητή.	• Δε χρησιμοποιούνται όλες οι

- Δεν επηρεάζονται από ακραίες τιμές.
- Υπολογίζεται και στην περίπτωση που οι ακραίες κλάσεις είναι ανοικτές.
- Ο υπολογισμός της είναι απλός.
- Είναι μοναδική σε κάθε σύνολο δεδομένων.

τιμές για τον υπολογισμό της.

- Είναι δύσκολη η εφαρμογή της για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.
- Δεν υπολογίζεται για ποιοτικά δεδομένα.
- Για τον υπολογισμό της μπορεί να χρειαστεί παρεμβολή.

Επικρατούσα τιμή

- Υπολογίζεται εύκολα, όταν δεν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα.
- Είναι εύκολα κατανοητή.
- Υπολογίζεται και από ελλιπή δεδομένα.
- Δεν επηρεάζεται από ακραίες τιμές
- Εφαρμόζεται και σε ποιοτικά δεδομένα.

- Δεν χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές
- Δεν χρησιμοποιείται εύκολα για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.
- Δεν ορίζεται πάντα μονοσήμαντα. Μπορούμε να έχουμε πολλές κορυφές ή και καθόλου.

Σύγκριση μέτρων διασποράς

Πλεονεκτήματα | **Μειονεκτήματα**

Εύρος

- Είναι πολύ απλό στον υπολογισμό.
- Χρησιμοποιείται αρκετά στον έλεγχο ποιότητας.
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης.

- Δεν θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς, επειδή βασίζεται μόνο στις δυο ακραίες παρατηρήσεις.
- Δεν χρησιμοποιείται για περαιτέρω στατιστική ανάλυση.

Διασπορά και τυπική απόκλιση

- Λαμβάνονται υπόψη για τον υπολογισμό τους όλες οι παρατηρήσεις.
- Έχουν μεγάλη εφαρμογή στη στατιστική συμπερασματολογία.
- Σε κανονικούς πληθυσμούς το 68%, 95%, 99,7% των παρατηρήσεων βρίσκονται

- Το κυριότερο μειονέκτημα της διασποράς είναι ότι δεν εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με το χαρακτηριστικό. Το μειονέκτημα αυτό παύει να υπάρχει με τη χρησιμοποίηση της τυπικής απόκλισης.
- Απαιτούνται περισσότερες αλγεβρικές πράξεις για τον υπο-

στα διαστήματα $\bar{x} \pm s$, $\bar{x} \pm 2s$ και $\bar{x} \pm 3s$ αντίστοιχα.

λογισμό τους παρά στα άλλα μέτρα.

Συντελεστής μεταβολής

- Είναι καθαρός αριθμός.
- Χρησιμοποιείται ως μέτρο σύγκρισης της μεταβλητότητας, όταν έχουμε ίδιες ή και διαφορετικές μονάδες μέτρησης.
- Χρησιμοποιείται ως μέτρο ομοιογένειας ενός πληθυσμού.
- Δεν ενδείκνυται στην περίπτωση που η μέση τιμή είναι κοντά στο μηδέν.

Στην **§2.4** εξετάζεται η απλή **γραμμική παλινδρόμηση**. Αν εξετάζουμε έναν πληθυσμό συγχρόνως ως προς δύο μεταβλητές X και Y και $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., (x_\nu, y_\nu)$ είναι τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών, τότε μπορούμε να εξετάσουμε το είδος της εξάρτησης των δύο μεταβλητών με την ακόλουθη μέθοδο.

Παριστάνουμε με σημεία του επιπέδου τα ζεύγη (x_i, y_1), $i = 1,2,3,...\nu$ και έτσι έχουμε το **διάγραμμα διασποράς** (νέφος σημείων). Στη συνέχεια αναζητούμε μια συνάρτηση, της οποίας η καμπύλη διέρχεται «όσο γίνεται πιο κοντά» από τα σημεία (x_i, y_1), $i = 1,2,3...\nu$. Στην περίπτωση που το διάγραμμα διασποράς μας οδηγεί στην υπόθεση ότι υπάρχει μια **γραμμική εξάρτηση** (γραμμική παλινδρόμηση), προσδιορίζουμε την ευθεία παλινδρόμησης $\hat{y} = \hat{a} + \hat{\beta}\chi$, από τα σημεία (x_i, y_i), $i = 1,2,3...\nu$ απαιτώντας το άθροισμα $\sum_{i=1}^{\nu}(y_i - a - \beta\chi_i)^2$ να είναι ελάχιστο **(αρχή των ελαχίστων τετραγώνων).**

Οι τύποι (5) και (6) της σελίδας 110 του βιβλίου, με τους οποίους προσδιορίζουμε τις εκτιμήτριες $\hat{a}$ και $\hat{\beta}$ των συντελεστών α και β αντιστοίχως, βρίσκονται ως εξής:

Το άθροισμα των τετραγώνων $S = \sum_{i=1}^{\nu}(y_i - a - \beta\chi_i)^2$ γίνεται ελάχιστο, όταν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial S}{\partial a}$ και $\frac{\partial S}{\partial \beta}$ είναι και οι δυο μηδέν.

Έχουμε $\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{v}(y_i - a - \beta\chi_i)$ (1)

Και $\frac{\partial S}{\partial \beta} = -2\sum_{i=1}^{v}\chi_i(y_i - a - \beta\chi_i)$ (2).

Εξισώνοντας τις (1) και (2) με το μηδέν, βρίσκουμε τις ακόλουθες εξισώσεις, οι οποίες λέγονται κανονικές εξισώσεις:

$$\beta\sum\chi_i + a\cdot v = \sum y_i$$

$$\beta\sum\chi_i^2 + a\sum x_i = \sum x_i y_i$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο αυτών εξισώσεων βρίσκουμε τους ζητούμενους τύπους.

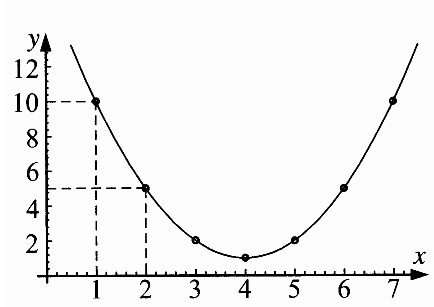
Με τη βοήθεια των εφαρμογών της §**2.4** να επισημανθεί στους μαθητές ότι:

- Οι προβλέψεις που μπορούμε να κάνουμε για την εξαρτημένη μεταβλητή Υ από τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής *X* μέσω της ευθείας παλινδρόμησης $\hat{y} = \hat{a} + \hat{\beta}\chi$ είναι δυνατές μόνο για τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής, οι οποίες βρίσκονται στο διάστημα που έχει γίνει η μελέτη ή πολύ κοντά στα άκρα του διαστήματος αυτού.
- Η εξίσωση της ευθείας παλινδρόμησης $\hat{y} = \hat{a} + \hat{\beta}\chi$ της εξαρτημένης μεταβλητής *Y* πάνω στην ανεξάρτητη μεταβλητή *X*, δε μας επιτρέπει να κάνουμε προβλέψεις για τις τιμές της *X*, όταν δίνονται οι τιμές της *Y*. Για να είναι αυτό δυνατόν, πρέπει να προσδιορίσουμε εξαρχής την ευθεία παλινδρόμησης της *X* πάνω στην *Y*, $\hat{x} = \hat{\gamma} + \hat{\delta}y$ η οποία γενικά είναι διαφορετική από την $\hat{y} = \hat{a} + \hat{\beta}\chi$ Και στις δύο όμως περιπτώσεις οι ευθείες διέρχονται από το σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$.

Το διάγραμμα διασποράς μας δίνει μια ένδειξη του κατά πόσον υπάρχει μια γραμμική σχέση μεταξύ της εξαρτημένης μεταβλητής *Y* και μιας άλλης *X* που λαμβάνεται ως ανεξάρτητη μεταβλητή. Εάν τα σημεία (x_i, y_i) τείνουν να βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία, τότε η σχέση μεταξύ των *X* και *Y* είναι γραμμική και περιγράφεται από την εξίσωση της ευθείας $y = \alpha + \beta\chi$. Αν το $\beta = 0$, τότε δεν υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών. Αυτό όμως δε σημαίνει απαραίτητα ότι δεν υπάρχει κάποια άλλη σχέση μεταξύ των *X* και *Y*.

Αν έχουμε, για παράδειγμα, τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα, παρατηρούμε ότι τα σημεία δε βρίσκονται γύρω από ευθεία γραμμή. Αυτό διαπιστώνεται από το ότι και η παράμετρος β εκτιμώμενη με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων βρίσκεται ίση με μηδέν. Παρ' όλα αυτά όμως η εξίσωση $y=(x-4)^2+1$ (που παριστάνει μια παραβολή) περιγράφει τέλεια τη σχέση μεταξύ των *X* και *Y*.

X	*Y*
1	10
2	5
3	2
4	1
5	2
6	5
7	10



Όταν διαπιστώνεται από το διάγραμμα διασποράς ή μας δίνεται ότι η σχέση μεταξύ των *X* και *Y* δεν είναι γραμμική, μπορούμε σε αρκετές περιπτώσεις με κατάλληλο μετασχηματισμό να την κάνουμε γραμμική και να εφαρμόσουμε τα ήδη γνωστά. Για παράδειγμα, όταν η σχέση είναι της μορφής:

$$y=ae^{\beta\chi}$$

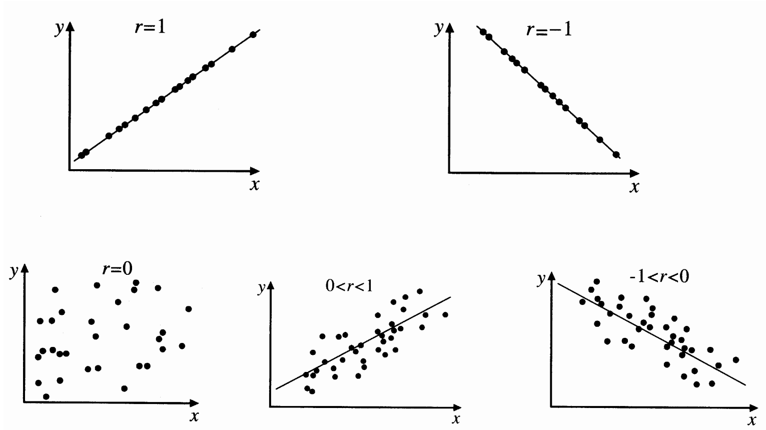
παίρνοντας λογαρίθμους βρίσκουμε

$$lny=lna+\beta\chi$$

και θέτοντας $y^*=lny,\ a^*=lna,\ \beta^*=\beta$ η αρχική σχέση μετασχηματίζεται στη γραμμική $y^*=a^*+\beta^*x.$

Το κεφάλαιο τελειώνει με την §**2.5**, η οποία αναφέρεται στο συντελεστή r της γραμμικής συσχέτισης. Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης μας πληροφορεί για το είδος της γραμμικής συσχέτισης (θετική, αρνητική ή μηδέν), αλλά και για το πόσο ισχυρή είναι η συσχέτιση αυτή. Με άλλα λόγια μας πληροφορεί για το αν αύξηση της μιας μεταβλητής αντιστοιχεί σε αύξηση ή μείωση της άλλης μεταβλητής, αλλά και για το πόσο διασπαρμένα είναι τα σημεία ενός ''νέφους" ως προς την αντίστοιχη ευθεία παλινδρόμησης.

Έτσι, ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης έχει το ίδιο πρόσημο με το συντελεστή $\widehat{\beta}$ της ευθείας παλινδρόμησης $\hat{y}=\hat{a}+\widehat{\beta}\chi$, ενώ η απόλυτη τιμή του εξαρτάται από το πλάτος της ''έλλειψης" που περικλείει το νέφος των σημείων.



Το γεγονός ότι για το συντελεστή συσχέτισης

$$r=\frac{\sum(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\overline{x})^2\sqrt{\sum(y_i-\overline{y})^2}}}$$

ισχύει $-1\le r\le 1$, αποδεικνύεται ως εξής:
Για κάθε πραγματική παράμετρο λ έχουμε διαδοχικά

$$\sum((x_i-\overline{x})+\lambda(y_i-\overline{y}))^2\geq 0$$

$$\sum\left((x_i-\overline{x})^2+\lambda^2(y_i-\overline{y})^2+2\lambda(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\right)\geq 0$$

$$\sum(x_i-\overline{x})^2+\lambda^2\sum(y_i-\overline{y})^2+2\lambda\sum(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\geq 0$$

$$\lambda^2\cdot\sum(y_i-\overline{y})^2+\lambda\cdot 2\sum(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})+\sum(x_1-\overline{x})^2\geq 0.$$

Επειδή η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε $\lambda\in R$, πρέπει η διακρίνουσα $\beta^2-4\alpha\gamma\leq 0$:

$$4\cdot\left(\sum(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\right)^2\leq 4\cdot\sum(y_i-\overline{y})^2\cdot\sum(x_i-\overline{x})^2\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\sum(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum(y_i-\overline{y})^2\sqrt{\sum(x_i-\overline{x})^2}}}\right)^2\leq 1\Leftrightarrow$$

$$r^2 \le 1 \Leftrightarrow$$
$$|r| \le 1 \Leftrightarrow$$
$$-1 \le r \le 1.$$

Συσχέτιση δε σημαίνει αιτιότητα

Επειδή το r παριστά μια εκτιμήτρια της αντίστοιχης παραμέτρου του πληθυσμού, θα πρέπει να ερμηνεύεται με τον τρόπο που αναφέρθηκε μόνο όταν στηρίζεται σε ένα τυχαίο δείγμα του πληθυσμού. Επομένως, ένας συντελεστής συσχέτισης δεν έχει μεγάλη χρησιμότητα σε πειραματικά δεδομένα, όπου οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι σταθερές και επιλέγονται από τον ερευνητή.

Αιτιολογικά συμπεράσματα δεν μπορούν να ληφθούν (εκτός ελάχιστων εξαιρέσεων) χωρίς πειραματισμό. Συνεπώς, όταν δύο μεταβλητές *X* και *Y* βρίσκονται συσχετισμένες στη φύση, αυτό σημαίνει μόνο ότι οι μεταβλητές αυτές συνδέονται με κάποια σχέση. Δε συνεπάγεται μια **αιτιολογική σχέση**. Υπάρχει περίπτωση η αλλαγή της μεταβλητής *X* να προκαλεί άμεσα αλλαγή της *Y*. Αλλά πολύ συχνά οι αλλαγές των δύο μεταβλητών *X* και *Y* οφείλονται σε κάποιες άλλες μεταβλητές ή σε κάποιους αστάθμητους παράγοντες.

Για παράδειγμα στην Αμερική, πριν εισαχθεί το εμβόλιο Salk κατά της πολιομυελίτιδας, οι ερευνητές εξέταζαν αν υπάρχει σχέση ανάμεσα στην εμφάνιση της πολιομυελίτιδας και του αριθμού των πωληθέντων αναψυκτικών. Για κάθε εβδομάδα του έτους κατέγραφαν σ’ ένα πίνακα τον αριθμό των αναψυκτικών που καταναλώθηκαν τη συγκεκριμένη εβδομάδα και τον αριθμό των νέων περιστατικών πολιομυελίτιδας που είχαν αναφερθεί. Τα δεδομένα αυτά εμφάνιζαν ισχυρή θετική συσχέτιση ανάμεσα στον αριθμό των περιστατικών της πολιομυελίτιδας (μεταβλητή *Y*) και τον αριθμό των πωληθέντων αναψυκτικών (μεταβλητή *X*). Τις εβδομάδες που είχαν καταναλωθεί περισσότερα αναψυκτικά, είχαν εκδηλωθεί περισσότερα νέα περιστατικά πολιομυελίτιδας. Όταν η κατανάλωση των αναψυκτικών ήταν μειωμένη, υπήρχαν λιγότερα νέα περιστατικά. Προκαλούν λοιπόν τα αναψυκτικά εμφάνιση πολιομυελίτιδας; Αν ήταν έτσι, με την απαγόρευση της πώλησής τους θα έπρεπε να μειώνεται και η εμφάνιση της νόσου. Ολοφάνερα η απάντηση είναι αρνητική. Η επιδημία της πολιομυελίτιδας παρουσιάζει έξαρση το καλοκαίρι, που συμβαίνει να έχουμε και αύξηση της κατανάλωσης των αναψυκτικών. Έτσι εντοπίστηκε ένας τρίτος παράγοντας, η εποχή του έτους που είναι καθοριστικός και για τις δύο μεταβλητές *Y* και *X*. Ο συντελεστής συσχέτισης των *Y* και *X* απλώς επηρεαζόταν από αυτόν τον παράγοντα ο οποίος επηρέαζε ταυτόχρονα τόσο τη μεταβλητή *Y* (αριθμός περιστατικών της νόσου) όσο και τη μεταβλητή *X* (αριθμός των καταναλωθέντων αναψυκτικών).

Γενικά, με τη διδασκαλία αυτού του κεφαλαίου επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να κατακτήσουν το βασικό λεξιλόγιο της Στατιστικής, με το οποίο θα είναι ικανοί να κατανοούν βασικά θέματα της Στατιστικής, αλλά και να διατυπώνουν τις απόψεις τους για τα θέματα αυτά.
- Να μπορούν να διαβάζουν με ορθό τρόπο, αλλά και να κατασκευάζουν οι ίδιοι στατιστικά διαγράμματα.
- Να μπορούν να βρίσκουν τα μέτρα θέσης και διασποράς μιας κατανομής, αλλά και να γνωρίζουν την αξία και τα όρια των μέτρων αυτών.
- Να μπορούν να διαπιστώνουν το βαθμό συσχέτισης δύο μεταβλητών και να προβλέπουν τις τιμές της μιας από τις τιμές της άλλης, προσδιορίζοντας την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Από το κεφάλαιο 2 **δε θα διδαχτούν**:
  α) Οι κλάσεις άνισου πλάτους (σελ. 74)
  β) Τα εκατοστημόρια (σελ. 89) και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος (σελ. 92)
  γ) Η επικρατούσα τιμή (σελ. 90, 91)
  δ) Η γραμμική παλινδρόμηση, §2.4
  ε) Η γραμμική συσχέτιση, §2.5.
  στ) Η άσκηση 4 της σελ. 81.
- Κατά την εξέταση ασκήσεων που αναφέρονται σε ομαδοποίηση παρατηρήσεων, οι κλάσεις θα δίδονται υποχρεωτικά.
- Κατά τη διδασκαλία του ιστογράμματος συχνοτήτων **να τονιστεί ιδιαιτέρως** ότι οι παρατηρήσεις στις κλάσεις κατανέμονται **ομοιόμορφα**. Επομένως, αν σε μια κλάση πλάτους c αντιστοιχούν v_i, παρατηρήσεις, τότε σε ένα υποδιάστημα αυτής πλάτους $\boldsymbol{d}$ αντιστοιχούν $v_i \frac{d}{c}$ παρατηρήσεις. Έτσι, για παράδειγμα, στην άσκηση 5 της σελ. 103 οι πωλητές που έκαναν πωλήσεις από 5 χιλιάδες ευρώ μέχρι 6 χιλιάδες ευρώ είναι $14 \cdot \frac{1}{2} = 7$.
- Κατά τη διδασκαλία της διακύμανσης να δίνονται οι τύποι 2 και 4 των σελίδων 93 & 94 αντιστοίχως.

Κεφάλαιο 3. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 19 διδακτικές ώρες.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων προσφέρει τις μεθόδους με τις οποίες προσδιορίζουμε ένα μέτρο της βεβαιότητας, με την οποία αναμένεται να πραγματοποιηθεί ή να μην πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο. Η κατοχή επομένως των βασικών στοιχείων της Θεωρίας των Πιθανοτήτων θα καταστήσει τους αυριανούς πολίτες ικανούς να συλλογίζονται με ψυχραιμία, να κρίνουν και να εκτιμούν με αντικειμενικότητα τα γεγονότα, αφού θα έχουν κατανοήσει ότι υπάρχουν τρόποι για να βρούμε αν κάποια από αυτά είναι περισσότερο πιθανά από κάποια άλλα.

Στην §**3.1** εξηγούνται οι έννοιες του **πειράματος τύχης**, του **δειγματικού χώρου** και του **ενδεχομένου**. Για τα ενδεχόμενα, αφού είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω, ισχύει η γνωστή από την Α΄ Λυκείου άλγεβρα των συνόλων. Πρέπει επομένως οι μαθητές να εξοικειωθούν με τις πράξεις μεταξύ των συνόλων, τις οποίες και να ερμηνεύουν ως αντίστοιχες πράξεις με ενδεχόμενα. Πρέπει επίσης οι μαθητές να κατανοήσουν την αντιστοιχία ανάμεσα στις διάφορες σχέσεις των ενδεχομένων που είναι διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη διατύπωση των ίδιων σχέσεων στη γλώσσα των συνόλων. Για το ξεπέρασμα των δυσκολιών που παρουσιάζονται στον προσδιορισμό του δειγματικού χώρου και των ενδεχομένων πρέπει οι διδάσκοντες για την εποπτική παρουσίασή τους να χρησιμοποιούν τα δεντροδιαγράμματα, τους πίνακες διπλής εισόδου, τα διαγράμματα Venn κτλ., ώστε να οδηγούν τους μαθητές στο να οργανώνουν τη σκέψη τους με συστηματικό και παραστατικό τρόπο.

Για να κατανοήσουν οι μαθητές ότι στη ρίψη δύο νομισμάτων τα αποτελέσματα ΚΓ και ΓΚ είναι διαφορετικά, να εξεταστεί για παράδειγμα το πείραμα στην περίπτωση της ρίψης ενός νομίσματος του ενός ευρώ και ενός των δύο ευρώ.

Τέλος, επειδή σημαντικό ρόλο στον υπολογισμό των πιθανοτήτων παίζει ο διαμερισμός ενός συνόλου σε ανά δύο ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα, πρέπει να κατανοήσουν οι μαθητές τις σχέσεις:

$$A=(A-B)\cup(A\cap B)=(A\cap B')\cup(A\cap B),$$

$$B=(B-A)\cup(B\cap A)=(B\cap A')\cup(B\cap A) \quad \text{και}$$

$$A\cup B=(A\cap B')\cup(A\cap B)\cup(B\cap A').$$

Στην §**3.2** εισάγεται η έννοια της πιθανότητας, η οποία είναι και η βασικότερη έννοια του κεφαλαίου. Επειδή η έννοια αυτή διαμορφώνεται με βάση την έννοια της σχετικής συχνότητας, κρίνεται σκόπιμο να γίνει αναφορά και στην αντίστοιχη έννοια στο κεφάλαιο της Στατιστικής (σελ. 65 του βιβλίου).

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά του πειράματος τύχης είναι η αβεβαιότητα για το ποιο αποτέλεσμα του πειράματος θα εμφανιστεί σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του. Επομένως, αν *Α* είναι ένα ενδεχόμενο, δεν μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε αν το *Α* θα πραγματοποιηθεί ή όχι. Γι' αυτό είναι χρήσιμο να συνδυάσουμε με κάθε ενδεχόμενο *Α* έναν αριθμό, που θα είναι ένα μέτρο της "προσδοκίας" με την οποία αναμένουμε την πραγματοποίηση του *Α*. Τον αριθμό αυτό τον ονομάζουμε πιθανότητα του *Α*. Πώς θα γίνει όμως η "εκχώρηση" των πιθανοτήτων στα διάφορα ενδεχόμενα του πειράματος τύχης; Πώς δηλαδή θα κατασκευάσουμε μια κλίμακα πιθανότητας, με τη βοήθεια της οποίας σε κάθε ενδεχόμενο θα εκχωρούμε την αντίστοιχη πιθανότητα, όπως ακριβώς κάνουμε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας κατασκευάζοντας, για παράδειγμα, τη θερμομετρική κλίμακα Κελσίου;

Συμφωνούμε ότι στην κλίμακα της πιθανότητας στο αδύνατο ενδεχόμενο θα αντιστοιχεί ο αριθμός 0, ενώ στο βέβαιο ενδεχόμενο ο αριθμός 1 (όπως και στην κοινή γλώσσα λέμε για το αδύνατο ενδεχόμενο ότι έχει πιθανότητα 0%, ενώ το βέβαιο 100%). Είναι λογικό να δεχτούμε ότι η πιθανότητα κάθε άλλου ενδεχομένου θα βρίσκεται ανάμεσα στο 0 και στο 1. Πώς θα γίνει όμως η εκχώρηση της πιθανότητας σε ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο; Σε ένα πείραμα που υπάρχει το στοιχείο της "συμμετρίας" είναι λογικό να υποθέσουμε ότι τα απλά ενδεχόμενα του πειράματος είναι ισοπίθανα, οπότε η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου Α με κ στοιχεία θα τείνει στον αριθμό $\frac{\kappa}{\nu}$ και το όριο αυτό το ορίζουμε και ως πιθανότητα του Α, δηλαδή $P(A)=\frac{\kappa}{\nu}$, που αποτελεί και τον **κλασικό ορισμό** της πιθανότητας. Η *P(A)* που ορίζεται με αυτό τον τρόπο ικανοποιεί τις απαιτήσεις μιας κλίμακας πιθανότητας, αφού ισχύουν:

- $0 \le P(A) \le 1$
- $P(\Omega)=1$
- $P(\varnothing)=0$

Πώς όμως γίνεται η εκχώρηση των πιθανοτήτων, όταν ο δειγματικός χώρος αποτελείται από μη ισοπίθανα αποτελέσματα ή έχει άπειρο πλήθος στοιχείων; Στις περιπτώσεις αυτές η Θεωρία των Πιθανοτήτων χρησιμοποιεί τον ορισμό που αναφέρεται στην αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας των Πιθανοτήτων, η οποία έγινε από τον A.N. Kolmogoroff. Σύμφωνα με τη θεμελίωση αυτή, αν Ω είναι ένας δειγματικός χώρος και D η αντίστοιχη κλάση των ενδεχομένων, τότε μέτρο πιθανότητας ονομάζεται κάθε συνάρτηση

$$P: D \to R$$

για την οποία ισχύουν οι ιδιότητες:

- $0 \leq P(A) \leq 1$, για κάθε $A \in D$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, αν $A \cap B = \varnothing$

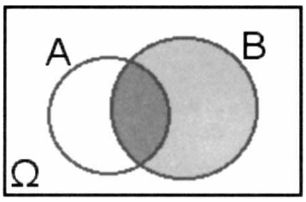
Η θεωρία του Kolmogoroff έχει το πλεονέκτημα να είναι φυσική, απλή και να ικανοποιεί τις σύγχρονες απαιτήσεις της αυστηρότητας. Συνδέει τη Θεωρία των Πιθανοτήτων με τη Θεωρία του Μέτρου και της Ολοκλήρωσης και έτσι εφοδιάζεται με ισχυρά εργαλεία και τεχνικές από άλλους αναπτυγμένους κλάδους των Μαθηματικών. Πέραν τούτου η αυστηρή θεμελίωση ήταν αυτή που επέτρεψε την αλματώδη ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων.

Όμως, στο διδακτικό βιβλίο υιοθετήθηκε για διδακτικούς λόγους ο απλούστερος αξιωματικός ορισμός που αναφέρεται στη σελίδα 149, άμεση συνέπεια του οποίου είναι και οι παραπάνω ιδιότητες, οι οποίες αναφέρονται στον ορισμό κατά Kolmogoroff.

Η παράγραφος **3.2** ολοκληρώνεται με τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων, οι οποίοι αποδεικνύονται για δειγματικούς χώρους με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Είναι σκόπιμο να δοθεί έμφαση στην εποπτική ερμηνεία των κανόνων αυτών.

Η §**3.3** αναφέρεται στη Συνδυαστική, όπου παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες που είναι απαραίτητες για την επίλυση προβλημάτων απαρίθμησης. Πρέπει να γίνει σαφές στους μαθητές ότι τα προβλήματα αυτά λύνονται κυρίως με τη βοήθεια της **βασικής αρχής απαρίθμησης**, η οποία και αποτελεί το κυρίαρχο "εργαλείο" για την απαρίθμηση. Οι τύποι διατάξεων απλώς συντομεύουν τη λύση ορισμένων προβλημάτων.

Οι βασικές σχέσεις των συνδυασμών $\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu}{\nu-\kappa}$ (σελίδα 164, άσκηση 5, Α΄ Ομάδας) και $\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu-1}{\kappa}+\binom{\nu-1}{\kappa-1}$ (σελίδα 174 άσκηση 3, Γενικές ασκήσεις) αποδεικνύονται στο τεύχος των λύσεων αλγεβρικά. Είναι χρήσιμο όμως να εξηγηθεί στους μαθητές ότι η πρώτη από αυτές προκύπτει, αν παρατηρήσουμε ότι σε κάθε συνδυασμό με κ στοιχεία αντιστοιχεί ένας συνδυασμός με $\nu-\kappa$ στοιχεία, ενώ η δεύτερη, αν παρατηρήσουμε ότι το σύνολο των συνδυασμών με κ στοιχεία αποτελείται από τους συνδυασμούς που περιλαμβάνουν ένα ορισμένο στοιχείο, οι οποίοι είναι σε πλήθος $\binom{\nu-1}{\kappa-1}$, και από τους συνδυασμούς που δεν περιλαμβάνουν το στοιχείο αυτό, οι οποίοι είναι σε πλήθος $\binom{\nu-1}{\kappa}$.



Στην §**3.4** εισάγονται οι έννοιες της δεσμευμένης πιθανότητας και των ανεξάρτητων ενδεχομένων.

Κατά τη διδασκαλία της ενότητας αυτής θα πρέπει να δειχτεί εποπτικά πώς μεταβάλλεται ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος, όταν είναι δεδομένο ότι έχει πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο. Συγκεκριμένα, αν είναι γνωστό για παράδειγμα ότι έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο $B\neq\varnothing$ τότε ο δειγματικός χώρος Ω περιορίζεται στο B και επομένως οι ευνοϊκές περιπτώσεις για το A θα είναι τα στοιχεία του $A\cap B$.

Επομένως, στην περίπτωση που ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά αποτελέσματα έχουμε

$$P(A \mid B)=\frac{N(A\cap B)}{N(B)}=\frac{N(A\cap B)/N(\Omega)}{N(B)/N(\Omega)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα με δεδομένο το $B\neq\varnothing$, ικανοποιεί τα αξιώματα του μέτρου πιθανότητας. Πράγματι:

- Για κάθε ενδεχόμενο A έχουμε $A\cap B\subseteq B$ και επομένως

  $0\le P(A\cap B)\le P(B)$, οπότε $0\le\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\le 1$, που σημαίνει ότι

  $\mathbf{0\le P(A|B)\le 1}$.

- Για το βέβαιο ενδεχόμενο Ω έχουμε $\Omega \cap \mathrm{B} = \mathrm{B}$, και επομένως $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$, δηλαδή $\boldsymbol{P(\Omega|B) = 1}$.

- Αν $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ τότε $(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \varnothing$,
  και επειδή $(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$,
  έχουμε
$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2|B) &= \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{+P(A_2 \cap B)}{P(B)} \\ &= P(A_1|B) + P(A_2|B) \end{aligned}$$

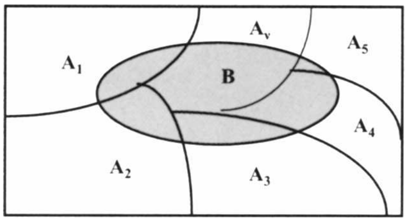
δηλαδή, αν A_1 και A_2 **ξένα μεταξύ τους**, τότε ισχύει

$$\boldsymbol{P(A_1 \cap A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)}.$$

Από την έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας προκύπτει ο πολλαπλασιαστικός νόμος των πιθανοτήτων $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$ και από τις ισότητες αυτές οδηγούμαστε στον ορισμό των ανεξάρτητων ενδεχομένων. Δύο ενδεχόμενα λέγονται ανεξάρτητα, όταν η πληροφορία για την πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου. Αυτό σημαίνει ότι $P(A|B) = P(A)$ και $P(B|A) = P(B)$, οπότε ο πολλαπλασιαστικός νόμος των πιθανοτήτων γίνεται $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, εξίσωση με την οποία μπορούν να οριστούν και τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα, χωρίς μάλιστα τους περιορισμούς $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$.

Είναι σκόπιμο να εξηγηθεί με κατάλληλα παραδείγματα η μεγάλη χρησιμότητα του πολλαπλασιαστικού νόμου και των δεντροδιαγραμμάτων στην επίλυση προβλημάτων πιθανοτήτων.

Η εφαρμογή 2 της σελίδας 169 είναι ένα παράδειγμα εφαρμογής του τύπου της **ολικής πιθανότητας** και του **Θεωρήματος του Bayes** (Μπάγες) (1720-1761):



Αν $A_1, A_2, ..., A_\nu$ είναι μια διαμέριση ενός δειγματικού χώρου *Ω* (δηλαδή τα ενδεχόμενα $A_i,\ i = 1,2,...,\nu$ είναι ξένα ανά δύο μεταξύ τους και η ένωσή τους είναι ο Ω), τότε για οποιοδήποτε ενδεχόμενο *B* ισχύει

$$\begin{aligned} B &= \Omega \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_\nu) \cap B \\ &= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup ... \cup (A_\nu \cap B), \end{aligned}$$

όπου τα $A_i \cap B,\ i = 1,2,...,\nu$ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους. Επομένως,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_\nu \cap B).$$

και με εφαρμογή του πολλαπλασιαστικού νόμου έχουμε

$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + ... + P(A_\nu) \cdot P(B|A_\nu)$ (1),

που είναι ο νόμος της ολικής πιθανότητας.

Επίσης, για κάθε *i* έχουμε $P(A_i|B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$. Αν στην ισότητα αυτή αντικαταστήσουμε την *P(B)* με τη βοήθεια της (1) και λάβουμε υπόψη ότι $P(A_i \cap B) + P(A_i) \cdot P(B|A_i)$, τότε προκύπτει ότι:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \cdot P(A_2) \cdot P(B|A_2) + ... + P(A_\nu) \cdot P(B|A_\nu)}$$

που είναι το θεώρημα του Bayes.

Επειδή οι μαθητές αναμένεται να συναντήσουν δυσκολίες σε προβλήματα δεσμευμένης πιθανότητας, πρέπει ο διδάσκων να τους διευκολύνει να "δουν" τη λύση με τη βοήθεια δεντροδιαγραμμάτων.

Γενικά, με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να κατακτήσουν το βασικό λεξιλόγιο της Θεωρίας των Πιθανοτήτων.
- Να κατανοήσουν την έννοια της πιθανότητας και να μπορούν να επιλύουν απλά προβλήματα πιθανοτήτων.

- Να μπορούν να χρησιμοποιούν τις βασικές τεχνικές της Συνδυαστικής για την απαρίθμηση των στοιχείων του δειγματικού χώρου και των στοιχείων των ενδεχομένων.
- Να κατανοήσουν τις έννοιες της δεσμευμένης πιθανότητας και της ανεξαρτησίας των ενδεχομένων και να τις χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από το Κεφάλαιο 3 **δε θα διδαχτεί** η παράγραφος 3.4 με τίτλο: «**Δεσμευμένη πιθανότητα-Ανεξάρτητα ενδεχόμενα**».

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ "ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ"

Κεφάλαιο 1

1. Β
2. Γ
3. Δ
4. Β
5. Γ
6. Δ
7. Γ
8. Δ
9. (0,0), (1,-1), (3,3)
10. (i) 0, (ii) 0, (iii) 2.
(iv) Δεν υπάρχει, (v) 0,
(vi) 3, (vii) 1
11. (i) -2, (ii) ± 3, (iii) $2\kappa\pi \pm \pi/6$
12. (α)-1, (β)-11, (γ) 8, (δ)-8
13. 28
14. (1)(β) (2)(δ) (3)(α) (4)(γ)

Κεφάλαιο 2

1. Λ
2. Σ
3. Λ
4. Λ
5. Λ
6. Σ
7. Λ (πολ/ζεται επί την $|c|$)
8. Σ
9. Λ
10. Λ
11. Σ
12. Λ (αν $\widehat{\beta}>0$ αύξηση αν $\widehat{\beta}<0$ μείωση)
13. Λ
14. Σ
15. Β
16. Δ
17. Α
18. Γ
19. Γ
20. Γ
21. Α
22. Β
23. Γ
24. Β
25. (α) (i), (β) (iii), (γ) (ii)
26. (α) (i), (β) (iv), (γ) (iii)
27. (α), (β), (στ)→(i), (γ), (δ), (ε) → (ii)
28. (α) (ii), (β) (iii) (γ) (i),
29. (α) (ii), (β) (iii), (γ) (i),(δ) (ii), (ε) (ii)
30. (i) (β), (ii) (γ), (iii) (δ), (iv) (α)
31. (α) (iii), (β) (i), (γ) (ii)
32. (α) (ii), (β)(i), (γ) (iii)
33. (α) (iv), (β) (i), (γ) (iii), (δ) (ii)
34. (α) (i), (β) (iii), (γ) (ii)
35. (α) Σ, (β) Σ, (γ) Σ, (δ) Λ

Κεφάλαιο 3

1. Η έκφραση: μια "κεφαλή" και μια "γράμματα" περιλαμβάνει δυο περιπτώσεις, τις ΚΓ και ΓΚ.
2. Είναι μικρός ο αριθμός των δοκιμών, για να βγάλουμε ένα τέτοιο συμπέρασμα.
3. (α) Το κάθε ζάρι έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί
(β) 3 · 6.
4. (γ)
5. (β)
6. (δ)
7. (δ)
8. Σ
9. Λ
10. Λ
11. Λ
12. Λ
13. Σ
14. $P(A\cap B)\to 0,\ P(A\cup B)\to 0{,}8,$
$P(A/B)\to 0,\ P(B/A)\to 0$
15. $P(A\cap B)\to 0{,}12,$
$P(A\cup B)\to 0{,}68,$
$P(A/B)\to 0{,}6,\ P(B/A)\to 0{,}2$
16. Όχι, διότι θα ισχύει $P(A\cup B)=1{,}3,$ που είναι άτοπο.

ΙΙ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ &ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ώρες: 5 εβδομαδιαίως

Θα διδαχθεί το βιβλίο "ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ" των: Ανδρεαδάκη Σ., Κατσαργύρη Β., Μέτη Σ., Μπρουχούτα Κ., Παπασταυρίδη Σ. και Πολύζου Γ.

Για την πληρέστερη ενημέρωση των διδασκόντων δίνονται ειδικότερες οδηγίες για κάθε κεφάλαιο.

Οι οδηγίες κατά κεφάλαιο έχουν ως εξής:

ΜΕΡΟΣ Α΄

Κεφάλαιο 1. Το κεφάλαιο αυτό **δε θα διδαχτεί**.

Κεφάλαιο 2. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 12 διδακτικές ώρες.

Στην αρχή του κεφαλαίου διαπιστώνεται η ανάγκη διεύρυνσης του $\mathbb{R}$ σε ένα σύνολο $\mathbb{C}$ στο οποίο να έχουν λύση οι εξισώσεις 2^{ου} βαθμού με αρνητική διακρίνουσα. Το νέο σύνολο $\mathbb{C}$ εφοδιάζεται με πράξεις αντίστοιχες με αυτές του $\mathbb{R}$ οι οποίες έχουν τις ίδιες ιδιότητες στα δύο σύνολα. Στη συνέχεια γίνεται γεωμετρική ερμηνεία των στοιχείων του $\mathbb{C}$ τα οποία ονομάζονται μιγαδικοί αριθμοί. Η γεωμετρική ερμηνεία είναι αυτή που θα βοηθήσει τους μαθητές να εμπεδώσουν την έννοια των μιγαδικών αριθμών, αλλά και θα τους προσφέρει γόνιμες ιδέες και ερεθίσματα που καλλιεργούν την ερευνητική τους διάθεση.

Ακολουθούν οι πράξεις με μιγαδικούς, οι δυνάμεις μιγαδικών, οι συζυγείς μιγαδικοί και η επίλυση της εξίσωσης 2^{ου} βαθμού που αποτελούν μια ενότητα. Δεν γίνεται αναφορά στην ύπαρξη του αντιστρόφου, ούτε στον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας μιγαδικού και γενικότερα δεν δίνεται ιδιαίτερη σημασία στις ιδιότητες των πράξεων που καθορίζουν τη δομή ενός σώματος, αλλά στην τεχνική της εκτέλεσής τους.

Η επόμενη ενότητα αναφέρεται στο μέτρο των μιγαδικών. Δίνεται ιδιαίτερη σημασία στις γεωμετρικές εφαρμογές του μέτρου και έτσι αναδεικνύεται η συνάφεια των μιγαδικών με τις γεωμετρικές έννοιες. Στην παράγραφο αυτή πρέπει να τονιστεί ότι το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών παριστάνει την απόσταση των εικόνων τους στο μιγαδικό επίπεδο και συνεπώς η εξίσωση:

- $|z-z_0|=a$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο $K(z_0)$ και ακτίνα α
- $|z-z_1|=|z-z_2|$ παριστάνει τη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

Το κεφάλαιο συνεχίζεται με την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών, η οποία είναι χρήσιμη στον υπολογισμό μεγάλων δυνάμεων στο $\mathbb{C}$, στη γεωμετρική ερμηνεία των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης μιγαδικών και στην επίλυση εξισώσεων.

Η τελευταία ενότητα του κεφαλαίου είναι οι πολυωνυμικές εξισώσεις. Στις πολυωνυμικές εξισώσεις, να επιλυθεί πρώτα η εξίσωση $z^\nu=1,$ όπου ν θετικός ακέραιος, και ως εφαρμογή αυτής να ακολουθήσει η επίλυση της εξίσωσης $z^\nu=a,$ όπου ν θετικός ακέραιος και ***α* πραγματικός αριθμός** διαφορετικός του μηδενός. Η επίλυση να γίνει ως εξής:

Ο μη μηδενικός πραγματικός αριθμός α έχει τριγωνομετρική μορφή:

$$a=|a|(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta),\qquad \text{με}\quad \theta=\begin{cases}0, & \alpha\nu\ \alpha>0\\ \pi, & \alpha\nu\ \alpha<0\end{cases}$$

οπότε παίρνει τη μορφή:

$$a=\left(\sqrt[\nu]{|a|}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{\nu}+i\eta\mu\frac{\theta}{\nu}\right)\right)^\nu=z_0^\nu,\quad \text{όπου}$$

$$z_o=\sqrt[\nu]{|a|}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{\nu}+i\eta\mu\frac{\theta}{\nu}\right),\qquad \text{με}\quad \theta=\begin{cases}0, & \alpha\nu\ \alpha>0\\ \pi, & \alpha\nu\ \alpha<0\end{cases}$$

Έτσι η εξίσωση $z^\nu=a$ γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned} z^\nu=a &\Leftrightarrow z^\nu=z_0^\nu\\ &\Leftrightarrow\left(\frac{z}{z_0}\right)^\nu=1\\ &\Leftrightarrow\frac{z}{z_0}\ \text{νιοστή ρίζα της μονάδας}\\ &\Leftrightarrow\frac{z}{z_0}\omega^\kappa,\kappa=0,1,2,...,\nu-1\\ &\Leftrightarrow z=z_k=z_0\omega^\kappa,k=0,1,2,...,\nu-1\end{aligned}$$

Άρα οι νιοστές ρίζες του αριθμού α είναι οι νιοστές ρίζες της μονάδας πολλαπλασιασμένες με το μιγαδικό z_0. Έτσι, για παράδειγμα:

- Η εξίσωση $z^4 = 16$, επειδή $z_o = \sqrt[4]{16}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{0}{4} + i\eta\mu\frac{0}{4}\right) = 2$, έχει

  τέσσερις ρίζες, τους αριθμούς:

  $z_k = 2\omega^\kappa, k = 0,1,2,3$ όπου $\omega = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{4} + i\eta\mu\frac{2\pi}{4} = i$

- Η εξίσωση $z^4 = -16$, επειδή $z_o = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} + i\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)$, έχει

  τέσσερις ρίζες, τους αριθμούς:

  $z_k = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} + i\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)\omega^k, k = 0,1,2,3,$ όπου

  $\omega = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{4} + i\eta\mu\frac{2\pi}{4} = i.$

Τέλος, επιλύονται πολυωνυμικές εξισώσεις με πραγματικούς συντελεστές.

Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

1. Να γνωρίζουν:
   α) την έννοια του μιγαδικού αριθμού και
   β) πότε δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι.

2. Να μπορούν να βρίσκουν:
   α) το άθροισμα, το γινόμενο, τη διαφορά και το πηλίκο μιγαδικών αριθμών.
   β) το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού και να λύνουν προβλήματα σε συνδυασμό με τις κωνικές τομές.

3. Να γνωρίζουν:
   α) την έννοια του συζυγούς ενός μιγαδικού αριθμού.
   β) ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών αριθμών.

4. Να μπορούν να γράφουν ένα μιγαδικό αριθμό σε τριγωνομετρική μορφή και να υπολογίζουν:
   α) το γινόμενο και το πηλίκο μιγαδικών αριθμών που είναι γραμμένοι σε τριγωνομετρική μορφή.
   β) ακέραιες δυνάμεις μιγαδικών αριθμών που είναι γραμμένοι σε τριγωνομετρική μορφή (Τύπος De Moivre).

5. Να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις της μορφής $z^{\nu}=a$ με $a \in \mathbb{R}$ και απλές πολυωνυμικές εξισώσεις με **πραγματικούς** συντελεστές.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Δεν θα διδαχθούν οι παράγραφοι 2.4 «**Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού**» και 2.5 «**Πολυωνυμικές εξισώσεις στο** $\mathbb{C}$ ».

ΜΕΡΟΣ Β΄

Κεφάλαιο 1. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 24 διδακτικές ώρες.

Το κεφάλαιο αυτό αποτελείται από τρεις επιμέρους ενότητες:
α) Τις βασικές έννοιες της ανάλυσης,
β) Το όριο συνάρτησης σε ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και
γ) Τη συνέχεια συνάρτησης.

Α) Το περιεχόμενο της πρώτης ενότητας είναι σημείο αναφοράς για τα επόμενα. Οι περισσότερες από τις έννοιες που περιέχονται στην ενότητα αυτή είναι ήδη γνωστές στους μαθητές. Γι' αυτό η διδασκαλία δεν πρέπει να στοχεύει στην εξυπαρχής αναλυτική παρουσίαση γνωστών εννοιών, αλλά στο να δίνει "αφορμές" στους μαθητές να ανατρέχουν στα βιβλία των προηγούμενων τάξεων και να επαναφέρουν στη μνήμη τους γνωστές έννοιες και προτάσεις που θα τις χρειαστούν στα επόμενα.

Επισημαίνεται ότι το πεδίο ορισμού κάθε συνάρτησης είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Οι εφαρμογές και οι ασκήσεις που αναφέρονται στην εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης, έχουν σκοπό την άσκηση των μαθητών στην επίλυση ανισώσεων, των οποίων γίνεται χρήση και στα επόμενα κεφάλαια.

Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης προσδιορίζεται, όταν χρειάζεται, μόνο με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Αργότερα, βέβαια, για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιηθεί και η παράγωγος.

Η μονοτονία και τα ακρότατα μιας συνάρτησης, που περιλαμβάνονται στην ενότητα αυτή, μελετώνται διεξοδικά στο κεφ. 2 με τη βοήθεια των παραγώγων.

Β) Στη δεύτερη ενότητα του κεφαλαίου αυτού εισάγεται εποπτικά με κατάλληλα παραδείγματα η έννοια του ορίου συνάρτησης f στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Προϋπόθεση για την ύπαρξη του ορίου μιας συνάρτησης στο x_0 είναι να ορίζεται σ' ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (a, x_0) ή (x_0, β).

Κατά την εποπτική διδασκαλία του ορίου, για οικονομία χρόνου, συνιστάται τα σχήματα και η ερμηνεία τους να γίνονται με διαφάνειες ή με φωτοτυπίες, που θα μοιραστούν στους μαθητές, ή ακόμα και μέσα από ανοικτά βιβλία.

Επισημαίνεται εδώ ότι η διδασκαλία του ορίου **δεν αποτελεί αυτοσκοπό** αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή στις έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος που αποτελούν και το κέντρο βάρους του Β΄ μέρους. Γι' αυτό **πρέπει να αποφεύγεται** η άσκοπη ασκησιολογία και η λύση ασκήσεων με τη βοήθεια του ορισμού του ορίου συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbf{R}$. Ο προσδιορισμός του ορίου συνάρτησης πρέπει να γίνεται με εφαρμογή των ιδιοτήτων των ορίων. Όρια τα οποία υπολογίζονται ευκολότερα με τον κανόνα De L' Hospital, να διδαχτούν αργότερα (κεφ. 2) με τη βοήθεια του κανόνα αυτού. Ο ορισμός του ορίου συνάρτησης στο x_0 αναγράφεται μόνο για την πληρότητα του κεφαλαίου αυτού.

Επίσης εποπτικά ορίζεται η έννοια του μη πεπερασμένου ορίου συνάρτησης στο $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, ενώ τα όρια προσδιορίζονται και στην περίπτωση αυτή μόνο με τη βοήθεια των ιδιοτήτων τους. Ο ορισμός αναγράφεται μόνο για την πληρότητα του βιβλίου.

ΣΧΟΛΙΟ

Κατά τον υπολογισμό του $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x))$, είναι αναγκαίο να ισχύει

$g(x) \neq u_0$, κοντά στο x_0,

Πράγματι, ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις f, g με

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 1, & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}.$$

Τότε

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ x \neq 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases},$$

Οπότε, για $x_0 = 0$, έχουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{x \to 0} f(g(x)) = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

Όμως $u_0 = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0,$ οπότε

$$\lim_{u \to u_0} f(u) = \lim_{u \to 0} f(u) = \lim_{u \to 0} 0 = 0.$$

Έτσι, έχουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) \neq \lim_{u \to 0} f(u)$$

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι

$g(x) = u_0 = 0,$ κοντά στο x_0.

Γ) Στην τρίτη και τελευταία ενότητα του κεφαλαίου αυτού παρουσιάζεται εποπτικά η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Τα θεωρήματα Bolzano και ενδιάμεσης τιμής χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό του πρόσημου μιας συνεχούς συνάρτησης f στο πεδίο ορισμού της καθώς και για να διαπιστωθεί αν η εξίσωση $f(x) = 0, x \in [a, \beta]$ έχει ρίζες στο (a, β). Επισημαίνεται, ότι **ο υπολογισμός του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης καθώς και της μέγιστης και ελάχιστης τιμής της θα γίνει με τη βοήθεια των παραγώγων.**

Σε γενικές γραμμές, με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

1. Να μπορούν να βρίσκουν από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης:
   - το πεδίο ορισμού της
   - το σύνολο τιμών της
   - την τιμή της σ' ένα σημείο x_0.

2. Να γνωρίζουν τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων.

3. Να μπορούν να βρίσκουν το άθροισμα, το γινόμενο, το πηλίκο και τη σύνθεση απλών συναρτήσεων.

4. Να γνωρίζουν την έννοια της συνάρτησης "1–1", τις βασικές ιδιότητες της και να κατανοήσουν τη διαδικασία εύρεσης της αντίστροφης μιας απλής συνάρτησης. Να γνωρίζουν, επιπλέον, ότι οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων.

5. Να μπορούν να εκφράζουν, με τη βοήθεια συνάρτησης, τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι τιμές δύο μεγεθών σε διάφορα προβλήματα.

6. Να μπορούν να βρίσκουν το όριο μιας συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$, όταν δίνεται η γραφική της παράσταση.
7. Να γνωρίζουν τις ιδιότητες του ορίου συνάρτησης και με τη βοήθειά τους να υπολογίζουν τα όρια απλών συναρτήσεων.
8. Να μπορούν να διαπιστώνουν την ύπαρξη μη πεπερασμένων ορίων συναρτήσεων από τη γραφική τους παράσταση.
9. Να μπορούν να υπολογίζουν τα όρια πολυωνυμικών ή ρητών συναρτήσεων στο $+\infty$ και στο $-\infty$.
10. Να γνωρίζουν τις γραφικές παραστάσεις της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης και τα όρια τα σχετικά με τις συναρτήσεις αυτές.
11. Να γνωρίζουν την έννοια της ακολουθίας και την έννοια του ορίου ακολουθίας.
12. Να κατανοήσουν την έννοια της συνέχειας συνάρτησης σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.
13. Να αναγνωρίζουν τη συνέχεια μιας συνάρτησης f σε σημείο ή διάστημα, από τη γραφική παράστασή της.
14. Να γνωρίζουν τις βασικές συνεχείς συναρτήσεις και ότι το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο, το πηλίκο καθώς και η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.
15. Να γνωρίζουν τα βασικά θεωρήματα: Bolzano, ενδιάμεσης τιμής και μέγιστης - ελάχιστης τιμής, όταν η συνάρτηση ορίζεται σε κλειστό διάστημα και να μπορούν να τα εφαρμόζουν, στην εύρεση του πρόσημου μιας συνεχούς συνάρτησης, στην εύρεση του συνόλου τιμών και του πλήθους των ριζών συναρτήσεων των οποίων είναι γνωστά τα διαστήματα μονοτονίας και το είδος της μονοτονίας.

Κεφάλαιο 2. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 35 διδακτικές ώρες.

Στο κεφάλαιο αυτό, καθώς και στο επόμενο, καταβάλλεται κάθε προσπάθεια για την υλοποίηση του κύριου στόχου της διδασκαλίας της Ανάλυσης που είναι: η χρήση της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης στις εφαρμογές. Με αφορμή την προσπάθεια για τον ορισμό της εφαπτομένης μιας καμπύλης $y = f(x)$ σε ένα σημείο της και της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινητού εισάγεται η έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο της. Έτσι καθορίζεται η γεωμετρική σημασία της παραγώγου της $y = f(x)$ σ' ένα σημείο της, που είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της στο σημείο αυτό, καθώς και η φυσική σημασία της παραγώγου, που είναι ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους π.χ. στιγμιαία ταχύτητα, ένταση ρεύματος κτλ.

Σ' όλο το κεφάλαιο γίνεται ευρεία χρήση της εποπτικής παρουσίασης των διαφόρων προτάσεων, ενώ οι εξειδικευμένες αποδείξεις παραλείπονται. Ακόμη, το κεφάλαιο είναι εμπλουτισμένο με πολλές εφαρμογές του Διαφορικού Λογισμού στη Γεωμετρία και τις άλλες επιστήμες.

Σε γενικές γραμμές, με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

1. Να γνωρίσουν τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης σ' ένα σημείο x_0 και να την ερμηνεύουν ως ρυθμό μεταβολής.

2. Να γνωρίζουν τις έννοιες ταχύτητα και επιτάχυνση κινητού, οριακό κόστος, οριακή είσπραξη, οριακό κέρδος και τη σχέση τους με την έννοια της παραγώγου.

3. Να γνωρίζουν σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης ορίζεται η εφαπτομένη και να μπορούν κάθε φορά να σχηματίζουν την εξίσωση της.

4. Να γνωρίζουν:
- ότι κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση σε σημείο x_0 είναι συνεχής στο σημείο αυτό
- Τις παραγώγους βασικών συναρτήσεων
- Τον κανόνα της αλυσίδας και
- Να μπορούν με τη βοήθειά τους να βρίσκουν παραγώγους συναρτήσεων.

5. Να κατανοήσουν τα θεωρήματα Rolle, Μέσης Τιμής και Fermat και να μπορούν να τα εφαρμόζουν σε απλές ασκήσεις.

6. Να μπορούν να προσδιορίζουν τα διαστήματα στα οποία μια συνάρτηση είναι:
- Σταθερή
- Γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα
- Κυρτή ή κοίλη
- και να βρίσκουν:
  α) Τα τοπικά ακρότατα και
  β) Τα σημεία καμπής της.

7. Να μπορούν να βρίσκουν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης και το σύνολο λύσεων μιας εξίσωσης $f(x)=0$.

8. Να μπορούν να εφαρμόζουν τους κανόνες de L' Hospital στον υπολογισμό ορίων.

9. Να μπορούν να βρίσκουν τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.
10. Να μπορούν να χαράζουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με τη βοήθεια των παραγώγων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Κατά τη διδασκαλία του 2^{ου} κεφαλαίου

- **Να μη διδαχτούν:**
  α) Η υποπαράγραφος με τίτλο «Κατακόρυφη εφαπτομένη».
  β) Η απόδειξη του θεωρήματος της σελίδας 262 και
  γ) Το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου (Θεώρημα σελ. 264).
- Η μελέτη των κυρτών, κοίλων και σημείων καμπής να περιοριστεί σε **συνεχείς** συναρτήσεις που είναι **δυο, τουλάχιστον, φορές παραγωγίσιμες** σε κάθε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού τους.

Κεφάλαιο 3. Προτείνεται να διατεθούν μέχρι 32 διδακτικές ώρες.

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζεται πρώτα η παράγουσα και το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης και στη συνέχεια η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος με το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού ενός παραβολικού χωρίου. Ο τρόπος αυτός εισαγωγής του ολοκληρώματος, μολονότι δε συμφωνεί με την ιστορική εξέλιξη της έννοιας του ολοκληρώματος, εξυπηρετεί τη διδακτική πράξη. Γιατί, εφόσον προηγείται η παραγώγιση, είναι εύλογο να ακολουθήσει αμέσως το αόριστο ολοκλήρωμα ως αποτέλεσμα της αντίστροφης διαδικασίας της παραγώγισης. Επιπλέον, με τη διάταξη αυτή της ύλης, είναι δυνατόν από πολύ νωρίς να γίνονται εφαρμογές του ολοκληρωτικού λογισμού οι οποίες ανάγονται στη λύση απλών ''διαφορικών εξισώσεων". Οι διαφορικές εξισώσεις που μελετώνται στο κεφάλαιο αυτό είναι οι: α) διαφορικές εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές και β) οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως.

Ειδικότερα με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

1. Να κατανοήσουν τις έννοιες
- Παράγουσα ή αρχική συνάρτηση
- Αόριστο ολοκλήρωμα
- και να μπορούν να υπολογίζουν απλά αόριστα ολοκληρώματα με τη βοήθεια των μεθόδων ολοκλήρωσης.

2. Να επιλύουν προβλήματα στα οποία δίνεται ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους ως προς ένα άλλο και ζητείται η συνάρτηση που εκφράζει τη σχέση των δύο μεγεθών.
3. Να επιλύουν απλές διαφορικές εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές και απλές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις α΄ τάξεως καθώς και απλά προβλήματα των οποίων η επίλυση ανάγεται στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων των παραπάνω μορφών.
4. Να κατανοήσουν την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος με τη βοήθεια του παραβολικού χωρίου.
5. Να κατανοήσουν τις στοιχειώδεις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος και να μπορούν να τις εφαρμόζουν.
6. Να γνωρίζουν το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και να μπορούν να το εφαρμόζουν στον υπολογισμό απλών ολοκληρωμάτων.
7. Να κατανοήσουν το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού και να μπορούν να το εφαρμόζουν σε ασκήσεις και προβλήματα.
8. Να υπολογίζουν τα εμβαδά επίπεδων χωρίων που ορίζονται από τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Κατά τη διδασκαλία του 3ου κεφαλαίου **να μη διδαχτούν**:
α) Η παράγραφος 3.3 με τίτλο: «**Διαφορικές Εξισώσεις**» και
β) Η παράγραφος 3.6 με τίτλο: «**Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού**».

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ «ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ»

ΜΕΡΟΣ Α΄

Κεφάλαιο 1

			Ι.				
1. Α	**2.** Ψ	**3.** Α	**4.** Α	**5.** Α	**6.** Ψ	**7.** Ψ	**8.** Α
9. Ψ	**10.** Ψ	**11.** Ψ	**12.** Α	**13.** Α	**14.** Ψ		
15. Ψ	**16.** Α	**17.** Α	**18.**	i) Ψ	ii) Ψ		
			ΙΙ.				
1. Γ	**2.** Α	**3.** Γ	**4.** Β	**5.** Δ			
			ΙΙΙ.				
$1 \to \beta$,	$2 \to a$,	$3 \to \delta$					

Κεφάλαιο 2

1. i) Δ, ii) Γ **2.** Α, Β

3. $|z-i| = |z+i| \to x'x$ $\quad |z-1| = |z+1| \to y'y$

$|z-1| = |z-i| \to y = x$ $\quad |z+1| = |z+i| \to y = x$

4. $k + ki \to 45^\circ, k - ki \to -45^\circ, -k - ki \to 225^\circ, -k + ki \to 135^\circ$

5. Α, Β, Δ,

6. $A: \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, B: -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \Gamma: -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \Delta: \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. $\bar{z} \to \Delta$, $\quad \frac{1}{2}z \to E$, $\quad \frac{1}{z} \to \Theta$, $\quad -\bar{z} \to \Gamma$, $\quad -\bar{z} \to B$

ΜΕΡΟΣ Β΄

Κεφάλαιο 1

			Ι.			
1. Ψ, Α	**2.** Α	**3.**Ψ	**4.** Ψ	**5.** Α, Ψ	**6.** Α	**7.** Ψ
8. Ψ	**9.** Ψ	**10.** Α	**11.** Α	**12.** Α		
			ΙΙ.			
1. Β	**2.** Ε	**3.** Ε	**4.** Δ			
			ΙΙΙ.			
1. Γ	**2.** Α, Γ, Ε		**3.** Ε			

Κεφάλαιο 2

I.

1. Α **2.** Α **3.** Α **4.** Ψ, Α **5.** Α, Ψ **6.** Α
7. Ψ **8.** Α **9.** Ψ, Α **10.** Ψ, Ψ, Ψ, Α **11.** Ψ, Α, Ψ **12.** Α

II.

1. Β **2.** Γ **3.** Ε **4.** Γ **5.** Γ **6.** Γ **7.** Ε **8.** Γ

III.

1. $a \to E \quad \beta \to \mathrm{A}, \quad \gamma \to \mathrm{B}, \quad \delta \to \Delta$
2. $1 \to \Delta, \quad 2 \to \Gamma, \quad 3 \to \mathrm{A}$

Κεφάλαιο 3

I.

1. Α **2.** Ψ **3.** Α **4.** Ψ **5.** Α **6.** Ψ **7.** Α
8. Α **9.** Α **10.** Α **11.** Α **12.** Α **13.** Α **14.** Ψ

II.

1. Δ **2.** Δ **3.** Δ **4.** Α **5.** Γ **6.** Β **7.** Δ
8. Β **9.** Γ **10.** Γ **11.** Δ

III.

1. Δ **2.** Β, Δ

3. Αν F είναι μία παράγουσα της $f(x)=\frac{1}{x}$, τότε η σχέση $\int \frac{1}{x}dx = 1+\int \frac{1}{x}dx$ γράφεται $F(x)+c_1 = 1+F(x)+c_2$, οπότε $c_1-c_2=1$ και **όχι,** 0=1. Επομένως δεν ισχύει η ιδιότητα της διαγραφής για την πρόσθεση αόριστων ολοκληρωμάτων.

4. Επειδή το *x* παίρνει και την τιμή 0, δεν μπορούμε να θέσουμε $x=\frac{1}{u}\neq 0.$

5. $F(0)=0$, $F(2)=2$, $F(3)=4$, $F(4)=6$, $F(6)=12$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑ ΕΠΙ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Άσκηση 6 / Β΄ ομάδας / §1.2

Κατά την επίλυση της άσκησης αυτής, να τονιστούν τα ακόλουθα:

Ερώτημα (ii):

Επειδή $D_{f\circ g} = D_g = \mathbb{R},$ θα ισχύει $g(\mathbb{R}) \subseteq D_f.$ Όμως $g(\mathbf{R}) = (-\infty, 0].$ Άρα ισχύει:

$$D_f \supseteq g(\mathbb{R}) = (-\infty, 0].$$

Αν $y \in g(\mathbb{R}) = (-\infty, 0],$ τότε θα είναι $y = g(x) = -x^2,$ για κάποιο $x \in D_g = \mathbb{R}.$ Επομένως θα ισχύει

$$f(y) = f(g(x)) = \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1-y}$$

Άρα, στο $g(\mathbb{R}) = (-\infty, 0]$ η f ορίζεται από τον τύπο $f(x) = \sqrt{1-x}.$ Στο $D_f - g(\mathbb{R})$ η f μπορεί να οριστεί με οποιοδήποτε τρόπο. Επομένως, υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις f που ικανοποιούν τις υποθέσεις του ερωτήματος αυτού. Αυτές περιγράφονται από τον τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, x \in (-\infty, 0] \\ h(x), x \in A - (-\infty, 0] \end{cases},$$

όπου $A = D_f$ είναι <u>οποιοδήποτε</u> υπερσύνολο του $(-\infty, 0]$ και h <u>οποιαδήποτε</u> συνάρτηση που μπορεί να οριστεί στο $A - (-\infty, 0].$

Πράγματι, η συνάρτηση fog:

- Ορίζεται εφόσον: $\left.\begin{cases} x \in D_g \\ \kappa\alpha\iota \\ g(x) \in D_f \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ -x^2 \in A \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$ Άρα $D_{f\circ g} = \mathbb{R}.$

- Έχει τύπο: $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1-g(x)} = \sqrt{1-(-x^2)} = \sqrt{1+x^2},$

Διότι $g(x) = -x^2 \leq 0,$ για κάθε $x \in D_g$. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι δεν έχει σημασία για τη σύνθεση $f \circ g$ ο τύπος της f στο $A-(-\infty,0]$.

Ερώτημα (iii):

Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις f που ικανοποιούν τις υποθέσεις του ερωτήματος αυτού. Αυτές περιγράφονται από τον τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu\chi, \chi \in S \\ -\eta\mu\chi, \chi \notin S \end{cases}$$, όπου S τυχαίο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

και τούτο διότι η ισότητα:

$$f^2(x) = \eta\mu^2\chi, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

σημαίνει ότι: $f(x) = \eta\mu\chi$ για κάποια $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -\eta\mu\chi$ για τα υπόλοιπα $x \in \mathbb{R}$.

Εδώ, πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα ότι, όταν ισχύει:

$$f^2(x) = g^2(x), \text{για κάθε } x \in A \subseteq \mathbb{R},$$

<u>δεν σημαίνει</u> ότι ισχύει:

$(f(x) = g(x),$ για κάθε $x \in A)$ ή $(f(x) = -g(x),$ για κάθε $x \in A),$ αλλά σημαίνει ότι υπάρχει $B \subseteq A,$ τέτοιο ώστε:

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in B \\ -g(x), & x \in A - B \end{cases}$$

Ως παράδειγμα αναφέρουμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = |x| \text{ και } g(x) = x,$$

για τις οποίες ισχύει: $f^2(x) = g^2(x),$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Όμως οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι ούτε ίσες, ούτε αντίθετες, αλλά ισχύει:

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [0,+\infty) \\ -g(x), & x \in (-\infty,0) \end{cases}$$

Τα παραπάνω πρέπει να τονιστούν για άλλη μια φορά κατά την επίλυση της **Άσκησης 7 / Β΄ Ομάδας / §1.8.**

Κατά την επίλυση των παραπάνω ασκήσεων πρέπει, επιπλέον, να τονιστεί ότι, όταν ισχύει:

$$f(x)\cdot g(x)=0, \text{ για κάθε } x\in A\subseteq\mathbb{R},$$

δεν σημαίνει ότι ισχύει:

$(f(x)=0,$ για κάθε $x\in A\subseteq\mathbb{R})$ ή $(g(x)=0,$ για κάθε $x\in A\subseteq\mathbb{R}),$
αλλά σημαίνει ότι υπάρχει $B\subseteq A,$ τέτοιο ώστε:

$(f(x)=0,$ για κάθε $x\in B)$ και $(g(x)=0,$ για κάθε $x\in A-B).$

Ως παράδειγμα αναφέρουμε τις συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ x, x\geq 0\end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases}x, x<0\\ 0, x\geq 0\end{cases}$$

Για τις οποίες ισχύει: $f(x)\cdot g(x)=0,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}.$ Όμως, καμία από τις συναρτήσεις αυτές δεν είναι η μηδενική συνάρτηση.

Άσκηση 3 / Α΄ ομάδας / §1.3

Κατά την επίλυση της άσκησης αυτής, να τονιστούν τα ακόλουθα:

- Τα κοινά σημεία (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f με την ευθεία $y=x$ είναι τα ίδια με τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της αντίστροφης της f με την ευθεία $y=x$ (σχήματα: 1^{o} ,3^{o} και 4^{o}).
- Ενδέχεται οι γραφικές παραστάσεις μιας αντιστρέψιμης συάρτησης f και της αντίστροφής της να έχουν κοινά σημεία και εκτός της ευθείας $y=x$ (σχήμα: 4^{o}).

Άσκηση 3 / Β΄ ομάδας / §2.6 & Άσκηση 5 / Α΄ ομάδας / §2.8

2) Κατά την επίλυση των ασκήσεων αυτών να δοθεί ο ορισμός της **επιταχυνόμενης** (αντιστοίχως **επιβραδυνόμενης)** κίνησης ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η ευθύγραμμη κίνηση ενός κινητού λέγεται **επιταχυνόμενη** (αντιστοίχως **επιβραδυνόμενη**), όταν το μέτρο της ταχύτητας υ(t), δηλαδή η |υ(t)|, αυξάνεται (αντιστοίχως μειώνεται).

Με βάση τον ορισμό αυτό:

- Στην κατακόρυφη βολή σώματος προς τα άνω η ταχύτητα υ(t) είναι γνησίως φθίνουσα, αφού $υ'(t)=α(t)=-g<0$. Επομένως:

➢ Όταν το σώμα ανέρχεται, επειδή $υ(t)>0$ και $υ(t)\downarrow$, θα ισχύει $|υ(t)|\downarrow$, οπότε η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη, ενώ

➢ Όταν το σώμα κατέρχεται, επειδή $υ(t)<0$ και $υ(t)\downarrow$, θα ισχύει $|υ(t)|\uparrow$, οπότε η κίνηση είναι επιταχυνόμενη.

- Στην άσκηση 3(iii) της σελίδας 257 έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

t	0		1		3		4		5
Πρόσημο της $α(t)=x''(t)$		+	0	−	0	+		+	
Μονοτονία της $υ(t)=x'(t)$	-16 TE	↗	0 TM	↘	-16 TE	↗	0	↗	64 TM
Πρόσημο της **$υ(t)=x'(t)$**		−	0	−		−	0	+	
Μονοτονία της $\|υ(t)\|$	16 TM	↘	0 TE	↗	16 TM	↘	0 TE	↗	64 TM

Επομένως η κίνηση είναι επιταχυνόμενη στα διαστήματα [1,3] και [4,5] (εκεί που ισχύει $υ(t)α(t)\geq 0$), και επιβραδυνόμενη στα διαστήματα [0,1] και [3,4] (εκεί που ισχύει $υ(t)α(t)\leq 0$).

- Στην άσκηση 5(ii) της σελίδας 278 η κίνηση είναι επιταχυνόμενη στα διαστήματα $[0, t_1]$ και $[t_2, t_3]$, όπου $υ(t)α(t)\geq 0$, και επιβραδυνόμενη στα διαστήματα $[t_1, t_2]$ και $[t_3,+\infty)$, όπου $υ(t)α(t)\leq 0$.