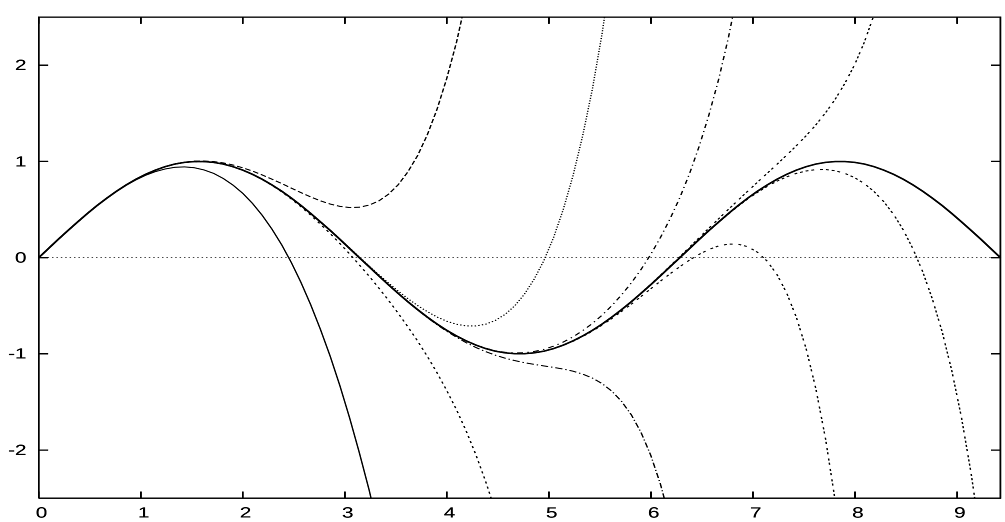
Πανεπιστημιο Ιωαννινων
Τμημα Δ. Π. Φ. Π.

Δρ. Μιχάλης Τζούμας
Μαθηματικός

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α

Τόμος 1$^{\text{ος}}$



ΑΓΡΙΝΙΟ 2005

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές γράφτηκαν για να βοηθήσουν τους πρωτοετείς φοιτητές του τμήματος Διαχείρισης Περιβάλλοντος και Φυσικών Πόρων του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, να κατανοήσουν βασικά σημεία των Μαθηματικών, να συμπληρώσουν τη γνώση τους και να θυμηθούν βασικές έννοιες. Επιπλέον να χρησιμοποιηθούν ως ένα βασικό εισαγωγικό βιβλίο για εκείνους, που θα χρησιμοποιήσουν τα Μαθηματικά για την επίλυση προβλημάτων ή τη δημιουργία μοντέλων της επιστήμης τους και να τους μυήσουν σε έναν καινούριο τρόπο σκέψης σε ό,τι αφορά τα Μαθηματικά, που είναι μεν ενιαία, ωστόσο υπάρχουν πολλές οπτικές για τις έννοιες τις οποίες διαπραγματεύονται.

Στο κείμενο γίνεται προσπάθεια οι μαθηματικές έννοιες και οι μαθηματικοί τύποι που χρησιμοποιούνται να είναι γνωστοί από τα Μαθηματικά του Λυκείου. Όπου χρειάζονται κάποιες καινούριες έννοιες ή τύποι, θα εισάγονται ή θα αποδεικνύονται τη στιγμή που θα χρησιμοποιούνται. Ωστόσο έμφαση θα δοθεί στην εφαρμογή και τη χρήση των Μαθηματικών. Για την εμπέδωση της ύλης υπάρχει ένας αριθμός λυμένων ασκήσεων ή παραδειγμάτων και ένας αριθμός άλυτων ασκήσεων και προβλημάτων στο τέλος κάθε κεφαλαίου. Για τη λύση ορισμένων ασκήσεων, που είναι υπολογιστικές, είναι απαραίτητη η χρήση επιστημονικής αριθμομηχανής (calculator, κομπιουτεράκι), την οποία ο φοιτητής θα πρέπει να μάθει να χειρίζεται καλά. Για τις γραφικές παραστάσεις ο φοιτητής θα πρέπει να μάθει να χειρίζεται το πρόγραμμα gnuplot. [1] Στο κείμενο υπάρχει ένας αριθμός παραδειγμάτων χρήσης του παραπάνω προγράμματος, που θα πρέπει να δοκιμάζονται από τον αναγνώστη, ώστε να εξοικειώνεται με τη χρήση και να ενεργεί κατά περίπτωση.

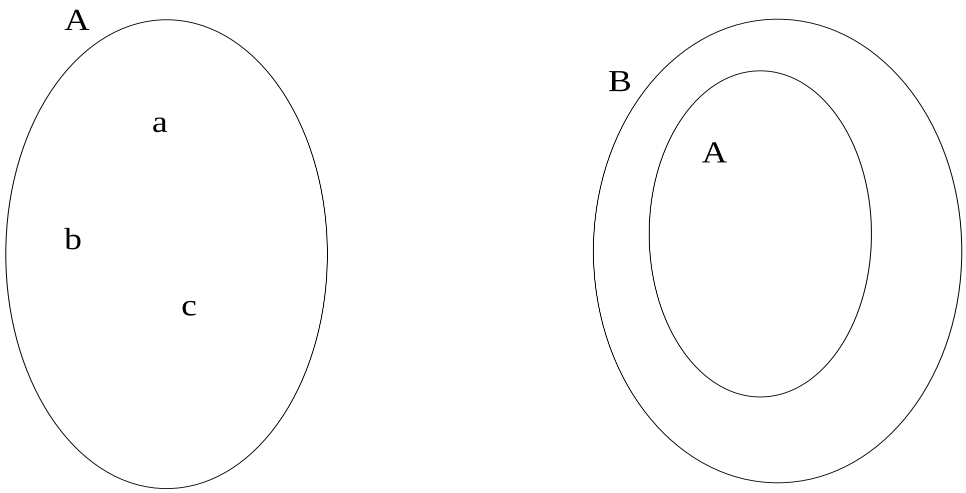
[1] Το gnuplot, θα το βρείτε στη διεύθυνση www.gnuplot.info. Στο Παράρτημα του παρόντος εγχειριδίου θα βρείτε ένα μικρό οδηγό για τη χρήση του.

Εισαγωγή

1.1 Το σύνολο. Ορισμοί και πράξεις

Η έννοια του συνόλου θα θεωρηθεί πρωταρχική και δε θα ορισθεί. Έτσι ακούγοντας ή διαβάζοντας «σύνολο» θα εννοούμε αυτό που όλοι μας καταλαβαίνουμε, δηλ. μια συλλογή από αντικείμενα. Το σύνολο αποτελείται από στοιχεία, τα οποία βρίσκονται μόνο μία φορά μέσα σ' αυτό και λέμε ότι το στοιχείο a ανήκει στο σύνολο A γράφοντας $a \in A$ ή το σύνολο A περιέχει το στοιχείο a γράφοντας $A \ni a$. Αντίθετα λέμε ότι το στοιχείο d δεν ανήκει στο σύνολο A γράφοντας $d \notin A$ ή το σύνολο A δεν περιέχει το στοιχείο d γράφοντας $A \not\ni d$. Το σύνολο είναι δυνατόν να ορισθεί πλήρως δι' αναγραφής των στοιχείων του π.χ. $A = \{a, b, c\}$ ή περιγράφοντας αυτά με μια ιδιότητά τους π.χ. $A = \{x/x$ τα τρία πρώτα γράμματα του λατινικού αλφάβητου $\}$. Το σύνολο που δεν περιέχει στοιχεία ονομάζεται **κενό** σύνολο και συμβολίζεται με $\emptyset$. Το πλήθος των στοιχείων του συνόλου A ονομάζεται πληθάριθμος του A, συμβολίζεται με $N(A)$, οπότε $N(A) = 3$, $N(\emptyset) = 0$.

Ήδη είναι γνωστά τα σύνολα των αριθμών από τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, όπως το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, το οποίο είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, δηλ. αν προσθέσουμε ή πολλαπλασιάσουμε δυο φυσικούς αριθμούς το αποτέλεσμα είναι πάλι φυσικός αριθμός. Όμως δεν συμβαίνει το ίδιο με την αφαίρεση. Επεκτείναμε λοιπόν το σύνολο των Φυσικών και δημιουργήσαμε το σύνολο των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, το οποίο είναι τώρα κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού, δεν είναι όμως κλειστό ως προς την πράξη της διαίρεσης, γι' αυτό επεκτείναμε το σύνολο των ακεραίων και δημιουργήσαμε το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$. Προκειμένου να εργαστούμε σ' ένα σύνολο, όπου υπάρχουν και αριθμοί που δεν γράφονται



Σχήμα 1.1: Σύνολο – Υποσύνολο συνόλου.

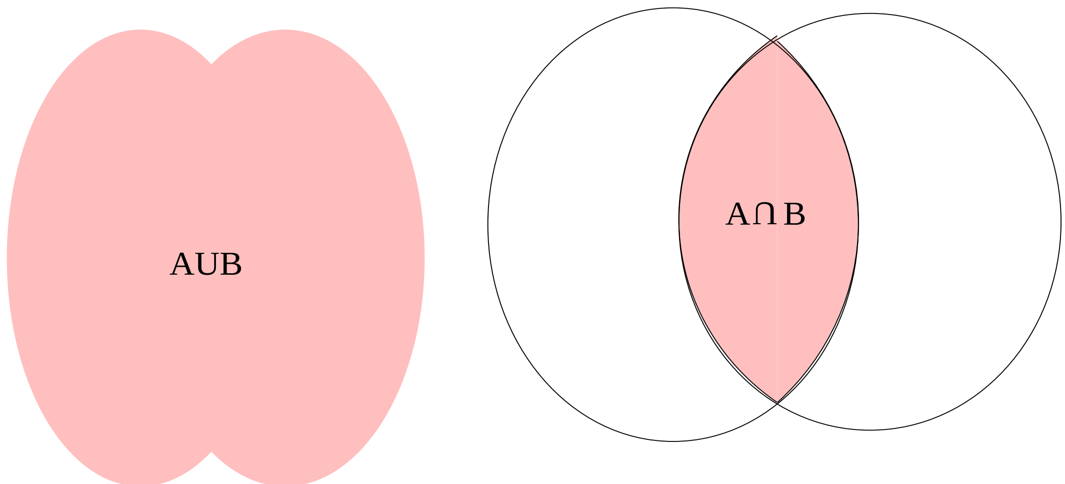
υπό μορφήν κλάσματος, δημιουργήσαμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Τέλος, θέλοντας να έχει έννοια και η τετραγωνική ρίζα του -1 ($\sqrt{-1}$) δημιουργήσαμε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$.

Το σύνολο, γεωμετρικά, παριστάνεται με μια απλή κλειστή γραμμή. Τα στοιχεία του με τελείες και το όνομά τους ή με κατάλληλη διαγράμμιση σε περίπτωση που τα στοιχεία είναι πολλά ή δεν ενδιαφέρουν. Τα διαγράμματα που σχηματίζονται με αυτό τον τρόπο λέγονται διαγράμματα του Venn.

Λέμε ότι το σύνολο A είναι **υποσύνολο** του συνόλου B και συμβολίζουμε $A \subseteqq B$, αν και μόνον αν τα στοιχεία του συνόλου A είναι και στοιχεία του συνόλου B. Αυτό εκφράζεται με το ότι, αν κάποιο στοιχείο ανήκει στο σύνολο A, τότε ανήκει και στο σύνολο B. Στην ίδια περίπτωση λέμε ότι το σύνολο B είναι **υπερσύνολο** του συνόλου A και συμβολίζουμε $B \supseteqq A$. Το διάγραμμα φαίνεται στο Σχήμα 1.1. Για παράδειγμα $\mathbb{N} \subseteqq \mathbb{I}$ και $\mathbb{R} \supseteqq \mathbb{Q}$. Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο παντός συνόλου ($\emptyset \subseteqq A$). Είναι φανερό ότι αν $A \subseteqq B$ τότε $N(A) \leq N(B)$.

Δυο σύνολα A και B λέμε ότι είναι **ίσα** και συμβολίζουμε $A = B$, αν και μόνον αν $A \subseteqq B$ και $B \subseteqq A$. Αν τα δυο σύνολα δεν είναι ίσα, γράφουμε $A \neq B$. Φυσικά στην περίπτωση της ισότητας ισχύει $N(A) = N(B)$.

Ένωση δύο συνόλων A και B λέμε το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία του συνόλου A και όλα τα στοιχεία του συνόλου B, συμβολίζεται δε



Σχήμα 1.2: Η ένωση και η τομή δυο συνόλων.

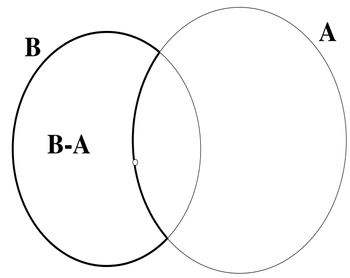
με $A \cup B$. Σε επίπεδο στοιχείων αυτό εκφράζεται με το ότι, ένα στοιχείο είναι στοιχείο της ένωσης $A \cup B$ αν και μόνον αν είναι στοιχείο του συνόλου A ή του συνόλου B. Αν για παράδειγμα έχουμε $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ τότε $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Τομή δύο συνόλων A και B λέμε το σύνολο που αποτελείται από όλα τα κοινά στοιχεία των δυο συνόλων, συμβολίζεται δε με $A \cap B$. Σε επίπεδο στοιχείων αυτό εκφράζεται με το ότι, ένα στοιχείο είναι στοιχείο της ένωσης $A \cap B$ αν και μόνον αν είναι στοιχείο και του συνόλου A και του συνόλου B. Αν για παράδειγμα έχουμε $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, τότε $A \cap B = \{3, 4, 5\}$.

Η ένωση και η τομή έχουν την αντιμεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα και επιπλέον επιμερίζεται η μία ως προς την άλλη.

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A & A \cap B &= B \cap A \\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C & A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) & A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα δυο σύνολα A και B. Είναι δυνατόν α)$A \subseteqq B$ και β) $A \nsubseteq B$. Στην πρώτη περίπτωση, το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία του B που δεν περιέχονται στο A λέγεται **συμπλήρωμα** του συνόλου A ως προς το σύνολο B και συμβολίζεται A_B^C ή απλά A^C, όταν το υπερσύνολο B εννοείται. Στη δεύτερη περίπτωση λέγεται **διαφορά** και συμβολίζεται με $B - A$. Έτσι αν έχουμε $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $X = \{3, 4, 5\}$ και $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, τότε $A - B = \{1, 2\}$ και $X_A^C = \{1, 2\}$, $X_B^C = \{6, 7\}$.



Από τα διαγράμματα του Venn κάποιος μπορεί να παρατηρήσει ότι

$$A = (A \cap B) \cup (A - B) \text{ και } B = (A \cap B) \cup (B - A). \tag{1.2}$$

Δυο σύνολα που η τομή τους είναι το κενό σύνολο λέγονται **ξένα μεταξύ τους**. Για δυο σύνολα A και B, ξένα μεταξύ τους, είναι φανερό ότι η ένωσή τους $A \cup B$ περιέχει όλα τα στοιχεία του A και όλα τα στοιχεία του B. Έτσι ισχύει

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) \tag{1.3}$$

Πρόταση 1.1.1 *Για δυο σύνολα A και B ισχύει*

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) \tag{1.4}$$

Απόδειξη: Η ένωση των δυο συνόλων A και B περιέχει τα στοιχεία του συνόλου A που δεν ανήκουν στο B, τα στοιχεία του B που δεν ανήκουν στο A και τα στοιχεία που ανήκουν και στα δυο σύνολα, δηλ. τα στοιχεία της τομής τους $A \cap B$. Τότε θα ισχύει $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ και επειδή τα σύνολα αυτά είναι ξένα μεταξύ τους, από την (1.3), θα έχουμε

$$N(A \cup B) = N(A - B) + N(A \cap B) + N(B - A) \tag{1.5}$$

όμως από την (1.2) ισχύει $N(A) = N(A \cap B) + N(A - B)$ και $N(B) = N(A \cap B) + N(B - A)$, οπότε αντικαθιστώντας κατάλληλα στην προηγούμενη παίρνουμε τη σχέση μας. Η Πρόταση 1.1.1 παίζει ένα σπουδαίο ρόλο στη Θεωρία Πιθανοτήτων.

Παράδειγμα 1.1 *Σε μια αίθουσα βρίσκονται* 120 *άτομα, εκ των οποίων* 72 *άτομα γνωρίζουν Αγγλικά,* 67 *γνωρίζουν Γαλλικά και* 39 *γνωρίζουν Αγγλικά και Γαλλικά. Να βρεθεί πόσα άτομα δε γνωρίζουν ούτε Αγγλικά ούτε Γαλλικά, πόσα άτομα γνωρίζουν μόνον Γαλλικά.*

Λύση Αν θεωρήσουμε $\Omega = \{x/x$ άτομο της αίθουσας$\}$, $A = \{x/x$ άτομο της αίθουσας που γνωρίζει Αγγλικά$\}$ και $B = \{x/x$ άτομο της αίθουσας που γνωρίζει Γαλλικά$\}$, τότε τα άτομα που γνωρίζουν είτε Αγγλικά είτε Γαλλικά θα είναι $A \cup B$. Από την Πρόταση 1.1.1 θα έχουμε $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) = 72 + 67 - 39 = 100$. Τα άτομα που δε γνωρίζουν καμιά γλώσσα είναι 20, αφού $N(\Omega) = 120$.
Τα άτομα που γνωρίζουν Γαλλικά και δε γνωρίζουν Αγγλικά είναι $(B - A)$ και εκείνα που γνωρίζουν και Αγγλικά και Γαλλικά είναι $(A \cap B)$, από την (1.2) έχουμε $B = (B - A) \cup (A \cap B)$. Οπότε $N(B - A) = N(B) - N(A \cap B) = 67 - 39 = 28$.

1.2 Διατεταγμένο ζεύγος–Καρτεσιανό γινόμενο

Στα σύνολα δεν ενδιαφέρει η σειρά των στοιχείων. Ωστόσο, δεν είναι λίγες οι φορές που η σειρά των στοιχείων παίζει σπουδαίο ρόλο, π.χ. σ' έναν αγώνα 100m, πριν τον αγώνα έχουμε το σύνολο των αθλητών που παίρνουν μέρος, μετά τον αγώνα όμως έχουμε τους νικητές του αγωνίσματος π.χ. πρώτος, δεύτερος κ.λπ. Αν πρόκειται για δυο στοιχεία a και b με σαφή προσδιορισμό του πρώτου και του δεύτερου στοιχείου, μιλάμε για διατεταγμένο ζεύγος και σημειώνουμε (a, b). Για τα διατεταγμένη ζεύγη ισχύει

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ και } b = d \tag{1.6}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να μιλάμε για διατεταγμένες τριάδες (a_1, a_2, a_3), διατεταγμένες τετράδες (a_1, a_2, a_3, a_4), και γενικότερα για διατεταγμένες $\nu-$άδες $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Τα στοιχεία των διατεταγμένων $\nu-$άδων ονομάζονται συντεταγμένες.

Θεωρούμε τώρα δυο σύνολα A και B διαφορετικά του κενού. Το σύνολο που αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη με πρώτο στοιχείο από το σύνολο A και δεύτερο στοιχείο από το σύνολο B λέγεται καρτεσιανό γινόμενο αυτών και συμβολίζεται με $A \times B$, π.χ. αν $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ τότε $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 3), (2, 4)\}$. Είναι φανερό ότι με κάθε στοιχείο από το πρώτο σύνολο σχηματίζονται τόσα στοιχεία στο καρτεσιανό γινόμενο, όσα είναι τα στοιχεία στο δεύτερο σύνολο. Έτσι έχουμε

$$N(A \times B) = N(A) \times N(B) \tag{1.7}$$

Με αντίστοιχο τρόπο δημιουργούνται καρτεσιανά γινόμενα τριών συνόλων κ.ο.κ. ν συνόλων και πάντα θα ισχύει

$$N(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_\nu) = N(A_1) \times N(A_2) \times \cdots \times N(A_\nu) \tag{1.8}$$

Οι σχέσεις (1.7) και (1.8) αναφέρονται ως κανόνες του πολλαπλασιασμού. Άλλες, όμως, φορές αναφέρονται και ως κανόνες των επιλογών, αφού ουσιαστικά μας δείχνει πόσες δυνατές επιλογές έχουμε, όταν επιλέγουμε στοιχεία ή αντικείμενα πρώτα από ένα σύνολο, έπειτα από κάποιο άλλο κ.ο.κ. Έτσι, για παράδειγμα, αν έχουμε να βρούμε το πλήθος των κοστουμιών που δημιουργούνται από ένα πλήθος τριών σακακιών και τεσσάρων παντελονιών, από τον κανόνα των επιλογών προφανώς θα βρούμε δώδεκα κοστούμια.

Παρατήρηση 1.2.1*Άξιο προσοχής είναι το γεγονός ότι, ενώ $A \times B \neq B \times A$, πάντα ισχύει $N(A \times B) = N(B \times A)$.*

Παράδειγμα 1.2*Να δειχτεί ότι, για τρία μη κενά σύνολα, ισχύουν*

i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ *ii)* $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Λύση Θεωρούμε ένα τυχαίο στοιχείο (x, y) του συνόλου $A \times (B \cap C)$. Τότε ισχύει

$$\left\{ \begin{array}{c} x \in A \\ y \in (B \cap C) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in A \\ y \in B \\ y \in C \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x, y) \in (A \times B) \\ (x, y) \in (A \times C) \end{array} \right.$$

οπότε $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Δηλ.

$$A \times (B \cap C) \subseteqq (A \times B) \cap (A \times C). \tag{1.9}$$

Αντιστρόφως αν (x, y) ένα τυχαίο στοιχείο του συνόλου $(A \times B) \cap (A \times C)$, θα ισχύει

$$\left\{ \begin{array}{c} (x, y) \in (A \times B) \\ (x, y) \in (A \times C) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in A \\ y \in B \\ y \in C \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in A \\ y \in (B \cap C) \end{array} \right.$$

οπότε $(x, y) \in A \times (B \cap C)$. Δηλ.

$$(A \times B) \cap (A \times C) \subseteqq A \times (B \cap C). \tag{1.10}$$

Οι σχέσεις (1.9) και (1.10) αποδείχνουν το ζητούμενο.

1.3 Μεταθέσεις

Τοποθετώντας τα στοιχεία ενός συνόλου σε μια σειρά (δηλ. αραδιάζοντάς τα) δημιουργούμε μια μετάθεση, π.χ. μια μετάθεση των στοιχείων του συνόλου $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ είναι η $(a_2, a_3, a_5, a_1, a_4)$, μια άλλη είναι η $(a_4, a_3, a_5, a_2, a_1)$. Για να μετρήσουμε το πλήθος των παραπάνω μεταθέσεων θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα των επιλογών. Έτσι για να επιλέξουμε το πρώτο στοιχείο στο παράδειγμά μας έχουμε 5 δυνατότητες, για να επιλέξουμε το δεύτερο στοιχείο έχουμε 4 δυνατότητες (αφού ήδη έχουμε πάρει το ένα στοιχείο), για να επιλέξουμε το τρίτο στοιχείο έχουμε 3 δυνατότητες (αφού ήδη έχουμε πάρει τα δύο στοιχεία), για να επιλέξουμε το τέταρτο στοιχείο έχουμε 2 δυνατότητες (αφού ήδη έχουμε πάρει τα τρία στοιχεία), τέλος για να επιλέξουμε το πέμπτο στοιχείο έχουμε 1 δυνατότητα (αφού ήδη έχουμε πάρει τα τέσσερα στοιχεία), συνολικά λοιπόν έχουμε $M_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ μεταθέσεις. Γενικά, για να μετρήσουμε το πλήθος των μεταθέσεων ενός συνόλου με ν στοιχεία, ο παραπάνω τρόπος μας δίνει

$$M_\nu = \nu \cdot (\nu - 1) \cdot (\nu - 2) \ldots 2 \cdot 1 = \nu! \tag{1.11}$$

Το $\nu!$ διαβάζεται «ν παραγοντικό» και σημαίνει το γινόμενο όλων των φυσικών από το 1 μέχρι το ν, ορίζοντας $0! = 1$ και $1! = 1$. Επίσης το $\nu!$ μπορεί να ορισθεί και αναδρομικά ως

$$0! = 1 \text{ και } \nu! = \nu \cdot (\nu - 1)! \tag{1.12}$$

Το ν παραγοντικό αυξάνει πολύ γρήγορα, π.χ 10!=3628800 και προφανώς οι πράξεις (πολλαπλασιασμοί) είναι πάρα πολλές και δύσκολες. Ο επόμενος τύπος του Stirling για μεγάλα ν μας δίνει προσεγγιστικά το ν παραγοντικό

$$\nu! \approx \sqrt{2\pi\nu} \left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu \tag{1.13}$$

Με τον τύπο (1.13) βρίσκουμε $10! \approx 3598696$, αρκετά κοντά στην πραγματική τιμή.

Παράδειγμα 1.3*Πόσους πενταψήφιους μπορούμε να δημιουργήσουμε με τα ψηφία $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, παίρνοντάς τα μόνον μια φορά το καθένα;*

Λύση Για τη δημιουργία πενταψήφιων αριθμών θα πρέπει ουσιαστικά να βρούμε τις μεταθέσεις αυτών. Έτσι

$$M_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Τη μετάθεση $\sigma_0 = (1, 2, \ldots, \nu)$ των ν πρώτων φυσικών την ονομάζουμε φυσική μετάθεση. Στη φυσική μετάθεση κάθε στοιχείο είναι μεγαλύτερο απ' όλα τα προηγούμενά του. Δε συμβαίνει όμως το ίδιο και στις άλλες μεταθέσεις. Όταν κάποιο στοιχείο είναι μικρότερο από κάποιο προηγούμενό του, λέμε ότι έχουμε μια αναστροφή, π.χ. στη μετάθεση $(1, 2, 4, 3, 5)$ των πέντε πρώτων φυσικών, το 3 είναι μικρότερο από το 4 που είναι προηγούμενό του, επομένως έχουμε μια αναστροφή. Μια μετάθεση λέμε ότι είναι άρτια ή περιττή, αν και μόνον αν το πλήθος των αναστροφών είναι αντίστοιχα άρτιο ή περιττό. Έτσι, η μετάθεση $(1, 5, 4, 3, 2)$ είναι άρτια, αφού έχει συνολικά έξι αναστροφές, ενώ η μετάθεση $(1, 5, 2, 3, 4)$ είναι περιττή, αφού συνολικά έχει μόνον τρεις αναστοφές. Η φυσική μετάθεση είναι άρτια, αφού το πλήθος των αναστροφών είναι μηδέν.

Αν κ από τα ν στοιχεία επαναλαμβάνονται, η μετάθεση αυτών είναι μια **μετάθεση με επανάληψη**. Σε κάθε τέτοια μετάθεση, η μετάθεση οποιωνδήποτε από τα ίδια κ στοιχεία δεν προκαλεί καμιά μεταβολή στη μετάθεση με επανάληψη. Αν προς στιγμήν τα θεωρήσουμε διαφορετικά τα κ αυτά στοιχεία, τότε κάθε μετάθεση με επανάληψη θα μας δώσει $\kappa!$ απλές μεταθέσεις και όλες μαζί θα μας δώσουν όλες τις απλές μεταθέσεις. Δηλ.

$$k! \cdot M_\nu^\kappa = M_\nu \;\Leftrightarrow\; M_\nu^\kappa = \frac{\nu!}{\kappa!}, \tag{1.14}$$

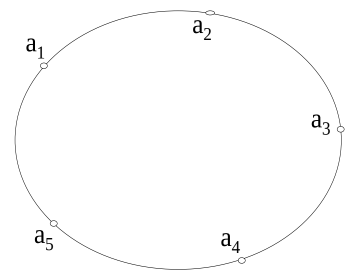
όπου M_ν^κ, είναι ο αριθμός των μεταθέσεων με επανάληψη. Ο τύπος (1.14) γενικεύεται στην περίπτωση που υπάρχουν μ ομάδες με κ_1, κ_2, … κ_μ ίδια στοιχεία, με $\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_\mu = n$. Στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$M_\nu^{\kappa_1,\ \kappa_2,\ \cdots,\ \kappa_\mu} = \frac{\nu!}{\kappa_1!\kappa_2!\cdots\kappa_\mu!}, \tag{1.15}$$

Παράδειγμα 1.4*Πόσες οχτάδες μπορούμε να σχηματίσουμε με τέσσερα αγόρια και τέσσερα κορίτσια, τοποθετώντας τα σε μια γραμμή;*

Λύση Πρόκειται για μεταθέσεις με επανάληψη, αφού τα αγόρια και τα κορίτσια είναι τα στοιχεία που επαναλαμβάνονται. Έτσι

$$M_8^{4,4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$$



Τοποθετώντας τα στοιχεία ενός συνόλου σε ένα κύκλο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, δημιουργούμε μια **κυκλική μετάθεση**. Είναι φανερό ότι, αν κόψουμε τον κύκλο μεταξύ δυο οποιωνδήποτε στοιχείων, δημιουργούμε μια απλή μετάθεση. Μάλιστα, από κάθε κυκλική μετάθεση μπορούμε να δημιουργήσουμε ν απλές μεταθέσεις. Αν με K_ν παραστήσουμε το πλήθος των κυκλικών μεταθέσεων, θα έχουμε $M_\nu = \nu \cdot K_\nu$, οπότε

$$K_\nu = \frac{\nu!}{\nu} = (\nu - 1)! \tag{1.16}$$

1.4 Διατάξεις

Επιλέγοντας κ από τα ν στοιχεία με $\kappa < \nu$ ενός συνόλου και τοποθετώντας τα σε μια σειρά, δημιουργούμε μια **διάταξη**· π.χ. μια διάταξη των 3 από τα 5 στοιχεία του συνόλου $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ είναι η (a_2, a_3, a_5), μια άλλη είναι η (a_5, a_2, a_1). Από τον κανόνα των επιλογών (1.8) βρίσκουμε ότι

$$_\kappa\Delta_\nu = \nu \cdot (\nu - 1) \cdots (\nu - \kappa + 1) = \frac{\nu!}{(\nu - \kappa)!} \tag{1.17}$$

Παράδειγμα 1.5*Πόσους τριψήφιους μπορούμε να δημιουργήσουμε με τα ψηφία $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, παίρνοντάς τα μόνο μια φορά το καθένα;*

Λύση Για τη δημιουργία τριψήφιων αριθμών θα πρέπει να επιλέγουμε κάθε φορά τρία από τα πέντε ψηφία. Έτσι

$$_3\Delta_5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Επιλέγοντας κ από τα ν στοιχεία ενός συνόλου και τοποθετώντας τα σε μια σειρά, με τη δυνατότητα ορισμένα από αυτά ή και όλα να επαναλαμβάνονται, δημιουργούμε μια **διάταξη με επανάληψη**, π.χ. μια διάταξη με επανάληψη των

3 από τα 5 στοιχεία του συνόλου $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ είναι η (a_2, a_3, a_5), μια άλλη είναι η (a_2, a_2, a_1). Από τον κανόνα των επιλογών (1.8) βρίσκουμε ότι

$$_{\kappa}E_{\nu} = \underbrace{\nu \cdot \nu \cdots \nu}_{\kappa} = \nu^{\kappa} \tag{1.18}$$

είναι φανερό τώρα είναι δυνατόν να έχουμε και $\kappa \geq \nu$.

Παράδειγμα 1.6*Πόσους τριψήφιους μπορούμε να δημιουργήσουμε με τα ψηφία* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$*;*

Λύση Για τη δημιουργία τριψήφιων αριθμών θα πρέπει να επιλέγουμε κάθε φορά τρία από τα πέντε ψηφία με τη δυνατότητα τα ψηφία να επαναλαμβάνονται, π.χ. θα δημιουργήσουμε τον αριθμό 324 αλλά και τον 232. Έτσι

$$_{3}E_{5} = 5^3 = 125$$

Παράδειγμα 1.7*Πόσες στήλες ΠΡΟΠΟ μπορούμε να δημιουργήσουμε με τα στοιχεία* $\{1, 2, x\}$*;*

Λύση Για τη δημιουργία μιας στήλης ΠΡΟΠΟ δεκατριών σημείων θα πρέπει να επιλέγουμε κάθε φορά δεκατρία από τα τρία στοιχεία, με τη δυνατότητα τα στοιχεία να επαναλαμβάνονται, π.χ. θα δημιουργήσουμε τη στήλη $11x|2x1|xx1|2xx2$. Έτσι

$$_{13}E_{3} = 3^{13} = 1594323$$

1.5 Συνδυασμοί

Η επιλογή κ από τα ν στοιχεία ενός συνόλου, χωρίς να μας ενδιαφέρει η τοποθέτησή τους σε οποιαδήποτε γραμμή, λέγεται **συνδυασμός των ν ανά κ**. Οι συνδυασμοί των ν ανά κ συμβολίζονται με $\binom{\nu}{\kappa}$ ή $\mathcal{C}^{\nu}_{\kappa}$. Είναι φανερό ότι οι διατάξεις των ν ανά κ προκύπτουν από τις μεταθέσεις των κ στοιχείων που επιλέξαμε από τους συνδυασμούς, δηλ. $_{\kappa}\Delta_{\nu} = \kappa!\binom{\nu}{\kappa}$, οπότε

$$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{1}{\kappa!}\ {}_{\kappa}\Delta_{\nu} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!} \tag{1.19}$$

Παράδειγμα 1.8 *Πόσες πεντάδες καρτών μπορούμε να δημιουργήσουμε από τα 52 φύλλα μιας τράπουλας;*

Λύση Πρόκειται προφανώς για συνδυασμούς, αφού δε μας ενδιαφέρει η σειρά, με την οποία θα τοποθετηθούν οι κάρτες. Έτσι

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2598960$$

Ο αριθμός των τρόπων που θα πάρουμε τα κ από τα ν πράγματα είναι ακριβώς ο ίδιος με των αριθμό των $\nu - \kappa$ από τα ν που θα αφήσουμε στην άκρη, δηλ.

$$\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu}{\nu - \kappa}$$

Κάτι τέτοιο προκύπτει και από τις πράξεις.

Λήμμα 1.5.1 *Για τους συνδυασμούς ισχύει πάντα*

$$i)\ \binom{\nu}{\kappa} + \binom{\nu}{\kappa+1} = \binom{\nu+1}{\kappa+1} \qquad ii)\ \binom{\nu}{\kappa+1} = \frac{\nu - k}{k+1}\binom{\nu}{\kappa}. \tag{1.20}$$

Απόδειξη: Για την πρώτη (η δεύτερη αφήνεται για άσκηση) κάνοντας τις πράξεις προκύπτει

$$\begin{aligned}
\binom{\nu}{\kappa} + \binom{\nu}{\kappa+1} &= \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!} + \frac{\nu!}{(\kappa+1)!(\nu-\kappa-1)!} \\
&= \frac{\nu!(k+1)}{(\kappa+1)!(\nu-\kappa)!} + \frac{(\nu-\kappa)\nu!}{(\kappa+1)!(\nu-\kappa)!} \\
&= \frac{\nu!(\kappa+1+\nu-\kappa)}{(\kappa+1)!(\nu-\kappa)!} \\
&= \binom{\nu+1}{\kappa+1}
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 1.5.1 *Για να έχουν έννοια τα παραπάνω πρέπει $1 \le \kappa \le \nu$. Ωστόσο για λειτουργικούς λόγους ορίζουμε $\binom{\nu}{0} = 1$.*

1.6 Αθροίσματα - το $\sum$

Μεγάλο πλήθος προσθέσεων, μεγάλα αθροίσματα, είναι γενικά δύσκολα να τα χειριστούμε. Ορισμένες φορές όμως, όταν τα αθροίσματα αυτά υπακούουν σε κάποιους κανόνες, μπορούμε να τα αντιμετωπίσουμε χρησιμοποιώντας κατάλληλα σύμβολα, π.χ. το άθροισμα των n πρώτων φυσικών αριθμών μπορούμε να το γράφουμε ως εξής

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i$$

και διαβάζεται το άθροισμα όλων των φυσικών i από το 1 μέχρι το n. Ο τρόπος της γραφής αυτής δεν είναι μονοσήμαντος. Το ίδιο άθροισμα θα μπορούσαμε να το γράφουμε και ως

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=-2}^{n-3} (i + 3).$$

Κάτω από το $\sum$ φαίνεται η μεταβλητή, στην προκειμένη περίπτωση το i και το κάτω όριο (δηλ. από που ξεκινά το i), και πάνω από το $\sum$ φαίνεται το άνω όριο (δηλ. που φτάνει το i), η μεταβολή (δηλ. το βήμα) είναι πάντα ένα. Ακριβώς τα ίδια ισχύουν, όταν οι φυσικοί αριθμοί είναι δείκτες, π.χ.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Για λειτουργικούς λόγους ορίζουμε $\sum_{i=k}^{k} a_i = a_k$.

Απλοί κανόνες του αθροίσματος φαίνονται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.6.1*Για το σύμβολο του $\sum$ ισχύουν:*

$$\begin{aligned}
i)\ \sum_{i=1}^{n} 1 &= n \\
ii)\ \sum_{i=1}^{n} (c \cdot a_i) &= c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \\
iii)\ \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i
\end{aligned}$$

$$iv) \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i \quad , \qquad 1 \leq k < n$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας άμεσα τους τύπους για τη (ii) παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{n}(c \cdot a_i) = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \cdots + c \cdot a_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

□

Η απόδειξη των (i), (iii) και (iv) αφήνεται ως άσκηση.

Με παρόμοιο τρόπο ορίζονται αθροίσματα μεγαλύτερης τάξης, π.χ. διπλά τριπλά κ.λπ, ίσως με την παρατήρηση ότι αυτά εναλλάσσονται και, όταν κάποιας μεταβλητής ο δείκτης δεν παίρνει μέρος σε κάποια άθροιση, η μεταβλητή συμπεριφέρεται ως σταθερά.

Πρόταση 1.6.2 *Για τα διπλά αθροίσματα ισχύει*

$$i) \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

$$ii) \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} b_j$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε την $i)$ και η $ii)$ θα παραμείνει ως άσκηση

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\Big) = \sum_{i=1}^{n}(a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{im})$$

$$= (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1m}) + (a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2m}) + \cdots + (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nm})$$

$$= (a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1}) + (a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{n2}) + \cdots + (a_{1m} + a_{2m} + \cdots + a_{nm})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i1} + \sum_{i=1}^{n} a_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{im} = \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Big) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

□

Παράδειγμα 1.9 *Να δειχτεί ότι*

$$i)\ 1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\ ,\qquad ii)\ 1+3+\cdots+(2n-1)=n^2\ ,$$

$$iii)\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

Λύση $i)$ Άμεσα έχουμε

$$2\sum_{i=1}^{n} i=\sum_{i=1}^{n} i+\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)=\sum_{i=1}^{n}(i+n+1-i)=\sum_{i=1}^{n}(n+1)=n\cdot(n+1)$$

οπότε παίρνουμε το ζητούμενο. Για την $ii)$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=\sum_{i=1}^{n}2i-\sum_{i=1}^{n}1=2\sum_{i=1}^{n}i-n=n(n+1)-n=n^2.$$

Για την $iii)$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\cdot(i+1)}=\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\Big)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}$$

$$=1+\Big(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\Big)-\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i+1}\Big)-\frac{1}{n+1}$$

Όμως, οι ποσότητες, μέσα στις παρενθέσεις, στο τελευταίο αλγεβρικό άθροισμα, είναι ακριβώς οι ίδιες, οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

Παράδειγμα 1.10 *Να δειχτεί ότι*

$$i)\ \sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\qquad ii)\ \sum_{i=1}^{n}i^3=\Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2,$$

Λύση Και στις δυο περιπτώσεις θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Για $n=1$ η $i)$ ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει όπως είναι και θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n+1$. Πράγματι, προσθέτοντας και στα δυο μέλη το $(n+1)^2$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n}i^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2,\ \text{οπότε}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{n+1}{6}(2n^2+n+6n+6)$$
$$= \frac{n+1}{6}(2n^2+4n+3n+6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Ομοίως για $n=1$ η $ii)$ ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει όπως είναι και θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n+1$. Προσθέτοντας πάλι και στα δυο μέλη το $(n+1)^3$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3, \text{ οπότε}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

1.7 Το διώνυμο του Newton

Το διώνυμο του Newton είναι γνωστό από το Γυμνάσιο. Ίσως όχι στη γενική του μορφή, αλλά είναι γνωστό. Για παράδειγμα, όλοι θυμούνται την ταυτότητα $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Γενικά έχουμε ότι

Θεώρημα 1.7.1*Για κάθε a και $b \in \mathbb{R}$ και i και $n \in \mathbb{N}$, ισχύει*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \tag{1.21}$$

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά. Για $n=1$ η ισότητα είναι προφανής. Δεχόμενοι ως ορθή την ισότητα (1.21) και πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της με $(a+b)$ προκύπτει:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} + b^{n+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^{n+1-i} b^i + b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] a^{n+1-i} b^i + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i
\end{aligned}
$$

□

Επιπλέον το $i)$ από το Λήμμα 1.5.1 μας αποδεικνύει τη στενή σχέση που έχουν οι συντελεστές του ενός διωνύμου με τους στελεστές του επόμενου. Μάλιστα, τοποθετούμενοι κατάλληλα, δημιουργούν ένα τρίγωνο γνωστό ως **τρίγωνο του Pascal**, το οποίο φαίνεται στον επόμενο πίνακα μέχρι του $n = 5$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & & & + & & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & & & + & & + & & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & & & + & & + & & + & & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & & + & & + & & + & & + & & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Επίσης το $ii)$ από το Λήμμα 1.5.1 μας δείχνει τη στενή σχέση που έχουν ο συντελεστής του κάθε όρου του αθροίσματος του διωνύμου του Newton με εκείνον του προηγούμενου. Πράγματι, αν πολλαπλασιάσουμε το συντελεστή ενός όρου με τον εκθέτη της δύναμης που μειώνεται και το γινόμενο το διαιρέσουμε με τον αριθμό της θέσης που κατέχει ο όρος αυτός στο άθροισμα, βρίσκουμε τον επόμενο συντελεστή. Για παράδειγμα, ο τέταρτος όρος του $(a+b)^5$ είναι $10a^2b^3$, ο συντελεστής του πέμπτου όρου (του επόμενου) βρίσκεται ως εξής: $10 \cdot 2 : 4 = 5$.

Παράδειγμα 1.11 *Να δειχτεί ότι*

$$i)\ \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n, \qquad ii)\ \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2i} = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2i+1}$$

όπου το $[\frac{n}{2}]$ *σημαίνει το ακέραιο μέρος του* $\frac{n}{2}$.

Λύση Για την πρώτη από τις παραπάνω σχέσεις θέτουμε $a = 1$ και $b = 1$ στη σχέση (1.21), οπότε παίρνουμε το ζητούμενο

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Για τη δεύτερη θέτουμε $a = 1$ και $b = -1$ στη σχέση (1.21), οπότε παίρνουμε

$$0 = (1-1)^n = \binom{n}{0} 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1}(-1) + \cdots + \binom{n}{k} 1^{n-k}(-1)^k + \cdots + \binom{n}{n}(-1)^n$$

και αναδιατάσσοντας αυτή, παίρνουμε τη ζητούμενη.

Ασκήσεις

Άσκηση 1.1 *Θεωρούμε το σύνολο* $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. *Να βρεθεί ένα σύνολο* $X \subseteq A$ *για το οποίο ισχύει*

$$i)\ X \cap \{d, e, f, g, h\} = \{a, f, h\} \qquad ii)\ X \cap \{d, e, f, g, h\} = \{f, g\}$$

Άσκηση 1.2 *Να δειχτεί η ii) του παραδείγματος (1.2).*

Άσκηση 1.3 *Έχει βρεθεί πειραματικά ότι, από έναν πληθυσμό 150 ατόμων ενός είδους, 75 άτομα αντιδρούν θετικά στην ουσία A, 98 αντιδρούν θετικά στην ουσία B και 42 αντιδρούν θετικά και στις δυο ουσίες. Να βρεθεί πόσα άτομα δεν αντιδρούν καθόλου στις παραπάνω ουσίες, πόσα άτομα αντιδρούν θετικά μόνον στην ουσία A και πόσα μόνον στην ουσία B.*

Άσκηση 1.4 *Να γίνουν οι πράξεις και οι απλοποιήσεις των παρακάτω παραστάσεων*

$$i)\ \frac{12!24!}{22!11!} \qquad ii)\ \frac{A}{3!4!}+\frac{B}{5!2!} \qquad iii)\ \frac{(n+2)!(n-1)!}{n!(n+1)!} \qquad iv)\ n!(n+3)-n^2(n-1)!$$

Άσκηση 1.5 *Να δειχτεί ότι*

$$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n+i}{m}=\binom{n+k}{m+1}$$

Άσκηση 1.6 *Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε 20 βιβλία στη σειρά, ώστε δυο κόκκινα να είναι πάντα δίπλα-δίπλα;*

Άσκηση 1.7 *Να δειχτεί ότι*

$$i)\ (n)\binom{n-1}{k-1}=(k)\binom{n}{k} \qquad ii)\ \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$$

Άσκηση 1.8 *Θεωρήστε τις ταυτότητες* $(1+x)^n$ *και* $(1+x)^m$. *Για* $j \le \min\{m,n\}$ *υπολογίστε το συντελεστή του όρου* x^j *από το γινόμενο* $(1+x)^n(1+x)^m$. *Υπολογίστε το συντελεστή του όρου* x^j *από την ταυτότητα* $(1+x)^{m+n}$. *Αποδείξτε την ταυτότητα* $\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.

Άσκηση 1.9 *Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.21), να δειχτεί ότι*

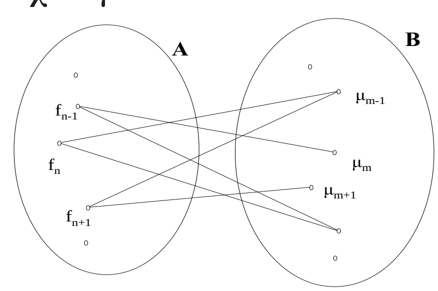
$$\forall\ \theta \ge 0, \quad (1+\theta)^n \ge 1+n\theta,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, να δειχτεί ότι η παραπάνω σχέση ισχύει $\forall\ \theta \ge -1$

Ακολουθίες - Σειρές

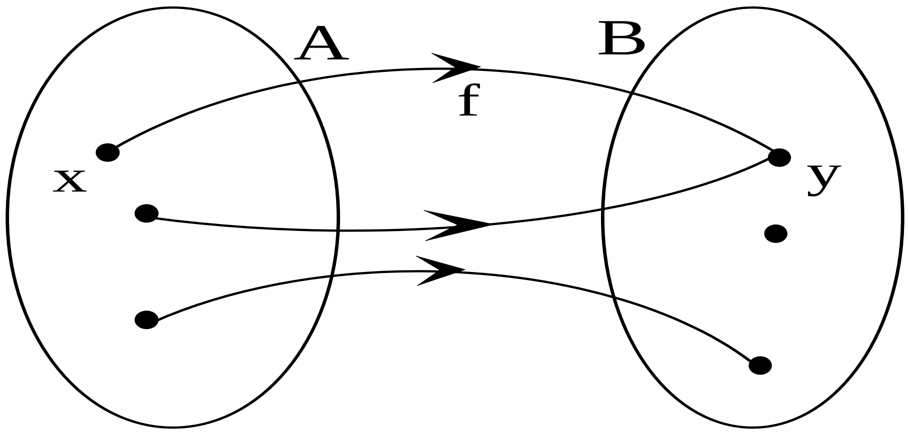
2.1 Οι σχέσεις

Στην καθημερινότητά μας τα στοιχεία των συνόλων συνδέονται λογικά μεταξύ τους, π.χ. οι φοιτητές του τμήματος Δ.Π.Φ.Π του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων διδάσκονται τα μαθήματα του προγράμματος σπουδών τους. Ο κανόνας, ο νόμος που συνδέει δυο σύνολα μεταξύ τους λέγεται **σχέση**.



Μαθηματικοποιώντας τα παραπάνω θα μπορούσαμε να έχουμε το σύνολο $A = \{x/x$ φοιτητής του τμήματος Δ.Π.Φ.Π$\}$ το $B = \{x/x$ μάθημα του προγράμματος σπουδών του τμήματος Δ.Π.Φ.Π$\}$ και ως σχέση σ την έκφραση «Ο φοιτητής x διδάσκεται το μάθημα y». Το σύνολο A λέγεται σύνολο **αφετηρίας** και το σύνολο B λέγεται σύνολο **άφιξης**. Τα στοιχεία του συνόλου A λέγονται **αρχέτυπα**, ενώ τα στοιχεία του συνόλου B λέγονται **εικόνες**. Το σύνολο $G \subseteq A \times B$ που αποτελείται από τα στοιχεία που συνδέονται μεταξύ τους με την σχέση σ λέγεται **γράφημα** της σχέσης. Η τριάδα (A, B, G) προσδιορίζει πλήρως μια σχέση (ή τη σχέση). Οι σχέσεις παίζουν σπουδαίο ρόλο στη θεωρία των Μαθηματικών. Ανάλογα με τις ιδιότητες που έχουν, μας δίνουν ειδικές σχέσεις. Η απεικόνιση είναι μια τέτοια ειδική σχέση.

Ορισμός 2.1.1 *Η* **απεικόνιση** *f ενός συνόλου A σε ένα σύνολο B είναι μια σχέση όπου σε κάθε στοιχείο x του συνόλου A αντιστοιχίζει ένα μοναδικό στοιχείο y του συνόλου B και συμβολίζεται $f : A \to B,\ y = f(x)$.*



Σχήμα 2.3: Η απεικόνιση $f : A \to B,\ y = f(x)$.

2.2 Ακολουθίες

Μια απεικόνιση για την οποία έχουμε $A = \mathbb{N}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$, λέγεται **ακολουθία** πραγματικών αριθμών. Η ακολουθία, αντί του συμβολισμού $a(n)$, συνήθως συμβολίζεται με το a_n. Οι $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ λέγονται όροι της ακολουθίας και δεν είναι τίποτε άλλο, παρά οι $a(0), a(1), a(2), a(3), \ldots, a(n), \ldots$. Οι όροι της ακολουθίας είναι, προφανώς, άπειροι. Οι ακολουθίες ορίζονται από κάποιο τύπο, π.χ. στις ακολουθίες $a_n = \frac{1}{n}$ με $n \neq 0$, $b_n = 2n + 1$ οι όροι τους προκύπτουν, αν στη θέση του n θέσουμε στοιχεία από το σύνολο $\mathbb{N}$. Κάποιοι όροι για τις ακολουθίες αυτές είναι: $a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_{10} = \frac{1}{10},\ b_1 = 3,\ b_5 = 11$. Άλλοτε πάλι οι ακολουθίες ορίζονται αναδρομικά από μια σχέση και κάποιον ή κάποιους πρώτους όρους, έτσι έχουμε π.χ. την ακολουθία που ορίζεται από τους πρώτους όρους $a_1 = 1,\ a_2 = 1$ και την αναδρομική σχέση $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, μερικοί όροι αυτής είναι: $a_3 = 2,\ a_4 = 3,\ a_5 = 5,\ a_6 = 8$. Το ότι οι όροι της ακολουθίας είναι άπειροι δε σημαίνει ότι και οι τιμές που παίρνει μια ακολουθία είναι συγχρόνως άπειρες. Για παράδειγμα η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ παίρνει μόνο δυο τιμές, το 1 και το -1.

Οι τιμές της ακολουθίας για συγκεκριμένες τιμές του n είναι πλήρως προσδιορίσιμες και, ως εκ τούτου, δεν έχουν ενδιαφέρον. Το ενδιαφέρον των ακολουθιών έγκειται στο τι κάνουν «τελικά» και όταν λέμε τελικά, εννοούμε τι συμβαίνει για κάθε n μεγαλύτερο από κάποιο n_0 ($\forall\, n > n_0$). Σχετικές έννοιες με αυτό είναι η έννοια της μονοτονίας, η έννοια του φράγματος και η έννοια της σύγκλισης.

2.2.1 Η μονοτονία

Ορισμός 2.2.1 *Μια ακολουθία λέγεται αύξουσα (γνησίως αύξουσα), αν και μόνον αν*

$$a_n \leq (<) a_{n+1}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Μια ακολουθία λέγεται φθίνουσα (γνησίως φθίνουσα), αν και μόνον αν

$$a_n \geq (>) a_{n+1}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Παρατήρηση 2.2.1 *Οι έννοια της αύξουσας (γνησίως αύξουσας) ακολουθίας δεν αλλάζει ουσιαστικά, αν η σχέση προσδιορισμού της αντικατασταθεί από την $\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \leq (<) a_{n+1}, \ \forall \ n > n_0$. Αντίστοιχα και για την έννοια της φθίνουσας (γνησίως φθίνουσας) ακολουθίας.*

Παράδειγμα 2.1 *Θεωρούμε τις ακολουθίες*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{2.1}$$

Να δείξετε ότι η a_n είναι μια αύξουσα ακολουθία, ενώ η b_n μια φθίνουσα.

Λύση Αρχικά παρατηρούμε ότι και οι δυο ακολουθίες έχουν θετικούς όρους $\forall n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τώρα το λόγο $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ και θα δείξουμε ότι είναι μεγαλύτερος του ένα.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Όμως, από την ανισότητα του Bernoulli, Άσκηση (1.9), προκύπτει

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$$

Θεωρούμε επίσης το λόγο $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ και θα δείξουμε ότι είναι μικρότερος του ένα.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^{n+2}}{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1}} = \frac{\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big)^{n+2}}{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+2}}\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = \Big(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\Big)^{n+2}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)$$

$$= \Big(\frac{1}{\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}}\Big)^{n+2}\Big(\frac{n+1}{n}\Big) = \frac{1}{\Big(1+\frac{1}{n^2+2n}\Big)^{n+2}}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)$$

Από την ανισότητα του Bernoulli, Άσκηση (1.9), και με δεδομένο ότι, όταν μεγαλώνει ο παρονομαστής ενός κλάσματος με θετικούς όρους, προκύπτει μικρότερο κλάσμα, έχουμε

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{1}{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)}\Big(\frac{n+1}{n}\Big) = 1$$

$\square$

Παράδειγμα 2.2*Θεωρούμε την ακολουθία*

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{2}{a_n}\Big) \tag{2.2}$$

Να δείξετε ότι η a_n είναι μια φθίνουσα ακολουθία.

Λύση Παρατηρούμε ότι η ακολουθία έχει θετικούς όρους $\forall\ n \ \in \mathbb{N}$. Επίσης $a_2 = \frac{5}{4} < 2 = a_1$. Θεωρούμε τώρα τη διαφορά $a_{n+1} - a_n$ και θα δείξουμε ότι είναι μικρότερη του μηδενός.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{2}{a_n}\Big) - a_n = \frac{2-a_n^2}{2a_n}$$

Αφού $a_n \geq 0$, απομένει να δούμε το πρόσημο του αριθμητή. Έτσι

$$2 - a_n^2 = 2 - \Big(\frac{2-a_{n-1}^2}{2a_{n-1}}\Big)^2 = 2 - \frac{4-4a_{n-1}^2+a_{n-1}^4}{4a_{n-1}^2} = -\frac{(2-a_{n-1}^2)^2}{4a_{n-1}^2} \leq 0.$$

$\square$

2.2.2 Τα φράγματα

Ορισμός 2.2.2 *Λέμε ότι μια ακολουθία είναι φραγμένη, αν και μόνον αν*

$$\exists\ \phi \text{ και } \Phi \in \mathbb{R}:\ \phi \leq a_n \leq \Phi,\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.3}$$

Παρατήρηση 2.2.2 *Μια ακολουθία λέγεται απολύτως φραγμένη, αν ισχύει $|a_n| \leq \theta$. Προφανώς, για μια απολύτως φραγμένη ακολουθία θα ισχύει και $-\theta \leq a_n \leq \theta$, δηλ. μια απολύτως φραγμένη ακολουθία είναι και φραγμένη. Όμως και αντιστρόφως, μια φραγμένη ακολουθία είναι και απολύτως φραγμένη, αφού αρκεί να πάρουμε $\theta = \max\{|\phi|, |\Phi|\}$*

Παράδειγμα 2.3 *Θεωρούμε τις ακολουθίες*

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = \frac{n^2+10}{2n^2+n}$$

Να δείξετε ότι οι ακολουθίες αυτές είναι φραγμένες.

Λύση Η ακολουθία a_n είναι φραγμένη, διότι εύκολα κάποιος παρατηρεί ότι $0 \leq a_n \leq 1$. Για την ακολουθία b_n παρατηρούμε αρχικά ότι $b_n \geq 0$. Επίσης, μερικοί όροι της ακολουθίας είναι οι εξής: $b_1 = \frac{11}{3}$, $b_2 = \frac{14}{10}$, $b_3 = \frac{19}{21}$ κ.λπ. Φαίνεται, λοιπόν, ότι ένα πιθανό φράγμα είναι το 4. Έτσι

$$b_n \leq 4 \Leftrightarrow \frac{n^2+10}{2n^2+n} \leq 4 \Leftrightarrow n^2+10 \leq 8n^2+4n \Leftrightarrow 7n^2+4n-10 \geq 0.$$

Η τελευταία όμως αληθεύει $\forall\ n \geq 1$.

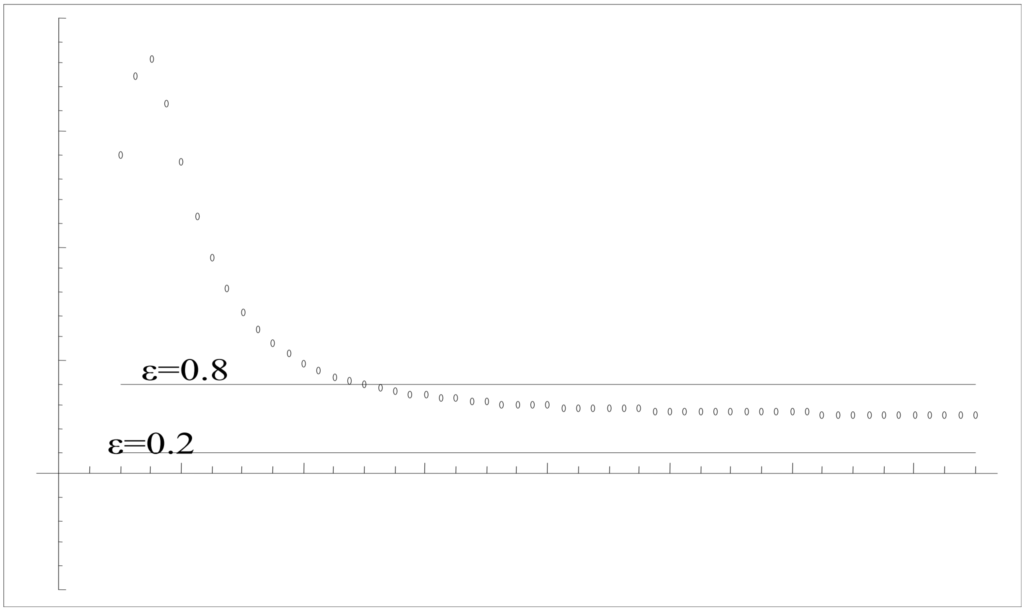
Παράδειγμα 2.4 *Να δείξετε ότι οι ακολουθίες των παραδειγμάτων (2.1) και (2.2) είναι φραγμένες.*

Λύση Για τις ακολουθίες του παραδείγματος (2.1) παρατηρούμε ότι

$$2 = a_1 \leq a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n \leq b_1 = 4$$

Επίσης, για την ακολουθία του παραδείγματος (2.2) ισχύει

$$2 = a_1 \geq a_n \geq 0$$



Σχήμα 2.4: Όριο της ακολουθίας $a_n = \frac{n^4+13n^2+17}{2n^4-10n+19}$.

2.2.3 Η σύγκλιση

Η σύγκλιση των ακολουθιών είναι το πλέον σημαντικό μέρος αυτών. Η έννοια είναι ήδη γνωστή από το Λύκειο, ωστόσο θα δώσουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.2.3*Λέμε ότι μια ακολουθία a_n συγκλίνει σε ένα αριθμό l και συμβολίζουμε $\lim a_n = l$ ή $a_n \to l$, αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε $|a_n - l| < \varepsilon$ για κάθε $n > n_0$ ($\forall n > n_0$).*

Το l λέγεται όριο της ακολουθίας και αποδείχνεται, ότι αν μια ακολουθία έχει κάποιο όριο, τότε το όριο αυτό είναι μοναδικό. Μια ακολουθία που συγκλίνει λέγεται συγκλίνουσα ακολουθία. Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η μεταβλητή n έχει τη δυνατότητα να τείνει μόνον στο ∞ και επομένως δε χρειάζεται να φαίνεται αυτό κάτω από το lim. Ειδικά, όταν $l = 0$, η ακολουθία λέγεται **μηδενική**. Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κάποιος από τον ορισμό ότι

$$\lim a_n = 0 \Longleftrightarrow \lim |a_n| = 0 \tag{2.4}$$

Ο παραπάνω ορισμός ουσιαστικά μας λέει ότι «τελικά» οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται στο εσωτερικό της ταινίας που προσδιορίζεται από τις ευθείες $x = l - \varepsilon$ και $x = l + \varepsilon$. Αυτό μπορεί κάποιος να το δει στο Σχήμα 2.4, όπου για την ακολουθία $a_n = \frac{n^4+13n^2+17}{2n^4-10n+19}$, έχουμε $l = \frac{1}{2}$ και $\varepsilon = 0.3$. Από τον ορισμό προκύπτει ότι για ένα συγκεκριμένο ε_0, ισχύει $l - \varepsilon_0 \leq a_n \leq l + \varepsilon_0 \ \forall \ n > n_0$. Έτσι, αν θέσουμε $\phi = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, l - \varepsilon_0\}$ και $\Phi = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, l + \varepsilon_0\}$, έχουμε ότι $\phi \leq a_n \leq \Phi, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, το οποίο σημαίνει ότι μια συγκλίνουσα ακολουθία είναι πάντοτε φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει!

Παράδειγμα 2.5*Να δειχτεί ότι*

$$\lim \frac{1}{n} = 0 \tag{2.5}$$

Λύση Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \ n_0 : \forall \ n \in \mathbb{N} \ \text{ με } n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Όμως ισχύει $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$. Επομένως αρκεί να πάρουμε ως n_0 το $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Παράδειγμα 2.6*Να δειχτεί ότι*

$$\lim \frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2}{3} \tag{2.6}$$

Λύση Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \ n_0 : \forall \ n \in \mathbb{N} \ \text{ με } n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{2n+1}{3n-2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$$

Όμως ισχύει $\left|\frac{2n+1}{3n-2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{6n+3-6n+4}{3(3n-2)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{7}{3(3n-2)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \left|\frac{6\varepsilon+7}{9\varepsilon}\right|$ Επομένως, αρκεί να πάρουμε ως n_0 το $\left[\frac{6\varepsilon+7}{9\varepsilon}\right]$.

Η μελέτη των ορίων με τον ορισμό είναι εξαιρετικά πολύπλοκη διαδικασία, όμως, για τη μελέτη αυτών, έχουν αναπτυχθεί θεωρήματα και κριτήρια σύγκλισης, που διευκολύνουν σημαντικά. Στη συνέχεια, θα παραθέσουμε ορισμένα από αυτά, αποφεύγοντας αποδείξεις που δεν εμπίπτουν στους σκοπούς του εγχειριδίου αυτού.

Θεώρημα 2.2.4(**Άλγεβρα των Ορίων**) *Έστω ότι* $\lim a_n = k$ *και* $\lim b_n = l$. *Τότε ισχύει*

$$\begin{array}{rcl}
\lim (c \cdot a_n) = c \cdot k & ή & \lim (c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n \\
\lim (a_n \pm b_n) = k \pm l & ή & \lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n \\
\lim (a_n \cdot b_n) = k \cdot l & ή & \lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n \\
\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{k}{l} & ή & \lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n},\ \mu\epsilon\ b_n \neq 0\ \kappa\alpha\iota\ l \neq 0 \\
\lim |a_n| = |k| & ή & \lim |a_n| = |\lim a_n| \\
\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{k} & ή & \lim \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim a_n},\ \mu\epsilon\ a_n > 0,\ \forall n
\end{array}$$

Τις περισσότερες φορές το Θεώρημα 2.2.4 δεν εφαρμόζεται άμεσα, επειδή δεν ισχύουν άμεσα οι προϋποθέσεις του. Έτσι το εφαρμόζουμε, αφού κάνουμε τις σχετικές τροποποιήσεις και απλοποιήσεις.

Παράδειγμα 2.7*Να βρεθεί το όριο των ακολουθιών*

$$i)\ a_n = \frac{2n^2+3n}{3n^2+4} \quad ii)\ b_n = \frac{\sqrt{2n^2-1}+n}{2n+\sqrt{n^2+2}} \quad iii)\ c_n = \frac{\sqrt{4n^2-1}-2n}{n-\sqrt{n^2+2}}$$

Λύση *i)* $a_n = \frac{2n^2+3n}{3n^2+4} = \frac{n^2(2+\frac{3}{n})}{n^2(3+\frac{4}{n})} = \frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{4}{n}}$, οπότε από το Θεώρημα 2.2.4 και τη σχέση (2.5) βρίσκουμε

$$\lim a_n = \frac{\lim (2+\frac{3}{n})}{\lim (3+\frac{4}{n})} = \frac{(2+\lim \frac{3}{n})}{(3+\lim \frac{4}{n})} = \frac{(2+3\lim \frac{1}{n})}{(3+4\lim \frac{1}{n})} = \frac{2+3\cdot 0}{3+4\cdot 0} = \frac{2}{3}$$

ii) $b_n = \frac{\sqrt{2n^2-1}+n}{2n+\sqrt{n^2+2}} = \frac{n\sqrt{2-\frac{1}{n}}+n}{2n+n\sqrt{1+\frac{2}{n}}} = \frac{n\left(\sqrt{2-\frac{1}{n}}+1\right)}{n\left(2+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)} = \frac{\sqrt{2-\frac{1}{n}}+1}{2+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$, οπότε από το Θεώρημα 2.2.4 και τη σχέση (2.5) βρίσκουμε

$$\lim b_n = \lim \frac{\sqrt{2-\frac{1}{n}}+1}{2+\sqrt{1+\frac{2}{n}}} = \frac{\lim (\sqrt{2-\frac{1}{n}}+1)}{\lim (2+\sqrt{1+\frac{2}{n}})}$$

$$= \frac{\sqrt{2-\lim \frac{1}{n}}+1}{2+\sqrt{1+\lim \frac{2}{n}}} = \frac{\sqrt{2-0}+1}{2+\sqrt{1+0}} = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$$

iii) Η τεχνική της προηγούμενης περίπτωσης δεν εφαρμόζεται άμεσα τώρα. Έτσι, $c_n = \frac{\sqrt{4n^2-1}-2n}{n-\sqrt{n^2+2}} = \frac{\sqrt{4n^2-1}-2n}{n-\sqrt{n^2+2}} \cdot \frac{\sqrt{4n^2-1}+2n}{n+\sqrt{n^2+2}} \cdot \frac{n+\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{4n^2-1}+2n} = \frac{-1}{-2} \cdot \frac{n+\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{4n^2-1}+2n}$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{n\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\right)}{n\left(\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}+2\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}+2}$, οπότε από το Θεώρημα 2.2.4 και τη σχέση (2.5) βρίσκουμε

$$\lim c_n = \frac{1}{2} \cdot \lim \frac{1+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}+2} = \cdots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{1+0}}{\sqrt{4-0}+2} = \frac{1}{4}.$$

Το επόμενο Θεώρημα, που παρατίθεται χωρίς απόδειξη, είναι ιδιαίτερα σημαντικό και με αυτό θα αποδείξουμε προτάσεις και βασικά όρια, ιδιαίτερα χρήσιμα στη μελέτη των ακολουθιών.

Θεώρημα 2.2.5(*Θεώρημα του sandwich*) *Θεωρούμε τις ακολουθίες a_n, b_n και c_n, για τις οποίες ισχύει*

$$\lim a_n = l = \lim b_n \quad \textit{και} \quad a_n \leq c_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

τότε θα ισχύει και

$$\lim c_n = l$$

Πρόταση 2.2.6*Αν η ακολουθία a_n είναι μηδενική ($\lim a_n = 0$) και η b_n είναι φραγμένη, τότε η ακολουθία $a_n \cdot b_n$ είναι μηδενική ($\lim (a_n \cdot b_n) = 0$).*

Απόδειξη: Αφού η b_n είναι φραγμένη, τότε $\exists M \in \mathbb{R} : |b_n| < M,\ \forall n \in \mathbb{N}$ και αφού $\lim a_n = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n| = 0$. Έτσι

$$0 < |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < M \cdot |a_n| \to 0 \Leftrightarrow \lim (a_n \cdot b_n) = 0.$$

□

Πρόταση 2.2.7(*Βασικά όρια.*)

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ με } |a| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim a^n = 0 \tag{2.7}$$

$$\forall\ a > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim \sqrt[n]{a} = 1 \tag{2.8}$$

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1 \tag{2.9}$$

Απόδειξη: Για την (2.7), αφού $|a| < 1$, τότε $\frac{1}{|a|} > 1$, οπότε $\frac{1}{|a|} = 1 + \theta$, όπου θ κάποιος θετικός πραγματικός αριθμός. Έτσι, έχοντας στο μυαλό μας και την ανισότητα του Bernoulli

$$\left(\frac{1}{|a|}\right)^n = \left(1+\theta\right)^n \geq 1 + n\theta \geq n\theta \Rightarrow 0 \leq |a|^n \leq \frac{1}{n\theta} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\theta} \to 0$$

Για τη (2.8), θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις, την $i)$ $a > 1$ και $ii)$ $a < 1$, η περίπτωση $a = 1$ είναι τετριμμένη. Αν $a > 1$, τότε και $\sqrt[n]{a} > 1$, οπότε $\sqrt[n]{a} = 1 + \theta_n$, όπου θ_n κάποια θετική πραγματική ακολουθία. Έτσι, με τη βοήθεια της ανισότητας του Bernoulli

$$\sqrt[n]{a} = 1 + \theta_n \Rightarrow a = (1+\theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n \geq n\theta_n \Rightarrow \theta_n \leq \frac{a}{n} \to 0$$

Οπότε $\lim \sqrt[n]{a} = \lim(1+\theta_n) = 1 + \lim \theta_n = 1 + 0 = 1$. Αν $a < 1$, τότε και $\sqrt[n]{a} < 1$, οπότε $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{1+\theta_n}$, όπου θ_n κάποια θετική πραγματική ακολουθία. Στη συνέχεια, ακολουθούμε την πορεία της προηγούμενης περίπτωσης (να γίνει ως άσκηση).
Για την (2.9), αρχικά παρατηρούμε ότι $\sqrt[2n]{n} > 1$, οπότε $\sqrt[2n]{n} = 1 + \theta_n$, όπου θ_n κάποια θετική πραγματική ακολουθία. Έτσι (ανισότητα του Bernoulli)

$$\sqrt[2n]{n} = 1 + \theta_n \Leftrightarrow \sqrt{n} = (1+\theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n \geq n\theta_n \Rightarrow \theta_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

Οπότε έχουμε $(\sqrt[2n]{n})^2 = (1+\theta_n)^2 \Leftrightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + 2\theta_n + \theta_n^2 \to 1 + 2\cdot 0 + 0^2 = 1$ □

Παράδειγμα 2.8*Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών*

$$i)\ a_n = \sqrt[n]{n^2+3n} \qquad ii)\ b_n = \sqrt[n]{2^n+3^n} \qquad iii)\ c_n = \frac{2^n+5^{n+1}}{3^{n+1}+5^n}$$

Λύση Για την $i)$ ισχύει $a_n = \sqrt[n]{n^2+3n} = \sqrt[n]{n^2(1+\frac{3}{n})} = \sqrt[n]{n^2}\sqrt[n]{(1+\frac{3}{n})}$. Όμως, έχουμε $\lim \sqrt[n]{n^2} = \lim(\sqrt[n]{n})^2 = 1^2 = 1$ και $1 \leq \sqrt[n]{(1+\frac{3}{n})} \leq \sqrt[n]{4} \to 1$, οπότε

$$\lim a_n = \lim \sqrt[n]{n^2} \cdot \lim \sqrt[n]{(1+\frac{3}{n})} = 1 \cdot 1 = 1$$

Για την *ii*) έχουμε $b_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n} = \sqrt[n]{3^n(1 + (\frac{2}{3})^n)} = 3\sqrt[n]{1 + (\frac{2}{3})^n}$. Όμως, έχουμε $1 \leq \sqrt[n]{1 + (\frac{2}{3})^n} \leq \sqrt[n]{2} \to 1$. Έτσι

$$\lim b_n = 3 \lim \sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Για την *iii*) παίρνουμε

$$c_n = \frac{2^n + 5^{n+1}}{3^{n+1} + 5^n} = \frac{5^n[(\frac{2}{5})^n + 5]}{5^n[3(\frac{2}{5})^n + 1]} = \frac{(\frac{2}{5})^n + 5}{3(\frac{2}{5})^n + 1} \to \frac{0 + 5}{3 \cdot 0 + 1} = 5.$$

Στην αρχή της παραγράφου αυτής αναφέραμε ότι μια ακολουθία που συγκλίνει είναι φραγμένη. Στη συνέχεια, θα αναφέρουμε ένα Θεώρημα που συνδέει τη μονοτονία, τα φράγματα και το όριο. Το παραθέτουμε χωρίς απόδειξη, αφού αυτή ξεφεύγει από το σκοπό μας.

Θεώρημα 2.2.8*Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.*

Παρατήρηση 2.2.3*Μια διαφορετική διατύπωση θα ήταν η εξής: «Κάθε μονότονη ακολουθία συγκλίνει, αν και μόνο αν είναι φραγμένη».*

Παρατήρηση 2.2.4*Προσοχή, η σύγκλιση συνεπάγεται μόνο το φραγμένο της ακολουθίας και όχι και τη μονοτονία της, π.χ. η ακολουθία $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, ενώ τείνει στο 0, δεν είναι μονότονη.*

Παράδειγμα 2.9*Να δείξετε ότι οι ακολουθίες*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

Λύση Στο Παράδειγμα 2.1 δείξαμε ότι οι ακολουθίες αυτές είναι μονότονες (αύξουσα η πρώτη και φθίνουσα η δεύτερη). Επίσης στο Παράδειγμα 2.4 ότι είναι φραγμένες. Από το Θεώρημα 2.2.8 έπεται ότι οι ακολουθίες αυτές συγκλίνουν. Υποθέτουμε ότι $\lim a_n = l$. Τότε θα έχουμε

$$\lim (b_n - a_n) = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= l \cdot \lim \frac{1}{n} = l \cdot 0 = 0$$

Επομένως $\lim b_n = \lim [(b_n - a_n) + a_n] = 0 + l = l$. Το κοινό αυτό όριο ορίζεται να είναι ο γνωστός μας άρρητος αριθμός **e**$= 2.71828...$

Παράδειγμα 2.10 *Να δειχτεί ότι η ακολουθία $a_n = n(\sqrt[n]{2} - 1)$ είναι φραγμένη.*

Λύση Προφανώς οι όροι της είναι θετικοί· παίρνοντας μερικούς πρώτους όρους, παρατηρούμε ότι αυτοί είναι μικρότεροι του ένα. Έτσι

$$0 < a_n < 1 \Leftrightarrow n(\sqrt[n]{2} - 1) < 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{2} < 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow 2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{2.10}$$

Όμως αυτό ισχύει από το Παράδειγμα 2.1.

Παράδειγμα 2.11 *Να δείξετε ότι η ακολουθία*

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{2}{a_n}\Big), \ \forall n \geq 1$$

συγκλίνει και να βρεθεί το όριο.

Λύση Από το Παράδειγμα 2.2 γνωρίζουμε ότι η ακολουθία μας είναι φθίνουσα με θετικούς όρους. Επιπλέον, από το Παράδειγμα 2.4 βλέπουμε ότι αυτή είναι και φραγμένη. Επομένως, από το Θεώρημα 2.2.8 έπεται ότι η ακολουθία συγκλίνει και μάλιστα το όριό της είναι θετικός αριθμός.
Έστω $\lim a_n = l \Rightarrow \lim a_{n+1} = l$, οπότε έχουμε

$$\lim a_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{2}{a_n}\Big) \Rightarrow l = \frac{1}{2}\Big(l + \frac{2}{l}\Big) \Leftrightarrow 2l^2 = l^2 + 2 \Rightarrow l = \sqrt{2}$$

2.2.4 Υπακολουθίες

Ας θεωρήσουμε, τώρα, μια ακολουθία a_n και ας είναι A_n το σύνολο των όρων αυτής, δηλ $A_n = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$. Μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, έστω η k_n, μπορεί να ορίσει μια άλλη ακολουθία την $b_n = a_{k_n}$. Είναι φανερό ότι η καινούργια ακολουθία αποτελείται από όρους της αρχικής. Αν με A_{k_n} παραστήσουμε το σύνολο των όρων της, τότε $A_{k_n} = \{a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \ldots, a_{k_n}, \ldots\}$ και ισχύει $A_{k_n} \subseteq A_n$. Η καινούργια ακολουθία, που δημιουργήθηκε με αυτόν τον τρόπο, λέγεται υπακολουθία της αρχικής. Τα χαρακτηριστικά της αρχικής τα κληρονομεί και η υπακολουθία της. Έτσι

Πρόταση 2.2.9*Αν μια ακολουθία είναι φραγμένη, τότε το ίδιο φραγμένη είναι και κάθε υπακολουθία της.*

Πρόταση 2.2.10*Αν μια ακολουθία είναι μονότονη, τότε το ίδιο μονότονη είναι και κάθε υπακολουθία της.*

Πρόταση 2.2.11*Αν μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα, τότε κάθε υπακολουθία αυτής συγκλίνει στο ίδιο όριο.*

Η άρνηση των παραπάνω προτάσεων είναι εξαιρετικά χρήσιμη για να δείξουμε ότι η ακολουθία μας δεν έχει κάποιο από τα παραπάνω χαρακτηριστικά. Δηλ. για να δείξουμε ότι μια ακολουθία δε συγκλίνει, αρκεί να δείξουμε ότι μια υπακολουθία της δε συγκλίνει ή ότι δυο υπακολουθίες αυτής συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια.

Παράδειγμα 2.12*Να δειχτεί ότι δε συγκλίνουν οι ακολουθίες*

$$i)\ a_n = \sin\frac{\pi n}{2} \qquad ii)\ b_n = \cos\frac{\pi n}{2}$$

Λύση Θεωρούμε τις υπακολουθίες a_{4n+1} και a_{4n+3}. Γι αυτές έχουμε $a_{4n+1} = \sin\frac{\pi(4n+1)}{2} = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, ενώ $a_{4n+3} = \sin\frac{\pi(4n+3)}{2} = \sin(2\pi n + \frac{3\pi}{2})$ $= \sin\frac{3\pi}{2} = -1$. Αφού $\lim a_{4n+1} \neq \lim a_{4n+3}$, η ακολουθία δε συγκλίνει. Ανάλογα και για την $ii)$.

Εξαιρετικά χρήσιμη αποδείχνεται πολλές φορές η μελέτη των υπακολουθιών των άρτιων και των περιττών όρων αυτής, ιδιαίτερα, όταν οι όροι της δε διατηρούν πρόσημο ή όταν οι διαφορές δυο διαδοχικών ζευγαριών όρων δε διατηρούν πρόσημο, όπως στο Παράδειγμα 2.15. Το επόμενο Θεώρημα, που εύκολα κάποιος μπορεί να αποδείξει με τον ορισμό της σύγκλισης και εδώ δε θα αποδειχτεί, είναι εξαιρετικά χρήσιμο.

Θεώρημα 2.2.12*Μια ακολουθία a_n συγκλίνει, αν και μόνο αν συγκλίνουν στο ίδιο όριο οι υπακολουθίες των άρτιων (a_{2n}) και των περιττών (a_{2n+1}) όρων αυτής, δηλ.*

$$\lim a_n = l \Longleftrightarrow \lim a_{2n} = l = \lim a_{2n+1} \tag{2.11}$$

Παράδειγμα 2.13 *Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας*

$$a_n = \Big(1 + \frac{(-1)^n}{n}\Big)^n \Big(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\Big)^{n+1}$$

Λύση Αρχικά, θα δείξουμε ότι $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ Πράγματι

$$\lim \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^n = \lim \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \lim \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} = \lim \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}$$

$$= \lim \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e(1+0)} = \frac{1}{e}$$

Θεωρούμε, τώρα, τις υπακολουθίες a_{2n} και a_{2n+1}, οπότε παίρνουμε

$$a_{2n} = \Big(1 + \frac{(-1)^{2n}}{2n}\Big)^{2n} \Big(1 + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n}\Big)^{2n+1} = \Big(1 + \frac{1}{2n}\Big)^{2n} \Big(1 - \frac{1}{2n}\Big)^{2n+1}$$

$$= \Big(1 + \frac{1}{2n}\Big)^{2n} \Big(1 - \frac{1}{2n}\Big)^{2n} \Big(1 - \frac{1}{2n}\Big) \to e\frac{1}{e}(1+0) = 1$$

$$a_{2n+1} = \Big(1 + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\Big)^{2n+1} \Big(1 + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}\Big)^{2n+2} = \Big(1 - \frac{1}{2n+1}\Big)^{2n+1} \Big(1 + \frac{1}{2n+1}\Big)^{2n+2}$$

$$= \Big(1 - \frac{1}{2n+1}\Big)^{2n+1} \Big(1 + \frac{1}{2n+1}\Big)^{2n+1} \Big(1 + \frac{1}{2n+1}\Big) \to \frac{1}{e}e(1+0) = 1$$

Αφού $\lim a_{2n} = \lim a_{2n+1} = 1$, έχουμε και $\lim a_n = 1$.

Ωστόσο, δεν πρέπει να μείνουμε με την εντύπωση ότι μια υπακολουθία πρέπει να έχει συγκεκριμένο τύπο ή μορφή· μπορεί να δημιουργηθεί και με μια διαδικασία που εμείς θα ορίσουμε. Ένα παράδειγμα θα μπορούσε να είναι το εξής: Θεωρούμε μια ακολουθία a_n φραγμένη από δυο αριθμούς, τους d_1 και g_1 $(d_1 < g_1)$, οπότε $d_1 \leq a_n \leq g_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Από τους άπειρους όρους της a_n επιλέγω κάποιον, έστω τον a_{k_1}. Διχοτομώ το διάστημα $[d_1, g_1]$ και από τα δυο διαστήματα που δημιουργούνται, τα $[d_1, \frac{d_1+g_1}{2}]$ και $[\frac{d_1+g_1}{2}, g_1]$, επιλέγω εκείνο που περιέχει άπειρους όρους, (σε περίπτωση που και τα δυο περιέχουν άπειρους όρους, επιλέγω χωρίς βλάβη της γενικότητας, το δεξιό) ορίζω δε ως άκρα του διαστήματος τα d_2 και g_2. Είναι φανερό ότι $(g_2 - d_2) = \frac{1}{2}(g_1 - d_1)$. Από τους άπειρους όρους της a_n στο διάστημα $[d_2, g_2]$ επιλέγω τον a_{k_2}, με την παρατήρηση ότι $k_2 > k_1$. Επαναλαμβάνω τη διαδικασία οπότε ορίζεται το διάστημα $[d_3, g_3]$, για το οποίο ισχύει $(g_3 - d_3) = \frac{1}{2}(g_2 - d_2) = \frac{1}{2^2}(g_1 - d_1)$, και ο όρος a_{k_3}. Μετά

από $n-1$ επαναλήψεις, θα έχουμε το διάστημα $[d_n, g_n]$, για το οποίο ισχύει $(g_n - d_n) = \frac{1}{2^{n-1}}(g_1 - d_1)$, και τον όρο a_{k_n}.
Έτσι έχω ορίσει δυο ακολουθίες τις d_n και g_n και την υπακολουθία a_{k_n}. Για τις δυο ακολουθίες από τη διαδικασία δημιουργίας τους, έχουμε ότι αυτές είναι φραγμένες και η μεν d_n είναι αύξουσα ή δε g_n φθίνουσα, οπότε θα συγκλίνουν σε κοινό όριο ξ, αφού $\lim{(g_n - d_n)} = \lim \frac{1}{2^{n-1}}(g_1 - d_1) = 0$. Για την υπακολουθία a_{k_n}, έχουμε ότι $g_n \leq a_{k_n} \leq d_n$, οπότε από το Θεώρημα 2.2.5 και $\lim a_{k_n} = \xi$.
Έτσι αποδείξαμε το Θεώρημα των Bolzano–Weierstrass.

Θεώρημα 2.2.13*(Θεώρημα των Bolzano–Weierstrass) Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει μια υπακολουθία της, η οποία συγκλίνει.*

Το όριο μιας υπακολουθίας a_{k_n}, της ακολουθίας a_n, λέγεται σημείο συσσώρευσης αυτής (της ακολουθίας).

2.2.5 Αναδρομικές ακολουθίες

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι οι αναδρομικές ακολουθίες προσδιορίζονται από κάποιον ή κάποιους αρχικούς όρους και από μια αναδρομική σχέση. Ο αρχικός ή οι αρχικοί όροι της ακολουθίας είναι εξίσου σημαντικοί με την αναδρομική σχέση και την επηρεάζουν απόλυτα. Για παράδειγμα, στην ακολουθία με αναδρομική σχέση $a_{n+1} = \frac{2a_n^2}{1+a_n^2}$, όπως θα αποδείξουμε στα επόμενα, έχουμε ότι $\lim a_n = 0$, αν $0 \leq a_1 < 1$ και $\lim a_n = 1$, αν $a_1 \geq 1$. Γενικά, στις αναδρομικές ακολουθίες αποδείχνουμε το μονότονο και το φραγμένο και βρίσκουμε το όριο από τη σχέση της αναδρομής, όπως στο Παράδειγμα 2.11, εφόσον αυτό μας δώσει απάντηση. Για το μονότονο, ήδη έχει φανεί από τα παραδείγματα, συγκρίνουμε το λόγο $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ με το 1, ή τη διαφορά $a_{n+1} - a_n$ με το 0, φυσικά δεν πρέπει να ξεχνάμε, ως μέθοδο, τη μαθηματική επαγωγή, καθώς και το ότι, αν το πρόσημο δυο διαδοχικών διαφορών είναι σταθερό, τότε αυτό θα είναι ίδιο με το πρόσημο της διαφοράς των δυο πρώτων όρων, οπότε έχουμε ακόμη ένα κριτήριο για τη μονοτονία. Για το φράγμα χρησιμοποιούμε την παρατηρητικότητά μας, όμως, κάποιες φορές είναι χρήσιμο να προσδιορίζουμε το όριο, υποθέτοντας ότι η ακολουθία συγκλίνει, και στη συνέχεια να επανερχόμαστε για το φράγμα.

Παράδειγμα 2.14*Δείξτε ότι για την ακολουθία με αναδρομική σχέση* $a_{n+1} = \frac{2a_n^2}{1+a_n^2}$, *ισχύει* $\lim a_n = 0$, *αν* $a_1 = \frac{1}{2}$ *και* $\lim a_n = 1$, *αν* $a_1 = 2$. *Τι γίνεται αν* $a_1 = 1$;

Λύση *i*) $a_1 = \frac{1}{2}$. Αρχικά παρατηρούμε ότι $a_n \geq 0$. Στη συνέχεια $a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n^2}{1+a_n^2} - a_n = \frac{2a_n^2 - a_n - a_n^3}{1+a_n^2} = \frac{-a_n(a_n^2 - 2a_n + 1)}{1+a_n^2} = \frac{-a_n(a_n-1)^2}{1+a_n^2} \leq 0$. Συνεπώς η ακολουθία είναι φθίνουσα. Έτσι $0 \leq a_n \leq a_1 = \frac{1}{2}$, δηλ. η a_n φραγμένη. Άρα θα συγκλίνει, οπότε αν $\lim a_n = l$, θα έχουμε

$$\lim a_n = \lim \frac{2a_n^2}{1+a_n^2} \Rightarrow l = \frac{2l^2}{1+l^2} \Leftrightarrow l^3 + l = 2l^2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow l = 0 \text{ ή } l = 1,$$

συνεπώς $\lim a_n = 0$. Για τη *ii*)($a_1 = 2$) ισχύουν ακριβώς τα ίδια για το μονότονο. Όμως, τώρα, αν υποθέσουμε $a_n \geq 1$, έχουμε και $a_{n+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2a_n^2}{1+a_n^2} \geq 1 \Leftrightarrow 2a_n^2 \geq 1 + a_n^2 \Leftrightarrow a_n^2 \geq 1$, που ισχύει. Έτσι, αφού και $a_1 = 2 > 0$, θα έχουμε $1 \leq a_n \leq a_1 = 2$. Άρα θα συγκλίνει, οπότε αν $\lim a_n = l$, θα έχουμε $l = \frac{2l^2}{1+l^2} \Leftrightarrow \cdots l = 0$ ή $l = 1$, οπότε $\lim a_n = 1$.

Παράδειγμα 2.15*Να βρεθεί αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας*

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Λύση Είναι φανερό ότι $0 \leq a_n \leq 1$, δηλ. η ακολουθία είναι φραγμένη. Επίσης παρατηρούμε ότι

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{1+a_n} - \frac{1}{1+a_{n-1}} = \frac{1 + a_{n-1} - 1 - a_n}{(1+a_n)(1+a_{n-1})} = \frac{-(a_n - a_{n-1})}{(1+a_n)(1+a_{n-1})}$$

δηλ. δε διατηρείται το πρόσημο μεταξύ δυο διαδοχικών διαφορών όρων. Αν όμως πάρουμε την υπακολουθία των περιττών όρων αυτής (περιττή υπακολουθία), θα έχουμε διαδοχικά

$$a_{2n+1} - a_{2n-1} = \frac{1}{1+a_{2n}} - \frac{1}{1+a_{2n-2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+a_{2n-1}}} - \frac{1}{1+\frac{1}{1+a_{2n-3}}}$$

$$= \frac{1+a_{2n-1}}{2+a_{2n-1}} - \frac{1+a_{2n-3}}{2+a_{2n-3}} = \cdots = \frac{a_{2n-1} - a_{2n-3}}{(2+a_{2n-1})(2+a_{2n-3})}$$

το οποίο σημαίνει ότι οι διαφορές των περιττών όρων διατηρούν το πρόσημο, άρα η υπακολουθία αυτή είναι μονότονη. Ομοίως και οι διαφορές των άρτιων όρων (άρτια υπακολουθία) διατηρούν το πρόσημο. Αφού αυτές είναι φραγμένες, θα συγκλίνουν. Έστω $\lim a_{2n+1} = l_1$ και $\lim a_{2n} = l_2$, τότε θα έχουμε $l_1 = \frac{1}{1+l_2} \Leftrightarrow l_1 + l_1 l_2 = 1$ και $l_2 = \frac{1}{1+l_1} \Leftrightarrow l_2 + l_1 l_2 = 1$, οπότε, αφαιρώντας κατά μέλη, παίρνουμε $l_1 = l_2$. Έτσι η ακολουθία συγκλίνει, αφού, από την σχέση (2.11), η άρτια και η περιττή υπακολουθία της έχουν κοινό όριο.

Ένα εύλογο ερώτημα στις αναδρομικές ακολουθίες είναι το εξής: «Υπάρχει τύπος που να μας δίνει τους ίδιους όρους με μια αναδρομική ακολουθία;» Η απάντηση δεν είναι εύκολη. Σε διαφορετικές μορφές αναγωγικών τύπων έχουν αναπτυχθεί διαφορετικές τεχνικές και μέθοδοι, με αρκετή μαθηματική θεωρία και γνώση! Εμείς θα αναπτύξουμε στη συνέχεια τις τεχνικές σε δυο απλές περιπτώσεις, χωρίς απόδειξη, αφού κάτι τέτοιο ξεφεύγει από το σκοπό μας.

α) $\underline{a_{n+1} = ka_n + f(n)}$. Στην περίπτωση αυτή αναπτύσσουμε κατάλληλα όλους τους όρους με $n = 1, n = 2$, κ.λπ και προσθέτουμε κατά μέλη.

Παράδειγμα 2.16 *Να βρεθεί ο γενικός όρος της ακολουθίας*

$$a_1 \in \mathbb{R}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2^n}$$

Λύση

$$\begin{aligned}
n = 1, \quad a_2 = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \cancel{a_2} = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}\\
n = 2, \quad a_3 = \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{2^2} \quad &\Leftrightarrow \quad 3\cancel{a_3} = \cancel{a_2} + \frac{3}{2^2}\\
n = 3, \quad a_4 = \frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{2^3} \quad &\Leftrightarrow \quad 3^2\cancel{a_4} = 3\cancel{a_3} + \frac{3^2}{2^3}\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
n = n-1, \quad a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}} \quad &\Leftrightarrow \quad 3^{n-2}a_n = 3^{n-3}\cancel{a_{n-1}} + \frac{3^{n-2}}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τα δεξιά μέλη των ισοδυναμιών, παίρνουμε μια σχέση, έναν τύπο για την ακολουθία μας, ήτοι

$$3^{n-2}a_n = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^{(n-2)}\right] = \cdots = \frac{1}{3}a_1 - 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{(n-1)}$$

και

$$a_n = \frac{1}{3^{n-1}}(a_1 - 3) + \frac{3}{2^{n-1}}$$

β) $\underline{a_{n+2} = ka_{n+1} + la_n}$. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε την εξίσωση $x^2 = kx+l$, η οποία λέγεται «χαρακτηριστική». Έστω ότι ρ_1 και ρ_2 είναι διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες αυτής, τότε η ακολουθία $a_n = c_1\rho_1 + c_2\rho_2$ είναι η ζητούμενη, αφού προσδιορίσουμε τα c_1 και c_2 από τις αρχικές τιμές.

Παράδειγμα 2.17*Να βρεθεί ο n-οστος όρος της ακολουθίας*

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Λύση Θεωρούμε τη χαρακτηριστική, $x^2 = x+1$. Οι ρίζες αυτής είναι $\rho_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\rho_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, οπότε

$$a_n = c_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + c_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n \tag{2.12}$$

Για $n = 1$, παίρνουμε $c_1\frac{1+\sqrt{5}}{2}+c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$, ενώ για $n = 2$, παίρνουμε $c_1\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^2 + c_2\big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^2 = 1$. Λύνοντας το σύστημα των δυο εξισώσεων ως προς τα c_1 και c_2 παίρνουμε τελικά το $n-$οστό όρο της ακολουθίας, ήτοι

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n \tag{2.13}$$

Η ακολουθία αυτή λέγεται ακολουθία Fibonacci. Οι όροι της έχουν σχέση με τη Βοτανική· επίσης εμφανίζονται στο τρίγωνο του Pascal ενώ στον τύπο της εμφανίζεται η χρυσή τομή.
Έστω τώρα ότι η ρ είναι **η διπλή ρίζα** της χαρακτηριστικής, τότε η ζητούμενη ακολουθία είναι η $a_n = c_1\rho^n + nc_2\rho^n = (c_1+nc_2)\rho^n$, αφού προσδιορίσουμε τα c_1 και c_2 από τις αρχικές τιμές.

Παράδειγμα 2.18*Να βρεθεί ο n-οστος όρος της ακολουθίας*

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Λύση Θεωρούμε τη χαρακτηριστική, $x^2 = x - \frac{1}{4}$. Η διπλή ρίζα της είναι $\rho = \frac{1}{2}$, οπότε $a_n = (c_1+nc_2)\frac{1}{2^n}$. Για $n = 1$, παίρνουμε $\frac{1}{2}(c_1+c_2) = 1$ ενώ για $n = 2$, παίρνουμε $\frac{1}{4}(c_1+2c_2) = 2$. Λύνοντας το σύστημα των δυο εξισώσεων ως προς τα c_1 και c_2, παίρνουμε τελικά το $n-$οστό όρο της ακολουθίας, ήτοι

$$a_n = (6n-4)\frac{1}{2^n} \tag{2.14}$$

2.2.6 Η ακολουθία τείνει στο ∞

Η ακολουθία των φυσικών αριθμών ($a_n = n$), δίνει όρους, που αυξάνουν συνεχώς και μπορούν να γίνουν οσοδήποτε μεγάλοι. Αυτή τη συνεχή αύξηση των όρων μιας ακολουθίας και το μπορούν να γίνουν οσοδήποτε μεγάλοι, το ότι δηλ. όποιον αριθμό θετικό πραγματικό να θεωρήσουμε, οι όροι της ακολουθίας τον ξεπερνούν, το λέμε «η ακολουθία μας τείνει στο άπειρο θετικά». Η μαθηματικοποίηση αυτού περιέχεται στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.2.14 *Λέμε ότι η ακολουθία a_n τείνει στο άπειρο θετικά ή απειρίζεται θετικά και συμβολίζουμε $\lim a_n = +\infty$, αν και μόνον αν, για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό M, υπάρχει ένας n_0 φυσικός, έτσι ώστε, για κάθε $n > n_0$ ισχύει $a_n > M$, Συμβολικά,*

$$\lim a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall\ n > n_0 \Rightarrow a_n > M \tag{2.15}$$

Ομοίως λέμε ότι η ακολουθία a_n τείνει στο άπειρο αρνητικά ή απειρίζεται αρνητικά και συμβολίζουμε $\lim a_n = -\infty$, αν και μόνον αν, για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό M, υπάρχει ένας n_0 φυσικός, έτσι ώστε, για κάθε $n > n_0$ ισχύει $a_n < -M$, Συμβολικά,

$$\lim a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall\ n > n_0 \Rightarrow a_n < -M \tag{2.16}$$

Παράδειγμα 2.19 *Να δειχτεί ότι η ακολουθία $a_n = n^2$ τείνει στο ∞*

Λύση Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\forall M > 0,\ \exists\ n_0 : \forall\ n \in \mathbb{N}\ \text{ με } n > n_0 \Rightarrow n^2 > M$$

Όμως ισχύει $n^2 > M \Leftrightarrow n > \sqrt{M}$. Επομένως, αρκεί να πάρουμε ως n_0 το $[\sqrt{M}]$.
Εύκολα κάποιος μπορεί να δει ότι, αν μια ακολουθία a_n είναι μηδενική με θετικούς όρους, η ακολουθία $b_n = \frac{1}{a_n}$ απειρίζεται θετικά, ενώ με αρνητικούς όρους, η ακολουθία $b_n = \frac{1}{a_n}$ απειρίζεται αρνητικά. Για να διευκολυνθούμε στην αριθμητική των ορίων δίνονται οι επόμενες τρεις προτάσεις, χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 2.2.15 *Έστω ότι ισχύει* $\lim a_n = l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *και* $\lim b_n = \pm\infty$, *τότε έχουμε*

$$\begin{array}{ll} i)\ \lim(a_n+b_n)=\pm\infty & ii)\ \lim(a_n-b_n)=\mp\infty \\ iii)\ \lim(a_n\cdot b_n)=\begin{cases}\pm\infty & \text{αν } l>0\\ \mp\infty & \text{αν } l<0\end{cases} & iv)\ \lim(\frac{b_n}{a_n})=\begin{cases}\pm\infty & \text{αν } l>0\\ \mp\infty & \text{αν } l<0\end{cases} \\ v)\ \lim(\frac{a_n}{b_n})=0 & \end{array} \tag{2.17}$$

Πρόταση 2.2.16 *Έστω ότι ισχύει* $\lim a_n = \infty$ *και* $\lim b_n = \infty$, *τότε έχουμε*

$$\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c}\lim(a_n)=\pm\infty\\ \lim(b_n)=\pm\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\lim(a_n+b_n)=\pm\infty\\ \lim(a_n\cdot b_n)=+\infty\end{array}\right. \\ \\ \left.\begin{array}{c}\lim(a_n)=\pm\infty\\ \lim(b_n)=\mp\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\lim(a_n-b_n)=\pm\infty\\ \lim(a_n\cdot b_n)=-\infty\end{array}\right. \end{array} \tag{2.18}$$

Υποτίθεται ότι οι συνδυασμοί των πρόσημων είναι πρώτο με πρώτο και δεύτερο με δεύτερο.

Πρόταση 2.2.17 *Έστω ότι ισχύει* $\lim a_n = \pm\infty$ *και* $\lim b_n = 0$ *με* $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, *τότε έχουμε*

$$\begin{array}{l} \lim(a_n+b_n)=\pm\infty \\ \lim\frac{a_n}{b_n}=\begin{cases}+\infty, & \text{αν τελικά οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί}\\ -\infty, & \text{αν τελικά οι όροι της ακολουθίας είναι αρνητικοί}\end{cases} \end{array} \tag{2.19}$$

Με την έννοια των πράξεων των ορίων, όπως προκύπτουν από τις παραπάνω προτάσεις, χαρακτηρίζονται ως επιτρεπτές πράξεις και οι πράξεις στο σύνολο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, π.χ. $5\cdot(-\infty) = -\infty$. Πράξεις που δεν μπορούν να οριστούν ως πράξεις ορίων, χαρακτηρίζονται ως μη επιτρεπτές, π.χ. $0\cdot(\infty) =?$, γιατί, αν θεωρήσουμε ώς ακολουθίες τις $a_n = \frac{1}{n}$ με $\lim a_n = 0$ και $b_n = n^2$ με $\lim b_n = \infty$, έχουμε $\lim(a_n\cdot b_n) = \infty$, ενώ, αν θεωρήσουμε ώς ακολουθίες τις $a_n = \frac{1}{n^2}$ πάλι με $\lim a_n = 0$ και $b_n = n$ πάλι με $\lim b_n = \infty$, έχουμε $\lim(a_n\cdot b_n) = 0$.
Ως μη επιτρεπτές πράξεις χαρακτηρίζονται οι επόμενες

$$\frac{0}{0}=?,\ \infty-\infty=?,\ 0\cdot\infty=?,\ \frac{\infty}{\infty}=?,\ 1^0=?,\ 1^\infty=?,\ 0^\infty=?,\ \infty^0=?,\ 0^0=?$$

2.2.7 Κριτήρια σύγκλισης

Ο ορισμός της σύγκλισης θέλει κατά κάποιο τρόπο να μαντέψουμε το όριο για να λειτουργήσει. Ο Caushy ονόμασε **βασική** την ακολουθία για την οποία για κάθε ε θετικό υπάρχει δείκτης n_0, ώστε για κάθε φυσικούς n και m με $n,\ m > n_0$ ισχύει $|a_n - a_m| < \varepsilon$ και απέδειξε ότι:

Πρόταση 2.2.18 *Μια ακολουθία είναι βασική, αν και μόνον αν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό l.*

Έτσι η σύγκλιση καθίσταται πλέον, ανεξάρτητη του ορίου.

Ο λόγος δυο διαδοχικών όρων και η σύγκρισή του με το ένα ήταν μέχρι τώρα εργαλείο για την εύρεση της μονοτονίας. Η εύρεση του ορίου των λόγων δυο διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας γίνεται εργαλείο για την εύρεση του ορίου ριζικού. Έτσι

Πρόταση 2.2.19 *Αν για μια ακολουθία a_n, με θετικούς όρους, έχουμε $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ τότε $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$.*

Παράδειγμα 2.20 *Να προσδιορίσετε το όριο $\lim a_n$, αν $a_n = \sqrt[n]{\frac{3^{n+1}n!}{n^{n-1}}}$*

Λύση Θέτουμε $b_n = \frac{3^{n+1}n!}{n^{n-1}}$ και παίρνουμε

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{\frac{3^{n+2}(n+1)!}{(n+1)^n}}{\frac{3^{n+1}n!}{n^{n-1}}} = \lim \frac{3^{n+2}(n+1)!n^{n-1}}{3^{n+1}n!(n+1)^n} = \lim \frac{3(n+1)n^{n-1}}{(n+1)^{n-1}(n+1)}$$

$$= \lim \frac{3n^{n-1}}{(n+1)^{n-1}} = 3\lim \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n-1}} = 3\lim \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}(1+\frac{1}{n}) \to 3\frac{1}{e}(1+0) = \frac{3}{e}.$$

Οπότε από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει $\lim a_n = \frac{3}{e}$.

Το επόμενο κριτήριο, γνωστό ως κριτήριο του Stolz είναι ένα δυναμικό κριτήριο, το οποίο δίνει όριο εξετάζοντας το λόγο διαφορών.

Πρόταση 2.2.20 *Έστω a_n μια ακολουθία και b_n μια γνησίως αύξουσα ακολουθία. Αν $\lim b_n = +\infty$ τότε*

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \Longrightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = l \tag{2.20}$$

Παράδειγμα 2.21 *Να προσδιορίσετε το όριο* $\lim c_n$, *αν* $c_n = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{4}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$

Λύση Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία, με όριο το ∞. Από την Πρόταση 2.2.20 έχουμε

$$\lim c_n = \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{1} = 1$$

Οπότε και $\lim c_n = 1$.

2.3 Σειρές

Έστω $a_n,\ n \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε από αυτή την ακολουθία μια καινούργια ακολουθία με τον εξής τρόπο:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= a_1 \\ \sigma_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ \sigma_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\vdots \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \end{aligned} \tag{2.21}$$

Λέμε, λοιπόν, ότι έχουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ουσιαστικά ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim \sigma_n$, ωστόσο χρησιμοποιούμε τον όρο σειρά και για να δηλώσουμε την ακολουθία που γεννιέται, αθροίζοντας με συγκεκριμένο τρόπο τους όρους μιας άλλης ακολουθίας. Όταν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$, λέμε ότι η σειρά συγκλίνει, όταν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, λέμε ότι η σειρά απειρίζεται θετικά, ενώ όταν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$ λέμε ότι η σειρά απειρίζεται αρνητικά. Οι επιμέρους όροι της καινούργιας ακολουθίας λέγονται **«μερικά αθροίσματα»** της σειράς. Ο κάθε όρος a_n, της αρχικής ακολουθίας μας λέγεται **«όρος της σειράς»** και ο όρος $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ **«γενικός όρος της σειράς»**. Είναι φανερό ότι μια ακολουθία προσδιορίζει πλήρως μια σειρά, όμως και μια σειρά προσδιορίζει πλήρως μια ακολουθία, αφού

$$a_n = \sigma_n - \sigma_{n-1} \tag{2.22}$$

Παίρνοντας όρια στην τελευταία σχέση (2.22) συμπεραίνουμε ότι

Πρόταση 2.3.1 *Αν μια σειρά συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n = l$), τότε η ακολουθία μας είναι μηδενική ($\lim a_n = 0$).*

Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλ. η σειρά που προκύπτει από κάθε μηδενική ακολουθία δε συγκλίνει πάντα σε πραγματικό αριθμό. Η πρόταση χρησιμοποιείται συνήθως αντίστροφα, δηλ. για να δείξουμε ότι μια σειρά δε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, δείχνουμε ότι η ακολουθία του γενικού όρου δεν είναι μηδενική.

Για ορισμένες σειρές ο γενικός τους όρος δίνεται μέσα από κάποιο τύπο, κάτι που διευκολύνει τα πράγματα κατά κάποιο τρόπο στη μελέτη αυτών. Ας θυμηθούμε τις γεωμετρικές προόδους από το Λύκειο, τότε δίνονταν ο πρώτος όρος a_1, εδώ χάριν ευκολίας ας πάρουμε $a_1 = 1$, και ο λόγος $\omega \neq 1$, οπότε μπορούσαμε να προσδιορίσουμε τον $n-$οστό όρο $a_n = a_1\omega^{n-1} = \omega^{n-1}$ αλλά και το άθροισμα των n πρώτων όρων $\sigma_n = \frac{a_1(1-\omega^n)}{1-\omega} = \frac{1-\omega^n}{1-\omega}$, το τελευταίο είναι το μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{k=1}^{n} \omega^{k-1}$. Η μελέτη πλέον της σειράς $(1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n + \cdots)$ που λέγεται **γεωμετρική σειρά**, καθίσταται εύκολη. Έτσι έχουμε

$$i)\ |\omega| < 1,\ \text{τότε}\ \sum_{n=1}^{\infty} \omega^{n-1} = \lim \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{1-0}{1-\omega} = \frac{1}{1-\omega}$$

$$ii)\ \omega > 1,\ \text{τότε}\ \sum_{n=1}^{\infty} \omega^{n-1} = \lim \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{1}{1-\omega} - \underbrace{\frac{1}{1-\omega}}_{<0}\omega^n = \frac{1}{1-\omega} + \infty = \infty$$

$$iii)\ \omega < -1,\ \text{τότε}\ \sum_{n=1}^{\infty} \omega^{n-1} = \lim \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = \frac{1}{1-\omega} - \underbrace{\frac{1}{1-\omega}}_{>2}\omega^n =$$

$$\frac{1}{1-\omega} + \begin{cases} -\infty \text{ αν } n \text{ άρτιο} \\ \infty \text{ αν } n \text{ περιττό} \end{cases} = \begin{cases} -\infty \text{ αν } n \text{ άρτιο} \\ \infty \text{ αν } n \text{ περιττό} \end{cases}$$

Θυμίζουμε ότι, αν δυο υπακολουθίες μιας ακολουθίας συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια, η ακολουθία δε συγκλίνει. Έτσι η γεωμετρική σειρά δε συγκλίνει για $\omega < -1$. Στην τελευταία περίπτωση, πολλές φορές απαντάται ο όρος η σειρά «ταλαντεύεται». Οι περιπτώσεις $\omega = 1$ και $\omega = -1$ να γίνουν ως ασκήσεις. Έτσι συνοψίζοντας έχουμε

Πρόταση 2.3.2 *Για τη γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \omega^{n-1}$ ισχύει*

$$\begin{array}{c} \text{αν } |\omega| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \omega^{n-1} \in \mathbb{R} \\ \text{αν } \omega \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \omega^{n-1} = \infty \\ \text{αν } \omega \leq -1 \Rightarrow \text{ Η σειρά ταλαντεύεται} \end{array}$$

Στο Σχήμα 2.5 φαίνεται η γεωμετρική ερμηνεία της σύγκλισης γεωμετρικής σειράς με $\omega = \frac{1}{2}$, στο 2. Το άθροισμα των εμβαδών όλων των τετραγώνων και των

Σχήμα 2.5: Γεωμετρική ερμηνεία της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ορθογωνίων που σχηματίζονται έχει όριο το 2, όσο δηλ. είναι το εμβαδόν όλου του ορθογωνίου.
Ο όρος σειρά χρησιμοποιείται, εκτός από το να δηλώσει το όριο μιας ακολουθίας, και για να προσδιορίσει την ίδια την ακολουθία και από τώρα και στο εξής έτσι θα χρησιμοποιείται. Έτσι, όταν μιλάμε για την γεωμετρική σειρά με λόγο $\omega = \frac{1}{2}$, θα εννοούμε αφ' ενός τους όρους $\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + + \cdots + \frac{1}{n}$ και αφ' ετέρου το όριο αυτής το 2.

Μια σειρά ως ακολουθία, προφανώς θα μπορούμε να τη μελετήσουμε με τα εργαλεία της προηγούμενης παραγράφου. Για παράδειγμα, το Θεώρημα 2.2.5, προσαρμοσμένο κατάλληλα για ακολουθίες που απειρίζονται, μπορούμε να το δούμε να εφαρμόζεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.22*Να δειχτεί ότι* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$

Λύση Θεωρούμε την ακολουθία $\sigma_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, οπότε έχουμε

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n} \to \infty$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, τότε μπορούμε να γράφουμε

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad k > 0. \tag{2.23}$$

$$ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \Leftrightarrow \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{k} a_n$$

Η πρώτη σχέση σημαίνει ότι, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n$ συγκλίνει ή απειρίζεται θετικά ή αρνητικά, το ίδιο κάνει και η σειρά $k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και αντίστροφα, ενώ η δεύτερη ότι, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ή απειρίζεται θετικά ή αρνητικά, το ίδιο κάνει και η σειρά $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ και αντίστροφα, αφού $\sum_{n=1}^{k} a_n = m \ \in \mathbb{R}$.

Τέλος, επειδή πρόκειται για ειδικές ακολουθίες (ακολουθία που προκύπτει από ακολουθία), έχουν αναπτυχθεί πρόσθετα θεωρήματα, προτάσεις και κριτήρια σύγκλισης, που θα τα δούμε στη συνέχεια και μελετούν τη σειρά σ_n, μελετώντας αυτή καθεαυτή την ακολουθία a_n.

2.3.1 Σειρές με ομόσημους όρους

Μια μεγάλη κατηγορία σειρών είναι οι σειρές που έχουν τελικά ομόσημους όρους. Επειδή μια σειρά με μη θετικούς όρους διαφέρει από μια σειρά με μη αρνητικούς όρους μόνο ως προς το πρόσημο πλην $(-)$, θα μελετήσουμε μόνο τις σειρές που έχουν τελικά μόνον μη αρνητικούς όρους. Θα πρέπει ίσως να παρατηρήσουμε ότι στην κατηγορία αυτή η σειρά είναι πλέον μια αύξουσα ακολουθία, αφού κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο προσθέτοντας ένα μη αρνητικό αριθμό δηλ.

$$\sigma_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \sigma_{n-1} + a_n$$

Αν λοιπόν αυτή είναι φραγμένη, προφανώς θα συγκλίνει, ενώ αν είναι μη φραγμένη, θα απειρίζεται θετικά.
Η διάταξη των όρων δυο ακολουθιών $(0 \leq a_n \leq b_n)$ συνεπάγεται τη διάταξη των αντίστοιχων σειρών αυτών $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n)$. Το συμπέρασμα φαίνεται στο επόμενο Θεώρημα

Θεώρημα 2.3.3*Αν για δυο ακολουθίες μη αρνητικών όρων ισχύει* $0 \leq a_n \leq b_n$, *τότε*

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R} \\ &\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \end{aligned} \tag{2.24}$$

Παρατήρηση 2.3.1*Από τη σχέση (2.23) φαίνεται ότι το Θεώρημα 2.3.3 ισχύει και για* $0 \leq a_n \leq k \cdot b_n$.

Παράδειγμα 2.23*Να δειχτεί ότι* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{n}} = \infty$

Λύση Αφού

$$\sqrt[k]{n} < \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[k]{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Το συμπέρασμα είναι άμεσο από το Θεώρημα 2.3.3. Παρόμοια αποτελέσματα δίνει η διάταξη των λόγων, Άσκηση 2.11.

Το προηγούμενο Θεώρημα δίνει πληροφορίες για τη σύγκλιση ή μη της σειράς, συγκρίνοντας τους γενικούς όρους αυτών. Το επόμενο Θεώρημα δίνει πληροφορίες για τη σειρά, συγκρίνοντας το όριο του λόγου των γενικών όρων

Θεώρημα 2.3.4*Αν για δυο ακολουθίες* a_n *και* $b_n \neq 0$ *μη αρνητικών όρων ισχύει* $0 < \lim \frac{a_n}{b_n} = l < \infty$, *τότε*

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \in \mathbb{R} \\ &\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \end{aligned} \tag{2.25}$$

$*$**Απόδειξη:** Από τον ορισμό του ορίου προκύπτει: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, |\frac{a_n}{b_n} - l| < \varepsilon$. Τότε όμως, για $\varepsilon = \frac{l}{2}$ έχουμε

$$|\frac{a_n}{b_n} - l| < \frac{l}{2} \Leftrightarrow -\frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} - l < \frac{l}{2} \Leftrightarrow \frac{l}{2} \cdot b_n < a_n < \frac{3l}{2} \cdot b_n \Leftrightarrow \frac{2}{l} \cdot a_n < b_n < \frac{2}{3l} \cdot a_n$$

Οι δυο τελευταίες σχέσεις, μαζί με την Παρατήρηση 2.3.1, αποδεικνύουν το Θεώρημα (γιατί;). Η απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος μας οδηγεί στο να βγάλουμε και άλλα συμπεράσματα σχετικά με τη σύγκλιση ή μη των σειρών, όπως μπορεί κάποιος να δει στην Άσκηση 2.10.

Παράδειγμα 2.24 *Να δείξετε ότι* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+2}} = \infty$

Λύση Έστω $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$, θεωρούμε την ακολουθία $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Αφού

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{n}{\sqrt{n^3+2}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim \sqrt{\frac{n^3}{n^3+2}} = \lim \sqrt{\frac{1}{1+\frac{2}{n^3}}} = 1$$

και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, από το Θεώρημα 2.3.4 θα έχουμε και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
Όπως φαίνεται στο παραπάνω παράδειγμα, χρειαζόμαστε μια σειρά, ας την πούμε βοηθητική, για να αποφανθούμε για τη σύγκλιση της σειράς μας. Ίσως να φανεί μαγικός ο τρόπος που επιλέξαμε την δική μας ($b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$). Όμως, σε ένα μεγάλο πλήθος προβλημάτων απάντηση δίνει η αρμονική σειρά ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$), της οποίας η μελέτη θα δοθεί στο Παράδειγμα 2.28.

Μέχρι εδώ η μελέτη μιας σειράς γινόταν δια μέσου μια άλλης σειράς, άλλοτε συγκρίνοντας τους γενικούς όρους αυτών και άλλοτε συγκρίνοντας λόγους ή όρια γενικών όρων αυτών. Στη συνέχεια, θα δώσουμε τέσσερα ισχυρά κριτήρια, που μας επιτρέπουν να αποφανθούμε, όσον αφορά τη σύγκλιση ή μη της σειράς και βασίζονται στην ίδια τη σειρά. Η απόδειξη και των τεσσάρων θα παραλειφθεί, παρόλο που δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολη (εκτός ίσως εκείνης του Raabe, που χρειάζεται επί πλέον θεωρία), επειδή ξεφεύγει των σκοπών μας και περιέχεται σε πλήθος πανεπιστημιακών συγγραμμάτων Μαθηματικής Ανάλυσης π.χ. ([2],[7],[5]).

Θεώρημα 2.3.5 *Κριτήριο του λόγου ή κριτήριο D' Alembert. Θεωρούμε τη σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *με* $a_n > 0$, *τότε*

$$\begin{aligned} \lim \tfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 &\implies \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R} \\ \lim \tfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 &\implies \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \\ \lim \tfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 &\implies \text{δεν έχουμε συμπέρασμα!} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.25 *Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n!}$.

Λύση Έστω $a_n = \frac{q^n}{n!}$, τότε

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{q^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{q^n}{n!}} = \lim \frac{\frac{q^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{q^n}{n!}} = \lim \frac{q}{n+1} = 0 < 1$$

Έτσι η σειρά συγκλίνει εν $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2.26 *Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Λύση Έστω $a_n = \frac{n^n}{n!}$, τότε

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim \frac{n!(n+1)^{n+1}}{(n+1)!n^n} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

Έτσι η σειρά δεν συγκλίνει εν $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 2.3.6 *Κριτήριο της ρίζας ή κριτήριο Cauchy. Θεωρούμε τη σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *με* $a_n > 0$, *τότε*

$$\begin{array}{l} \lim \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R} \\ \lim \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \\ \lim \sqrt[n]{a_n} = 1 \implies \text{δεν έχουμε συμπέρασμα!} \end{array}$$

Παράδειγμα 2.27 *Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Λύση Έστω $a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, τότε

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

Έτσι η σειρά συγκλίνει εν $\mathbb{R}$.
Παρόλο που τα παραπάνω κριτήρια είναι δυναμικά εργαλεία για την εξέταση των σειρών, δεν είναι λίγες οι φορές που αποτυγχάνουν, όπως για παράδειγμα στην αρμονική σειρά, ήτοι την $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^p$, αφού $\lim \frac{(\frac{1}{n+1})^p}{(\frac{1}{n})^p} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^p} = 1$.

Δίνουμε στη συνέχεια τη διαφορετική οργάνωση των όρων μιας ακολουθίας με φθίνοντες θετικούς όρους.

$$a_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{\leq 2a_2} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}_{\leq 4a_4} + \underbrace{a_8 + a_9 + \cdots + a_{14} + a_{15}}_{\leq 8a_8} + a_{16} + \cdots$$

$$a_1 + a_2 + \underbrace{a_3 + a_4}_{\geq 2a_4} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{\geq 4a_8} + \underbrace{a_9 + a_{10} + \cdots + a_{15} + a_{16}}_{\geq 8a_{16}} + \cdots$$

Στηριζόμενος κάποιος στην οργάνωση αυτή, θα μπορούσε να αποδείξει το επόμενο Θεώρημα:

Θεώρημα 2.3.7 *Έστω a_n μια φθίνουσα ακολουθία με θετικούς όρους και $b_n = a_{2^n}$ μια υπακολουθία αυτής, τότε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ συμπεριφέρονται το ίδιο, δηλ. συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$ ή απειρίζονται θετικά.*

Παράδειγμα 2.28 *Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η αρμονική σειρά δηλ. η $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^p$.*

Λύση Έστω $b_n = a_{2^n} = \left(\frac{1}{2^n}\right)^p$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(p-1)n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{(p-1)}}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2^{(p-1)}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{(p-1)}}\right)^{n-1}$$

Όμως η τελευταία είναι η γεωμετρική σειρά με λόγο $\omega = \frac{1}{2^{(p-1)}}$, οπότε από την Πρόταση 2.3.2 προκύπτει ότι για

i) $p > 1$ έχουμε ότι $\omega < 1$ και η σειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, άρα και η αρμονική σειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

ii) $p \leq 1$ έχουμε ότι $\omega \geq 1$ και η σειρά απειρίζεται θετικά, άρα και η αρμονική σειρά απειρίζεται θετικά.

Η αρμονική σειρά με $p = 1$, δηλ. η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, θεωρείται ένα καλό παράδειγμα της πρότασης (2.2.18), δηλ. δείχνεται ότι η αρμονική σειρά δεν είναι βασική και επομένως δε συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

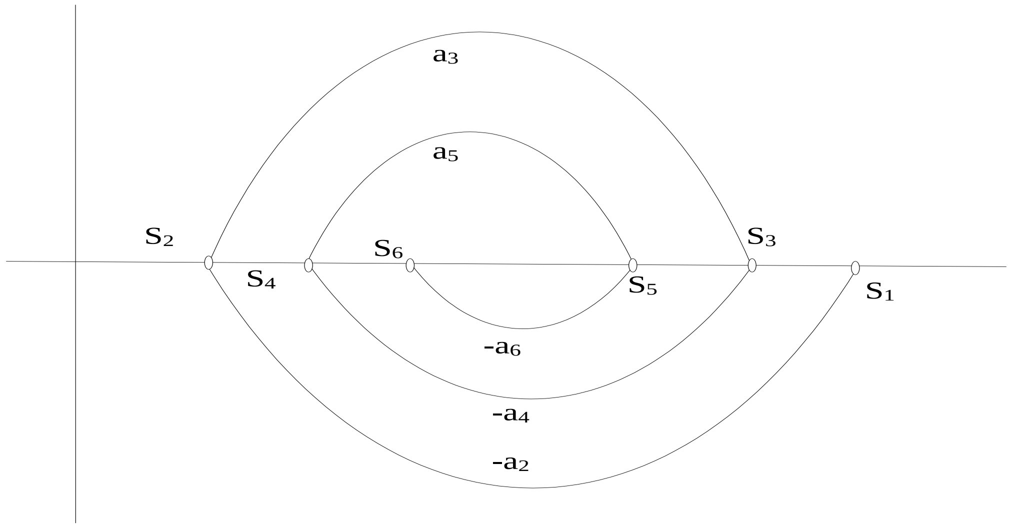
Τέλος σε περιπτώσεις που αποτυγχάνει το κριτήριο του D' Alembert δοκιμάζουμε το κριτήριο του Raabe.

Θεώρημα 2.3.8 *Κριτήριο του Raabe. Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n > 0$, τότε*

$$\lim \left[n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$
$$\lim \left[n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$$

2.3.2 Άλλες κατηγορίες Σειρών

Εξετάστηκε στα προηγούμενα η περίπτωση, όπου η σειρά είχε θετικούς όρους. Όμως για τις σειρές, αφού προκύπτουν από τις ακολουθίες, τίποτε δεν



Σχήμα 2.6: Σχηματικά η εναλλάσσουσα σειρά

εγγυάται ότι αυτές θα έχουν θετικούς ή έστω μη αρνητικούς όρους. Γενικά λοιπόν, οι σειρές είναι δυνατόν να έχουν όρους ο,τιδήποτε. Από αυτό το άπειρο πλήθος σειρών που υπάρχει, μια ενδιαφέρουσα κατηγορία είναι εκείνες, των οποίων οι όροι είναι όροι μιας θετικής φθίνουσας μηδενικής ακολουθίας a_n και στη σειρά εναλλάσσουν το πρόσημό τους. Έτσι, τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ τελικά θα έχουν τη μορφή του Σχήματος 2.6. Αυτό μας οδηγεί στο να σκεφτούμε ότι οι άρτιοι όροι των μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι μια ακολουθία αύξουσα και οι περιττοί μια ακολουθία φθίνουσα. Πράγματι

$$\sigma_{2n+2} - \sigma_{2n} = \sigma_{2n+2} - \sigma_{2n+1} + \sigma_{2n+1} - \sigma_{2n} =$$

$$(-1)^{2n+3}a_{2n+2} + (-1)^{2n+2}a_{2n+1} = -(a_{2n+2} - a_{2n+1}) \geq 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι η σ_{2n} είναι μια αύξουσα ακολουθία και

$$\sigma_{2n+1} - \sigma_{2n-1} = \sigma_{2n+1} - \sigma_{2n} + \sigma_{2n} - \sigma_{2n-1} =$$

$$(-1)^{2n+2}a_{2n+1} + (-1)^{2n+1}a_{2n} = (a_{2n+1} - a_{2n}) \leq 0,$$

που πάλι σημαίνει ότι η σ_{2n} είναι μια φθίνουσα ακολουθία. Επίσης, όλοι οι άρτιοι όροι είναι δεξιά των περιττών, αφού

$$\sigma_{2n+1} - \sigma_{2n} = (-1)^{2n+2}a_{2n+1} = a_{2n+1} > 0$$

Έτσι, οι δυο ακολουθίες ως μονότονες και φραγμένες ($a_2 \leq \sigma_{2n} \leq \sigma_{2n+1} \leq a_1$) θα συγκλίνουν και μάλιστα σε κοινό όριο, αφού

$$\lim\left(\sigma_{2n+1} - \sigma_{2n}\right) = \lim a_{2n+1} = 0.$$

Αποδείξαμε λοιπόν το επόμενο Θεώρημα του Leibniz:

Θεώρημα 2.3.9*(Θεώρημα του Leibniz:) Αν μια ακολουθία a_n είναι θετική, φθίνουσα και μηδενική, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.*

Παράδειγμα 2.29*Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$$

Λύση Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι τόσο η μια ($a_n = \frac{1}{n}$) όσο και η άλλη ($b_n = \frac{1}{2n-1}$) είναι θετικές, φθίνουσες και μηδενικές ακολουθίες, οπότε οι εναλλάσσουσες σειρές αυτών συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$. Θα δούμε, όταν αναφερθούμε στις σειρές Taylor (4.18), ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \ln 2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

Παράδειγμα 2.30*Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1},$$

Λύση Η σειρά αυτή δεν πληροί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Leibniz, αφού $\lim\frac{n}{n+1} = 1$ και επομένως το Θεώρημα δεν εφαρμόζεται. (Δοκιμάστε να φτιάξετε το αντίστοιχο Σχήμα 2.6 για να δείτε τη συμπεριφορά της). Πράγματι, εύκολα κάποιος μπορεί να δείξει ότι η σ_{2n+1} είναι αύξουσα και επομένως $\sigma_{2n+1} > \sigma_1 = \frac{1}{2}$, ενώ η σ_{2n} είναι φθίνουσα και συνεπώς $\sigma_{2n} < \sigma_2 = -\frac{1}{3}$, οπότε οι δυο υπακολουθίες αυτής συγκλίνουν (να αποδειχτεί ως άσκηση!) σε διαφορετικά όρια, πράγμα που σημαίνει ότι η σειρά δε συγκλίνει.

Μια ενδιαφέρουσα έννοια είναι η έννοια της σύγκλισης κατ' απόλυτη τιμή.

Ορισμός 2.3.10 *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει, λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ είναι απόλυτα συγκλίνουσα ή συγκλίνει απόλυτα.*

Η μελέτη τέτοιων περιπτώσεων προφανώς ανάγεται στην παράγραφο (2.3.1). Ωστόσο υπάρχουν ενδιαφέροντα στοιχεία να δει κάποιος εδώ.
Ας υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ αποτελείται από άπειρους θετικούς και άπειρους αρνητικούς όρους και επιπλέον είναι μια απόλυτα συγκλίνουσα σειρά. Ας θεωρήσουμε επιπλέον τις ακολουθίες με τους μη αρνητικούς και τους μη θετικούς όρους, που μπορούμε να πάρουμε απ' αυτή, τις

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, \text{ αν } a_n \geq 0 \\ 0, \text{ αν } a_n < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad a_n^- = \begin{cases} 0, \text{ αν } a_n \geq 0 \\ a_n, \text{ αν } a_n < 0 \end{cases}$$

Για κάθε μια απ' αυτές ισχύει $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$ και $0 \leq -a_n^- \leq |a_n|$, οπότε από το Θεώρημα 2.3.3 και το γεγονός ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει, συμπεραίνουμε ότι και οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$ και $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$. Φυσικά, αφού $\forall n \in \mathbb{N}$, ισχύει $|a_n| = a_n^+ - a_n^-$, η σύγκλιση των σειρών των θετικών και των αρνητικών όρων συνεπάγεται τη σύγκλιση της απόλυτης σύγκλισης της σειράς. Επιπλέον, αφού $\forall n \in \mathbb{N}$, ισχύει $a_n = |a_n| - 2a_n^-$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ θα συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. Έτσι αποδείξαμε το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.11 *Αν μια σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε συγκλίνει και απλά. Επιπλέον οι σειρές των θετικών και αρνητικών όρων συγκλίνουν, αν και μόνο αν η σειρά συγκλίνει απόλυτα.*

Οι ακολουθίες των οποίων οι όροι δε διατηρούν το πρόσημο χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή, γιατί είναι δυνατό να οδηγηθούμε σε παραλογισμούς και άτοπα. Για παράδειγμα, ας δούμε το Παράδειγμα 2.30, όπου δείξαμε ότι η σειρά δεν συγκλίνει. Αν κάποιος κάνει το σφάλμα και την εξετάσει όπως παρακάτω, ας δούμε που καταλήγει

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1} + \cdots =$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right) + \cdots + \left((-1)^{n+1}\frac{n}{n+1} + (-1)^{n+2}\frac{n+1}{n+2}\right) + \cdots =$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Όμως αυτή, αφού είναι μια σειρά θετικών όρων και επιπλέον ισχύει $\frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^2}$, από το Θεώρημα (2.3.3) και το γεγονός ότι η τελευταία είναι συγκλίνουσα, θα συγκλίνει· άτοπο. Γενικά λοιπόν οι ομαδοποιήσεις δεν επιτρέπονται στους όρους των σειρών. Αποδείχνεται όμως ότι

Θεώρημα 2.3.12*Αν μια σειρά είναι συγκλίνουσα, τότε οποιαδήποτε ομαδοποίηση των όρων της, χωρίς αλλαγή της τάξης τους, μας δίνει σειρά συγκλίνουσα στο ίδιο όριο με την αρχική.*

Επίσης σε τέτοια παράλογα οδηγούμαστε, όταν κάνουμε αναδιατάξεις όρων και όταν λέμε αναδιατάξεις όρων, εννοούμε να τοποθετήσουμε τους όρους της σειράς με μια άλλη διάταξη, εκτός αυτής που είναι τώρα χωρίς να προσθέσουμε ή να παραλείψουμε όρους. Για το παράδειγμά μας θα πάρουμε την εναλλάσσουσα αρμονική σειρά που ήδη έχουμε δει, στο Παράδειγμα 2.29, ότι συγκλίνει στο $\ln 2$. Εδώ ο πρώτος και δεύτερος όρος μένουν όπως είναι, από εκεί και πέρα όλοι οι όροι που βρίσκονται στη θέση $2k+1$ πηγαίνουν στην θέση $3k+1$ και όλοι οι όροι που βρίσκονται στη θέση $2k$ πηγαίνουν: αυτοί που είναι στη θέση $4m$, στη θέση $3m$, ενώ αυτοί που είναι στη θέση $4m+2$ στη θέση $3m+2$. Έτσι διαδοχικά έχουμε

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \cdots =$$

$$(1-\frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10}) - \frac{1}{12} + (\frac{1}{7} - \frac{1}{14}) - \frac{1}{16} - (\frac{1}{9} + \frac{1}{18}) + \frac{1}{20} - \cdots =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{18} - \cdots = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots\Big) =$$

$$\frac{1}{2}\ln 2 \qquad \text{άτοπο.}$$

Γενικά λοιπόν οι αναδιατάξεις όρων δεν επιτρέπονται στις σειρές. Αποδείχνεται όμως ότι

Θεώρημα 2.3.13*Αν μια σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε, οποιαδήποτε αναδιάταξη των όρων της, μας δίνει σειρά συγκλίνουσα στο ίδιο όριο με την αρχική.*

Ωστόσο το επόμενο Θεώρημα του Riemann, που αναφέρεται σε σειρές με θετικούς και αρνητικούς όρους, μας δείχνει την προσοχή με την οποία πρέπει να εξετάζονται αυτές.

Θεώρημα 2.3.14 *Αν μια σειρά συγκλίνει αλλά δε συγκλίνει απόλυτα, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει μια αναδιάταξη των όρων της, που μας δίνει σειρά συγκλίνουσα σ' αυτό το $x \in \mathbb{R}$.*

2.3.3 Δυναμοσειρές

Πάρα πολλές φορές οι όροι των σειρών είναι συναρτήσεις της μεταβλητής x, και στην πιο απλή μορφή δυνάμεις του μονωνύμου $x - x_0$, δηλ. έχουν τη μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, όπου a_n οι όροι κάποιας ακολουθίας και x_0 κάποιος πραγματικός αριθμός. Τέτοιες σειρές λέγονται **δυναμοσειρές** ή **σειρές δυνάμεων** και είναι εξαιρετικά χρήσιμα εργαλεία στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, π.χ. διαφορικών εξισώσεων.

Για κάθε πραγματική τιμή της μεταβλητής x η δυναμοσειρά μετατρέπεται σε σειρά και αν η σειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, το x λέγεται σημείο σύγκλισης. Είναι φανερό ότι για $x = x_0$ κάθε δυναμοσειρά συγκλίνει στο 0, δηλ. έχει ένα σημείο σύγκλισης, όμως κάτι τέτοιο είναι τετριμμένη περίπτωση και δεν ενδιαφέρει. Πολλές δυναμοσειρές συγκλίνουν για ένα διάστημα $(x_0 - r, x_0 + r)$ γύρω από το x_0, που λέγεται *διάστημα σύγκλισης* το δε r λέγεται *ακτίνα σύγκλισης*.

Απ' όσα είπαμε μέχρι τώρα στις σειρές (Θεώρημα 2.3.6), προκύπτει ότι μια δυναμοσειρά θα συγκλίνει, αν

$$\lim \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} < 1 \Leftrightarrow |x - x_0| \underbrace{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}_{=\rho} < 1. \tag{2.26}$$

αν $\rho = 0$, η σειρά συγκλίνει για κάθε πραγματικό x, αφού πληροί την (2.26), αν $0 < \rho < +\infty$, η σειρά συγκλίνει για κάθε πραγματικό x, με

$$x_0 - \frac{1}{\rho} < x < x_0 + \frac{1}{\rho} \tag{2.27}$$

δηλ. η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = \frac{1}{\rho}$, ενώ αν $\rho = +\infty$, η σειρά συγκλίνει μόνον για $x = 0$. Όταν το x παίρνει τις τιμές των άκρων του διαστήματος σύγκλισης, η ανισότητα της σχέσης (2.26) δεν ισχύει. Έτσι, πρέπει να εξετάσουμε τη σειρά ιδιαίτερα στα άκρα του διαστήματος. Ας σκιαγραφήσουμε όλα τα παραπάνω στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.31 *Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$. *Να μελετηθεί ιδιαίτερα στα άκρα του διαστήματος.*

Λύση Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε $a_n = \frac{1}{n2^n}$ και $x_0 = 0$. Έτσι

$$\rho = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n2^n}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n2^n}} = \frac{1}{2\lim \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}$$

Οπότε $r = \frac{1}{\rho} = 2$ και $x \in (-2, 2)$. Ειδικά για $x = 2$, η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (αρμονική σειρά). Για $x = -2$, η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ (εναλλάσσουσα αρμονική σειρά). Έτσι το διάστημα σύγκλισης είναι $[-2, 2)$.

Παρατήρηση 2.3.2 *Παρόμοια αντιμετώπιση του προβλήματος της σύγκλισης δυναμοσειρών με το κριτήριο του D'Alembert (Θεώρημα 2.3.5) ή εφαρμογή της Πρότασης 2.2.19 μας δίνει ότι* $\rho = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

Παράδειγμα 2.32 *Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Λύση Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε $a_n = \frac{1}{n!}$ και $x_0 = 0$. Έτσι

$$\rho = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim \frac{1}{n+1} = 0.$$

Έτσι η σειρά συγκλίνει για κάθε πραγματικό x. Επιπλέον κάποιος μπορεί να συμπεράνει ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 0$ (γιατί;).

Το πρόβλημα των σειρών είναι εξαιρετικά ευρύ. Εδώ έγινε μάλλον μια εισαγωγή. Ανάλογα με το πρόβλημά του ο φοιτητής θα πρέπει να κατευθυνθεί σε βιβλία περισσότερο ειδικά.

Ασκήσεις

Άσκηση 2.1 *Γράψτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών*

$$a_n = \frac{n+1}{3^n}, \quad b_n = \frac{n}{1 + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{2^2} + \sqrt[n]{2^3} + \cdots + \sqrt[n]{2^{n-1}}}, \quad c_n = n(\sqrt[n]{3} - 1)$$

Δείξτε ότι αυτές είναι φραγμένες.

Άσκηση 2.2 *Εξετάστε ως προς τη μονοτονία και το φραγμένο τις ακολουθίες*

$$a_n = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots \frac{1}{n\cdot(n+1)},$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)}+\sqrt{n}}$$

Γράψτε αυτές σε απλούστερη μορφή.

Άσκηση 2.3 *Προσαρμόστε κατάλληλα και αποδείξτε το Θεώρημα του sandwich (2.2.5) στις απειριζόμενες ακολουθίες.*

Άσκηση 2.4 *Προσαρμόστε κατάλληλα και αποδείξτε την Πρόταση 2.2.6 στις απειριζόμενες ακολουθίες.*

Άσκηση 2.5 *Να δειχτεί ότι αν* $\lim a_n = a$, *τότε (υπό την προϋπόθεση ότι ορίζονται)*

$$i)\ \lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a, \quad ii)\ \lim \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} = a$$

$$iii)\ \lim \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = a,$$

[Προσοχή! στο iii), ο παρονομαστής δεν αυξάνει πάντα γνήσια.]

Άσκηση 2.6 *Βρείτε τα όρια των ακολουθιών*

$$a_n = \frac{2^n + 3^n}{3^n - 4^n}, \quad b_n = \frac{2^n}{2^n + 1}, \quad a_n = \frac{2^n + 2^{-n}}{2^n - 2^{-n}}$$

.

Άσκηση 2.7 *Δίνεται η ακολουθία*

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad a_1 = \sqrt{2}$$

1) Δείξτε ότι είναι αύξουσα
2) Δείξτε ότι είναι φραγμένη
3) Βρείτε το όριό της.

Άσκηση 2.8 *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$, *αν* $\lim a_n = l$.

Άσκηση 2.9 *Να δειχτεί ότι η ακολουθία* $a_n = n(\sqrt[n]{3} - 1)$ *είναι φραγμένη.*

Άσκηση 2.10 *A) Αν για δυο ακολουθίες* a_n *και* b_n *θετικών όρων ισχύει* $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$, *τότε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

B) Αν για δυο ακολουθίες a_n *και* b_n *θετικών όρων ισχύει* $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$, *τότε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

Άσκηση 2.11 *Αν για δυο ακολουθίες μη θετικών όρων ισχύει* $0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, *τότε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty \ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\infty$$

[Δημιουργούμε τους λόγους για $i = 1, 2, \ldots, n$ και πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη.]

Άσκηση 2.12 *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$$

Άσκηση 2.13 *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$$

Άσκηση 2.14*Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^p},$$

χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.3.7, ή όποιον άλλο τρόπο θέλετε.

Άσκηση 2.15*Δείξτε ότι*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty,$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, *ή όποιον άλλο τρόπο θέλετε.*

Άσκηση 2.16*Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n\sqrt{n} - 1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-n}{2n+1}\right)^n$$

Άσκηση 2.17*Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Τί συμπεραίνετε σχετικά με την σύγκλιση και το φραγμένο των ακολουθιών $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ *και* $b_n = \frac{2^n}{n^2}$;

Άσκηση 2.18*Στις παρακάτω δυναμοσειρές*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n! x^n}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{2^n n^2}$$

1) Προσδιορίστε το x_0.
2) Βρείτε το διάστημα σύγκλισης.

Συναρτήσεις

3.1 Γενικά

Έχουμε δει ήδη στο προηγούμενο κεφάλαιο τον ορισμό της απεικόνισης. *Μια απεικόνιση, της οποίας τα σύνολα A και B είναι υποσύνολα των πραγματικών αριθμών, λέγεται πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής.* Το σύνολο A λέγεται *πεδίο ορισμού* ενώ το σύνολο B *σύνολο άφιξης*. Η μεταβλητή x που παίρνει τιμές στο σύνολο A είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ η εξαρτημένη μεταβλητή y, η μεταβλητή της οποίας οι τιμές εξαρτώνται από τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής, παίρνει τιμές στο σύνολο B. Συνήθως οι τιμές της μεταβλητής y δίνονται μέσα από μια έκφραση, έναν τύπο, που λέγεται τύπος της συνάρτησης και συμβολικά γράφεται

$$f : A \to B, \quad y = f(x) \tag{3.1}$$

Το σύνολο των τιμών της μεταβλητής y λέγεται *σύνολο τιμών* αυτής και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι ήδη γνωστό ότι το πεδίο ορισμού A μιας συνάρτησης, το σύνολο B και ο τύπος της συνάρτησης είναι αναγκαία για τον πλήρη προσδιορισμό αυτής. Για τις πραγματικές, όμως, συναρτήσεις ως σύνολο B θεωρείται ολόκληρο το $\mathbb{R}$, ενώ το πεδίο ορισμού A προσδιορίζεται ως το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, για το οποίο έχει έννοια πραγματικού αριθμού ο τύπος της συνάρτησης αφενός και δεν έρχεται σε αντίθεση με τη φύση του προβλήματος αφετέρου.

Παράδειγμα 3.1*Να βρεθεί το πεδίο ορισμού*

$$a) \text{ της συνάρτησης } f(x) = \sqrt{100 - x^2}$$

$$b) \text{ της συνάρτησης ζήτησης } p(q) = \sqrt{100 - q^2}$$

Λύση Για την πρώτη περίπτωση έχουμε ότι $A_f = \{x/-10 \leq x \leq 10\}$, αφού τότε έχει έννοια πραγματικού αριθμού ο τύπος της συνάρτησης. Για τη δεύτερη, όμως, περίπτωση έχουμε $A_p = [0, 10]$, αφού αφ' ενός τότε έχει έννοια πραγματικού αριθμού ο τύπος της συνάρτησης, αφ' ετέρου σε μια συνάρτηση ζήτησης δεν μπορούμε να μιλάμε για αρνητικές ποσότητες.

Οι τέσσερις πράξεις της αριθμητικής ορίζονται ως πράξεις και στις συναρτήσεις, στο κοινό πεδίο ορισμού τους, με τους παραπάνω περιορισμούς. Έτσι

$$\begin{aligned} &f \pm g : A_{f\pm g} \to \mathbb{R}, (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad \text{όπου} \quad A_{f\pm g} = A_f \cap A_g \\ &f \cdot g : A_{f\cdot g} \to \mathbb{R}, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \text{όπου} \quad A_{f\cdot g} = A_f \cap A_g \\ &\frac{f}{g} : A_{\frac{f}{g}} \to \mathbb{R}, (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{όπου} \quad A_{\frac{f}{g}} = A_f \cap A_g \setminus \{x/x : g(x) = 0\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Παράδειγμα 3.2*Αν $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{4-x^2}$, να ορίσετε τις συναρτήσεις: $f \pm g,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g}$.*

Λύση Έχουμε $A_f = [1, \infty)$ και $A_g = [-2, 2]$ και

$$\begin{aligned} &f \pm g : A_{f\pm g} \to \mathbb{R}, (f \pm g)(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x^2}, \quad \text{με} \quad A_{f\pm g} = [1, 2] \\ &f \pm g : A_{f\cdot g} \to \mathbb{R}, (f \pm g)(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{4-x^2}, \quad \text{με} \quad A_{f\pm g} = [1, 2] \\ &\frac{f}{g} : A_{\frac{f}{g}} \to \mathbb{R}, (\frac{f}{g})(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{\frac{x-1}{4-x^2}}, \quad \text{με} \quad A_{\frac{f}{g}} = [1, 2) \end{aligned}$$

Παρατήρηση 3.1.1*Η προηγούμενη συνάρτηση $\frac{f}{g}$ λέμε ότι είναι ένας περιορισμός της $h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{4-x^2}}$, αφού $A_h = (-\infty, -2) \cup [1, 2) \supseteq [1, 2) = A_{\frac{f}{g}}$.*

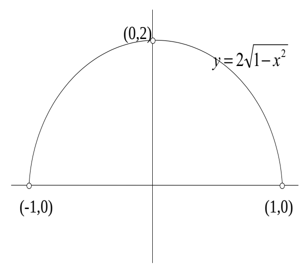
Μπορούμε να συνθέσουμε συναρτήσεις και να δημιουργήσουμε άλλες, φυσικά πάντα κάτω από κατάλληλες προϋποθέσεις. Έστω f και g δυο συναρτήσεις και A_f, A_g τα αντίστοιχα πεδία ορισμού αυτών. Αν το σύνολο τιμών $f(A_f)$ της f έχει κοινά σημεία με το πεδίο ορισμού A_g της g, τότε υπάρχουν κάποια σημεία στο A_f τα οποία απεικονίζονται με την f στο A_g και στη συνέχεια απεικονίζονται με την g στο $\mathbb{R}$. Είναι φανερό ότι αυτά είναι τα $g(f(x))$. Όμως έτσι ορίζεται μια νέα συνάρτηση που λέγεται σύνθεση των f και g και συμβολίζεται $g \circ f$. Δηλ.

$$g \circ f : A_{g\circ f} \to \mathbb{R},\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ με } A_{g\circ f} = \{x/x,\ x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_g\}$$

Παράδειγμα 3.3 *Για τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+2}$ και $g(x) = \sqrt{9-x^2}$, να βρεθεί η σύνθεση $g \circ f$ και $f \circ g$.*

Λύση Έχουμε $A_f = [-2, \infty)$ και $A_g = [-3, 3]$. Έτσι $A_{g \circ f} = [-2, 7]$, αφού $x \in [-2, \infty)$ και $\sqrt{x+2} \in [-3, 3] \Rightarrow -2 \leq x \leq 7$. Τέλος $g(f(x)) = \sqrt{9 - (\sqrt{x+2})^2} = \sqrt{7-x}$. Ομοίως $A_{f \circ g} = [-3, 3]$ αφού $x \in [-3, 3]$ και $\sqrt{9-x^2} \in [-2, \infty) \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$ με $f(g(x)) = \sqrt{2 + \sqrt{9-x^2}}$.

Το γράφημα G, στις πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής, αποτελείται από σημεία του επιπέδου ($\mathbb{R}^2$), το οποίο σημαίνει ότι μπορούμε να τα απεικονίσουμε σ' αυτό. Η απεικόνιση αυτή, που είναι σημεία ή γραμμές, αποτελούν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Ορισμένα σημεία είναι χαρακτηριστικά για τη γραφική παράσταση. Για παράδειγμα το σημείο του γραφήματος $(0, f(0))$ είναι το σημείο που η γραφική παράσταση τέμνει τον κατακόρυφο άξονα, ενώ τα σημεία $(x_i, 0)$, όπου $f(x_i) = 0$, είναι τα σημεία που η γραφική παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα. Επίσης, τέτοια σημεία είναι τα σημεία των άκρων των διαστημάτων, αν το πεδίο ορισμού αυτής περιέχει τέτοια. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2\sqrt{1-x^2}$.

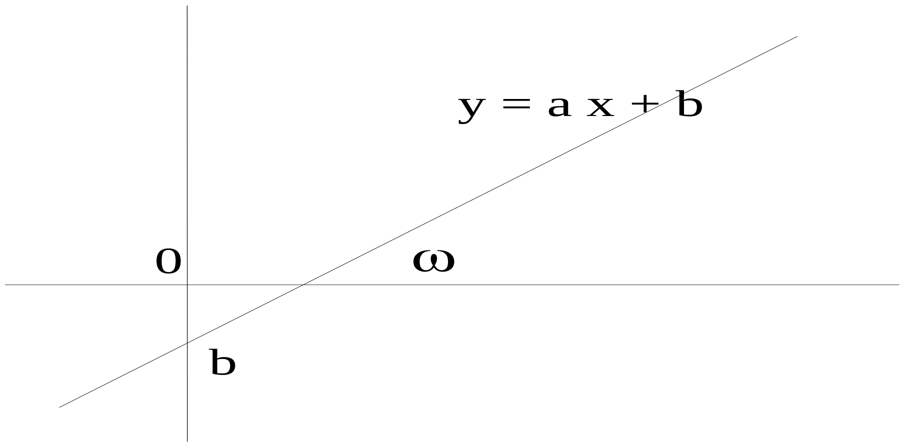


3.2 Η ευθεία

Η γνωστή συνάρτηση

$$y = ax + b \tag{3.3}$$

με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, παριστάνεται γραφικά με μια ευθεία γραμμή, η οποία περνά από το σημείο b του κατακόρυφου άξονα και έχει κλίση a, δηλ. $\tan\omega = a$, όπου ω είναι η μικρότερη θετική γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον οριζόντιο άξονα. Πιο πρακτικά η κλίση μάς λέει ότι, όταν το x αυξάνει κατά μια μονάδα, το y αυξάνει καρά a. Είναι φανερό ότι, τον οριζόντιο άξονα τον τέμνει στο σημείο $-\frac{b}{a}$. Συναρτήσεις με το ίδιο a παριστάνονται από παράλληλες ευθείες, αφού έχουν την ίδια κλίση, ενώ συναρτήσεις με το ίδιο b, παριστάνονται από δέσμη ευθειών που περνάνε όλες από το b του κατακόρυφου άξονα. Η σταθερή



Σχήμα 3.7: Η απεικόνιση $f : A \to B,\ y = ax + b$.

συνάρτηση $y = b$ έχει ως γραφική παράσταση μια ευθεία παράλληλη ως προς τον οριζόντιο άξονα. Για το σχεδιασμό της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης της μορφής $y = ax + b$, λόγω του ότι αυτή είναι μια ευθεία, μας αρκούν δυο οποιαδήποτε σημεία. Συνήθως βρίσκουμε τα σημεία τομής αυτής με τους άξονες, εκτός και αν πρόκειται για τον περιορισμό αυτής σε διάστημα, οπότε βρίσκουμε τα άκρα του διαστήματος.

Γενικότερα τα σημεία της εξίσωσης

$$ax + by + c = 0 \tag{3.4}$$

βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία γραμμή, αφού για $b \neq 0$, η (3.4) με απλές πράξεις μετατρέπεται στην (3.3). Όταν $b = 0$, η (3.4) παίρνει τη μορφή

$$x = -\frac{c}{a},$$

η οποία δεν είναι μεν συνάρτηση, όμως παριστάνεται από μια ευθεία παράλληλη προς τον κατακόρυφο άξονα $y'y$, που περνά από το σημείο $-\frac{c}{a}$ του οριζόντιου.

3.3 Γνωστές έννοιες και ιδιότητες των συναρτήσεων

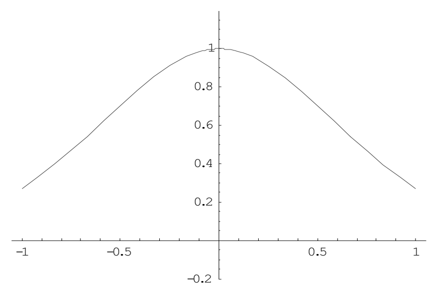
3.3.1 Άρτια συνάρτηση

Ορισμός 3.3.1 *Μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα $[-\theta, \theta]$ λέγεται άρτια, αν $f(-x) = f(x)$.*

Λόγω της συμμετρίας των τιμών της μεταβλητής x και της ισότητας $f(-x) = f(x)$, οι άρτιες συναρτήσεις έχουν άξονα συμμετρίας τον κατακόρυφο άξονα.

Παράδειγμα 3.4 *Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$ είναι άρτια.*

Λύση Πράγματι εύκολα βρίσκουμε ότι $f(-x) = \frac{\cos(-x)}{(-x)^2} = \frac{\cos x}{x^2} = f(x)$.
Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα, όπου η συμμετρία είναι φανερή.



Παρατήρηση 3.3.1 *Γενικότερα, μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = a$, αν ισχύει $f(a - x) = f(a + x)$. Στην περίπτωση που η συνάρτηση έχει ως πεδίο ορισμού το διάστημα $[a, b]$, τότε έχει άξονα συμμετρίας τη μεσοκάθετη του τμήματος ($x = \frac{a+b}{2}$) αν ισχύει $f(x) = f(a + b - x)$.*

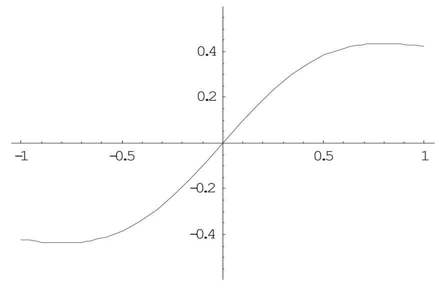
Η απόδειξη της παρατήρησης αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη.

3.3.2 Περιττή συνάρτηση

Ορισμός 3.3.2 *Μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα $[-\theta, \theta]$ λέγεται περιττή, αν $f(-x) = -f(x)$.*

Λόγω της συμμετρίας των τιμών της μεταβλητής x και της ισότητας $f(-x) = -f(x)$, οι περιττές συναρτήσεις έχουν κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Παράδειγμα 3.5 *Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$ είναι περιττή.*



Λύση Πράγματι εύκολα βρίσκουμε ότι $f(-x)=\frac{\sin(-x)}{(-x)^2}=\frac{-\sin x}{x^2}=-f(x)$.
Η γραφική της παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα, όπου η συμμετρία φαίνεται καθαρά.

Παρατήρηση 3.3.2 *Γενικότερα, μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο $x=a$, αν ισχύει $f(a-x)=-f(a+x)$. Στην περίπτωση που η συνάρτηση έχει ως πεδίο ορισμού το διάστημα $[a,b]$, τότε έχει κέντρο συμμετρίας το μέσο του τμήματος ($x=\frac{a+b}{2}$), αν ισχύει $f(x)=-f(a+b-x)$.*

Η απόδειξη της παρατήρησης αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη.

3.3.3 Αμφιμονοσήμαντη ή '1-1' συνάρτηση

Ορισμός 3.3.3 *Μια συνάρτηση f ορισμένη στο A λέγεται αμφιμονοσήμαντη ή '1-1' συνάρτηση, αν για κάθε x_1 και $x_2\in A$ με $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$.*

Με απλά λόγια, ίδιες εικόνες προέρχονται από ίδια αρχέτυπα. Ισοδύναμα, θα μπορούσε να πει κάποιος ότι διαφορετικά αρχέτυπα δίνουν διαφορετικές εικόνες.

Σε μια συνάρτηση f, σε κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού της A αντιστοιχίζεται κάποιο στοιχείο του πεδίου τιμών της $f(A)$. Όμως έτσι και σε κάθε στοιχείο του πεδίου τιμών $f(A)$ αντιστοιχίζεται κάποιο στοιχείο του πεδίου ορισμού A. Μ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται μια καινούργια σχέση. Στην περίπτωση που η f είναι αμφιμονοσήμαντη, η καινούργια αυτή σχέση είναι συνάρτηση (γιατί;) και συμβολίζεται με f^{-1} και ονομάζεται αντίστροφή της f. Είναι πλέον γεγονός, ότι στην αντίστροφη συνάρτηση η εξαρτημένη μεταβλητή γίνεται ανεξάρτητη και η ανεξάρτητη γίνεται εξαρτημένη. Στο επόμενο παράδειγμα φαίνεται ο τρόπος διαπραγμάτευσης τέτοιων περιπτώσεων.

Παράδειγμα 3.6 *Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με τύπο $y=\sqrt{x+2}$ έχει αντίστροφη και σε καταφατική απάντηση να βρείτε τον τύπο της.*

Λύση Το πεδίο ορισμού αυτής είναι $A = [-2, \infty)$. Από τον Ορισμό 3.3.3 προκύπτει

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ με } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1 + 2} = \sqrt{x_2 + 2} \Rightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

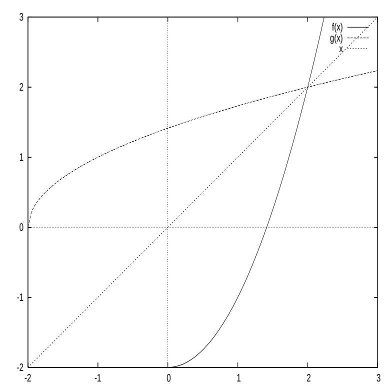
Αφού η συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη, μπορούμε να βρούμε την αντίστροφή της, με $x \in f(A)$ και $y \in A$ ως εξής

$$x = \sqrt{y+2} \Leftrightarrow x^2 = y + 2 \Leftrightarrow y = x^2 - 2.$$

Έτσι για την αντίστροφη f^{-1} έχουμε

$$f^{-1}: \ f(A) \to A, f^{-1}(x) = x^2 - 2.$$

Όπως φάνηκε από τα προηγούμενα, όταν το τυχαίο ζεύγος (x, y) βρίσκεται στο γράφημα της f, το ζεύγος (y, x) βρίσκεται στο γράφημα της f^{-1}, στο επίπεδο αυτό σημαίνει ότι αυτά τα δυο σημεία είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο του πρώτου τεταρτημόριου. Έτσι, ολόκληρη η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι η συμμετρική της γραφικής παράστασης της f. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης του προηγούμενου παραδείγματος και της αντίστροφής της, όπου φαίνεται και η συμμετρία.



3.3.4 Φραγμένες συναρτήσεις

Ορισμός 3.3.4 *Μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού το σύνολο A λέμε ότι είναι άνω φραγμένη (κάτω φραγμένη), όταν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός ϕ, ώστε για κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού της να ισχύει $f(x) \leq \phi$ ($f(x) \geq \phi$).*

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι κάτω φραγμένη, αφού ισχύει $x^2 \geq 0$. Αν για τη συνάρτηση υπάρχουν ϕ_1 και ϕ_2, τέτοιο ώστε $\phi_1 \leq f(x) \leq \phi_2$, λέμε ότι η συνάρτηση είναι απλά φραγμένη. Για παράδειγμα, η συνάρτηση του ημιτόνου είναι φραγμένη, αφού $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Παρατήρηση 3.3.3 *Αν συμβεί το ελάχιστο από τα άνω φράγματα της συνάρτησης να είναι στοιχείο του συνόλου τιμών της, λέγεται μέγιστο, ενώ αν συμβεί το μέγιστο από τα κάτω φράγματα αυτής να είναι στοιχείο του συνόλου τιμών της, λέγονται ελάχιστο. Το μέγιστο και το ελάχιστο λέγεται ακρότατο.*

3.3.5 Μονοτονία

Ορισμός 3.3.5 *Μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο A λέγεται γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα), άν $\forall x_1$ και $x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.*

Ορισμός 3.3.6 *Μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο A λέγεται αύξουσα (φθίνουσα), αν $\forall x_1$ και $x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.*

Παρατήρηση 3.3.4 *Είναι γεγονός ότι για μια γνησίως μονότονη συνάρτηση (γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα) συμβαίνει το εξής: σε διαφορετικά αρχέτυπα αντιστοιχούν διαφορετικές εικόνες. Δηλ. μια τέτοια συνάρτηση είναι '1-1'.*

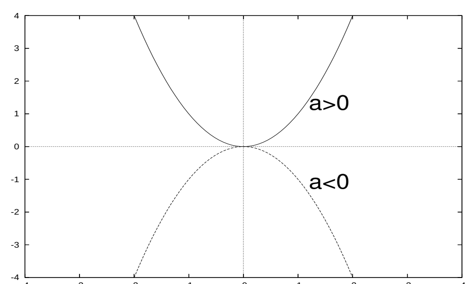
3.4 Η Παραβολή και η Υπερβολή

3.4.1 Η Παραβολή

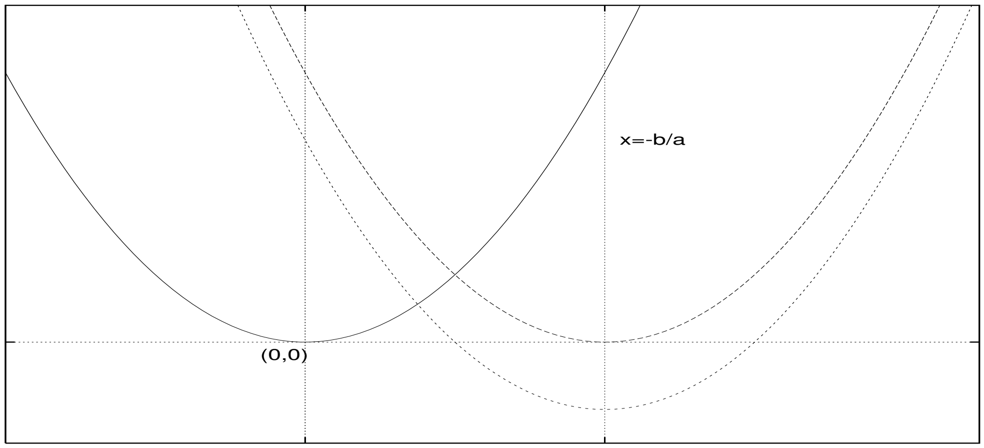
Η Παραβολή είναι γνωστή από το Γυμνάσιο ακόμη. Στην πιο απλή της μορφή έχει τον τύπο

$$y = ax^2, \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

Είναι φανερό ότι για $a > 0$ αυτή είναι φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και αύξουσα στο διάστημα $[0, -\infty)$. Ο κατακόρυφος άξονας είναι άξονας συμμετρίας (είναι άρτια) και έχει ελάχιστη τιμή το 0, στο $x = 0$. Παρόμοια συμβαίνουν για $a < 0$· τώρα αυτή είναι αύξουσα για το διάστημα $(-\infty, 0]$



και φθίνουσα για το διάστημα $[0, -\infty)$. Ο κατακόρυφος άξονας συνεχίζει να είναι άξονας συμμετρίας και έχει μέγιστη τιμή το 0, στο $x = 0$.



Σχήμα 3.8: Η απεικόνιση της $y = ax^2 + bx + c$.

Γενικά η παραβολή έχει τη μορφή

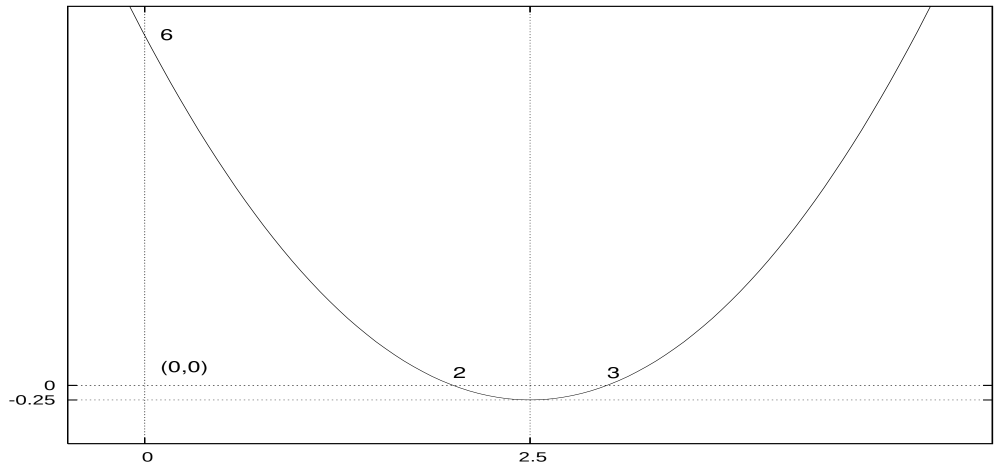
$$y = ax^2 + bx + c, \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

με απλές πράξεις αυτή παίρνει τη μορφή

$$y = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \tag{3.7}$$

Θυμίζουμε ότι χαρακτηριστικά σημεία της είναι οι ρίζες της (όταν $b^2 - 4ac \geq 0$) στον οριζόντιο άξονα και το σημείο c του κατακόρυφου άξονα. Η ευθεία $x = -\frac{b}{2a}$ είναι τώρα άξονας συμμετρίας και στο σημείο $x = -\frac{b}{2a}$ παίρνει την ελάχιστη τιμή, όταν $a > 0$ και μέγιστη, όταν $a < 0$. Η γραφική της παράσταση προκύπτει από τη γραφική παράσταση της ax^2 μετακινώντας την οριζόντια κατά $-\frac{b}{2a}$ και στη συνέχεια μετακινώντας την καινούργια κατακόρυφα κατά $-\frac{b^2-4ac}{4a}$. Τα δυο βήματα φαίνονται στο Σχήμα 3.8. Ένας άλλος τρόπος θα ήταν να μετακινήσουμε το σύστημα αξόνων στο σημείο $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$ και να σχεδιάσουμε την $Y = aX^2$ στο καινούργιο σύστημα.

Παράδειγμα 3.7*Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $y = x^2 - 5x + 6$, αφού σημειώσετε τα χαρακτηριστικά σημεία της και τις χαρακτηριστικές ευθείες της.*



Σχήμα 3.9: Η απεικόνιση της $y = x^2 - 5x + 6$.

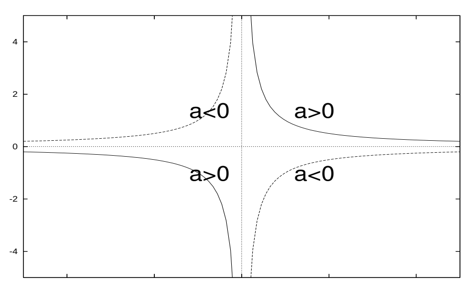
Λύση Τα χαρακτηριστικά σημεία αυτής είναι το 2 και 3 του οριζόντιου άξονα και το 6 του κατακόρυφου. Η ευθεία $x = 2.5$ είναι άξονας συμμετρίας και στο $x = 2.5$ παίρνει ελάχιστη τιμή την $y = -0.25$. Όλα τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα 3.9.

3.4.2 Η Υπερβολή

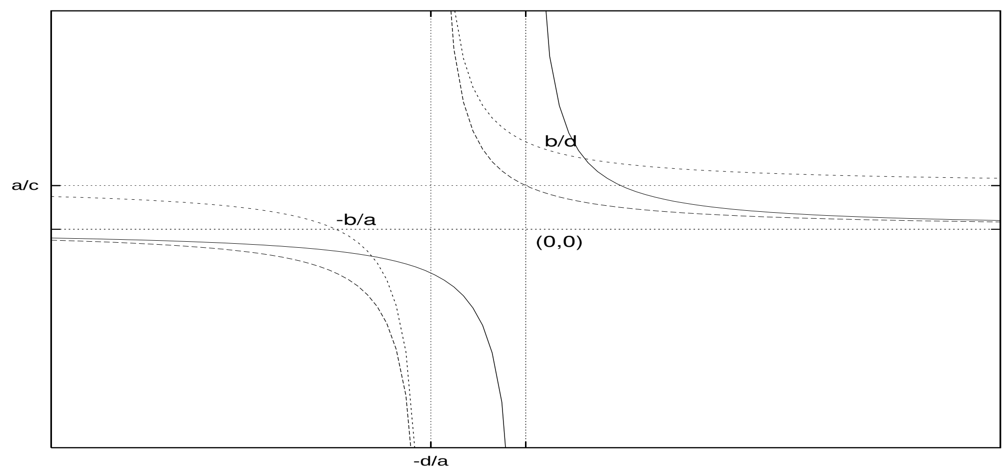
Η Υπερβολή είναι κι αυτή γνωστή από το Γυμνάσιο. Στην πιο απλή της μορφή έχει τον τύπο

$$y = \frac{a}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{3.8}$$

Είναι φανερό ότι για $a > 0$ αυτή είναι φθίνουσα για το διάστημα $(-\infty, 0)$ και επίσης φθίνουσα για το διάστημα $(0, \infty)$. Η αρχή των αξόνων είναι κέντρο συμμετρίας (είναι περιττή) και παίρνει όλες τις τιμές εκτός από την τιμή 0. Παρόμοια συμβαίνουν για $a < 0$· τώρα είναι αύξουσα για το διάστημα



$(-\infty, 0)$ και επίσης αύξουσα για το διάστημα $(0, \infty)$. Η αρχή των αξόνων είναι πάλι κέντρο συμμετρίας.



Σχήμα 3.10: Η απεικόνιση της $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Γενικά η υπερβολή έχει τη μορφή

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \tag{3.9}$$

με απλές πράξεις αυτή παίρνει τη μορφή

$$y = k + \frac{m}{cx+d}, \quad \text{όπου } k = \frac{a}{c} \text{ και } m = \frac{bc-ad}{c}. \tag{3.10}$$

Τα σημεία τομής με τους άξονες (χαρακτηριστικά σημεία της) είναι το $x = -\frac{b}{a}$ του οριζόντιου και $y = \frac{b}{d}$ του κατακόρυφου. Οι ευθείες $x = -\frac{d}{c}$ και $y = \frac{a}{c}$ είναι ασύμπτωτες της υπερβολής και το σημείο $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ το κέντρο συμμετρίας αυτής. Η γραφική της παράσταση προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $\frac{m}{x}$ μετακινώντας την οριζόντια κατά $-\frac{d}{c}$ και στη συνέχεια μετακινώντας την καινούργια κατακόρυφα κατά $\frac{a}{c}$. Τα δυο βήματα φαίνονται στο Σχήμα 3.10. Ένας άλλος τρόπος θα ήταν να μετακινήσουμε το σύστημα αξόνων στο σημείο $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ και να σχεδιάσουμε την $Y = \frac{m}{X}$ στο καινούργιο.

Παράδειγμα 3.8*Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $y = \frac{x+2}{x+1}$, αφού σημειώσετε τα χαρακτηριστικά σημεία της και τις χαρακτηριστικές ευθείες της.*

Λύση Τα χαρακτηριστικά σημεία αυτής είναι το -2 του οριζόντιου άξονα (ρίζα αυτής) και το 2 του κατακόρυφου (τομή της συνάρτησης με τον άξονα yy').

Διαιρώντας αριθμητή με παρονομαστή (διαίρεση πολυωνύμων), παίρνουμε $y = 1 + \frac{1}{x+1}$. Η ευθεία $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη και η $y = 1$ οριζόντια. Όλα τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα 3.10.

3.5 Η εκθετική και η λογαριθμική

3.5.1 Η εκθετική a^x

Με $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ έχει ορισθεί από το Λύκειο, σταδιακά, η δύναμη a^x, αρχικά για φυσικούς αριθμούς, στη συνέχεια για ακεραίους, για ρητούς και τέλος για πραγματικούς. Έτσι για $a \neq 1$ ορίζεται η συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a^x, \tag{3.11}$$

η οποία ονομάζεται εκθετική συνάρτηση a^x. Για $a = 1$ έχουμε τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$, που δεν έχει ενδιαφέρον. Χαρακτηριστικό σημείο της εκθετικής είναι το 1 του κατακόρυφου άξονα, αφού $a^0 = 1$. Προφανώς το σύνολο τιμών αυτής είναι $\mathbb{R}^+$.
Για $a > 1$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, ενώ για $a < 1$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 3.11. Στο Παράδειγμα 2.9 έχουμε ορίσει τον πραγματικό αριθμό e. Με βάση αυτόν ορίζουμε τη συνάρτηση

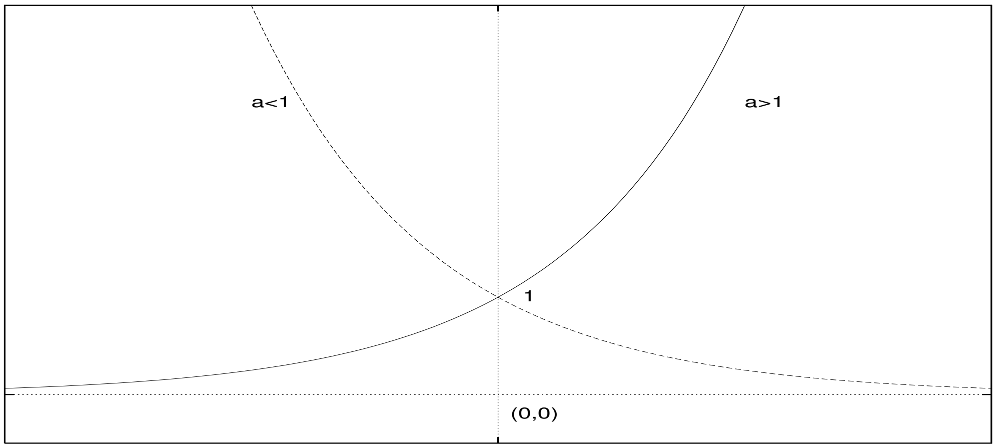
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x, \tag{3.12}$$

η οποία είναι εξαιρετικά χρήσιμη στα Μαθηματικά και εμφανίζεται σε πάρα πολλές εφαρμογές των επιστημών του Περιβάλλοντος των Φυσικών επιστημών και της Οικονομίας.

3.5.2 Η λογαριθμική $\ln_a x$

Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, ως γνησίως μονότονη, είναι '1-1'. Ορίζεται λοιπόν η αντίστροφή της f^{-1}, η οποία ονομάζεται λογαριθμική με βάση a και συμβολίζεται με $\ln_a$, δηλ.

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to R,\ y = \ln_a x \tag{3.13}$$



Σχήμα 3.11: Η απεικόνιση $f : A \to B,\ y = a^x$.

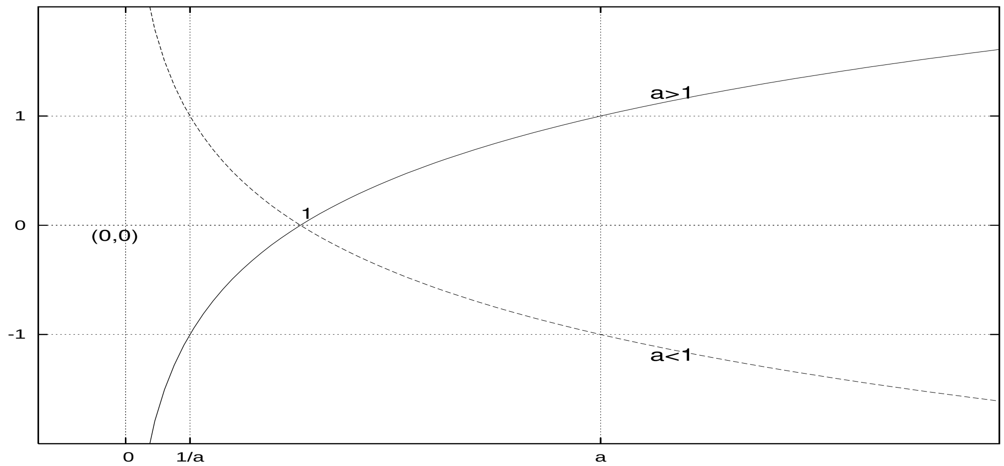
Έτσι για δυο αριθμούς $\rho \in \mathbb{R}$ και $\theta \in \mathbb{R}^+$ και για κάθε $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ισχύει

$$\theta = a^\rho \Longleftrightarrow \rho = \ln_a \theta \tag{3.14}$$

Από τον Ορισμό 3.14 των λογαρίθμων μπορούμε εύκολα να δείξουμε ([1]) τις παρακάτω ιδιότητες.

- $a^{\ln_a \theta} = \theta$ και $\ln_a a^\rho = \rho$
- $\ln_a 1 = 0$ και $\ln_a a = 1$
- $\ln_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \ln_a \theta_1 + \ln_a \theta_2$ και $\ln_a \frac{\theta_1}{\theta_2} = \ln_a \theta_1 - \ln_a \theta_2$
- $\ln_a \theta^k = k \ln_a \theta$ και $\ln_a \sqrt[k]{\theta} = \frac{1}{k} \ln_a \theta$
- $\ln_\beta \theta = \frac{\ln_a \theta}{\ln_a \beta}$

Όταν η βάση είναι το e, μιλάμε απλά για τον φυσικό λογάριθμο $\ln \theta$ και για τη λογαριθμική συνάρτηση $y = \ln x$. Η γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης $y = \ln_a x$ φαίνεται στο Σχήμα 3.12.



Σχήμα 3.12: Η απεικόνιση $f : A \to B,\ y = \ln_a x$.

3.6 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι εξαιρετικά χρήσιμες συναρτήσεις αφού μ' αυτές μπορούμε να περιγράφουμε και να μελετούμε περιοδικά προβλήματα, όπως το πρόβλημα της ταλάντωσης ή τα προβλήματα που έχουν σχέση με τη μελέτη καιρικών φαινομένων σε ετήσια βάση. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις έχουν μελετηθεί αναλυτικά στο Λύκειο. Εδώ απλά θα υπενθυμίσουμε ορισμένες από τις ιδιότητές τους και τις σχέσεις που τους (τις) διέπουν.

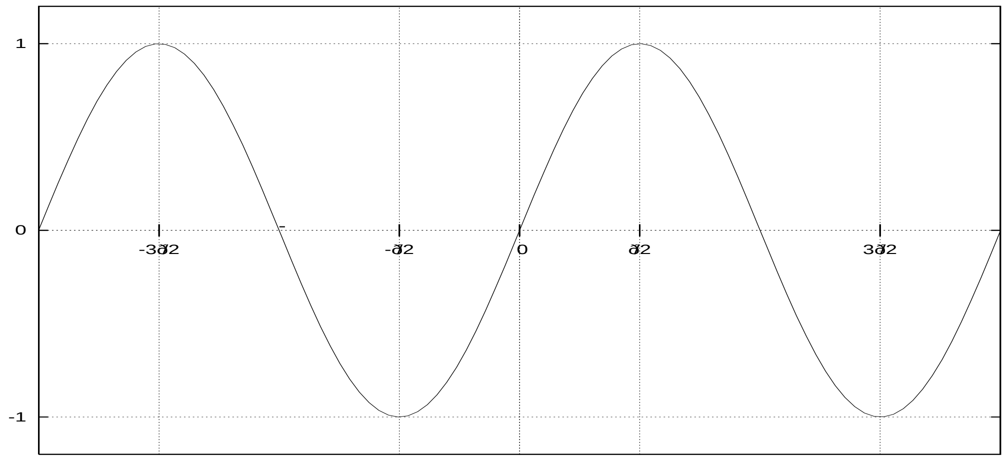
3.6.1 Η συνάρτηση του ημιτόνου

Η συνάρτηση του ημιτόνου ορίζεται παντού στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, έχει ως σύνολο τιμών το διάστημα $[-1, 1]$ και είναι περιττή, αφού $\sin(-x) = -\sin(x)$. Ήτοι

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ y = \sin(x)$$

Επίσης αυτή είναι περιοδική, δηλ.

$$\forall x \in A, \exists\, T(= 2\pi) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :\ f(x + T) = f(x)$$



Σχήμα 3.13: Η απεικόνιση $f : A \to B,\ y = \sin x$.

και ως περιοδική αρκεί να τη μελετήσουμε στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[0, \frac{\pi}{2})$ και $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Στο σημείο $x = \frac{\pi}{2}$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο ($\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$) ενώ στο σημείο $x = \frac{3\pi}{2}$ η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο ($\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$).

Θυμίζουμε επίσης ότι

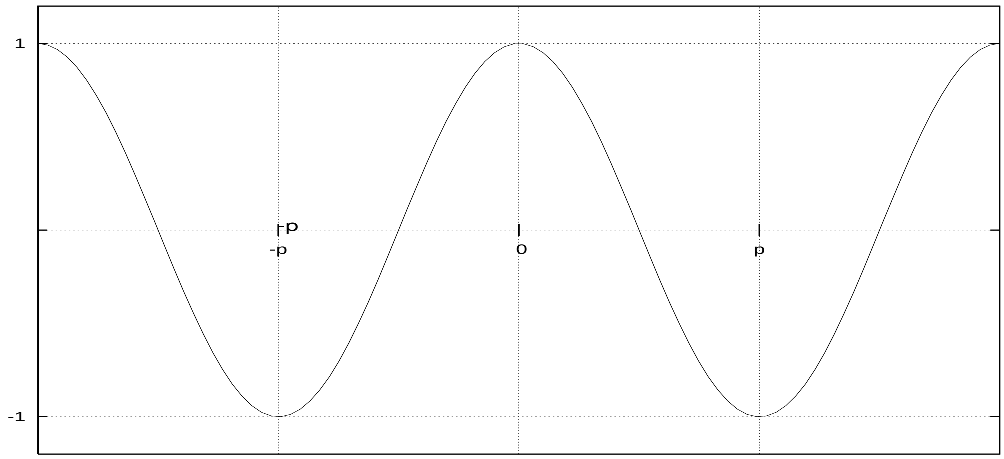
- $\sin(\pi - x) = \sin x, \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\sin 0 = 0, \quad \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}, \quad \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin(\frac{\pi}{2}) = 1.$

3.6.2 Η συνάρτηση του συνημιτόνου

Η συνάρτηση του συνημιτόνου ορίζεται παντού στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, έχει ως σύνολο τιμών κι αυτή το διάστημα $[-1, 1]$ και είναι άρτια, αφού $\cos(-x) = \cos(x)$. Ήτοι

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ y = \cos(x)$$

Επίσης είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$ και ως περιοδική αρκεί να τη μελετήσουμε στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Είναι λοιπόν γνησίως φθίνουσα στο διαστήμα $[0, \pi)$



Σχήμα 3.14: Η απεικόνιση $f : A \to B,\ y = \cos x$.

και γνησίως αύξουσα στο $[\pi, 2\pi)$. Στο σημείο $x = 0$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο $(\cos 0 = 1)$ ενώ στο σημείο $x = \pi$ η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο $(\cos \pi = -1)$.

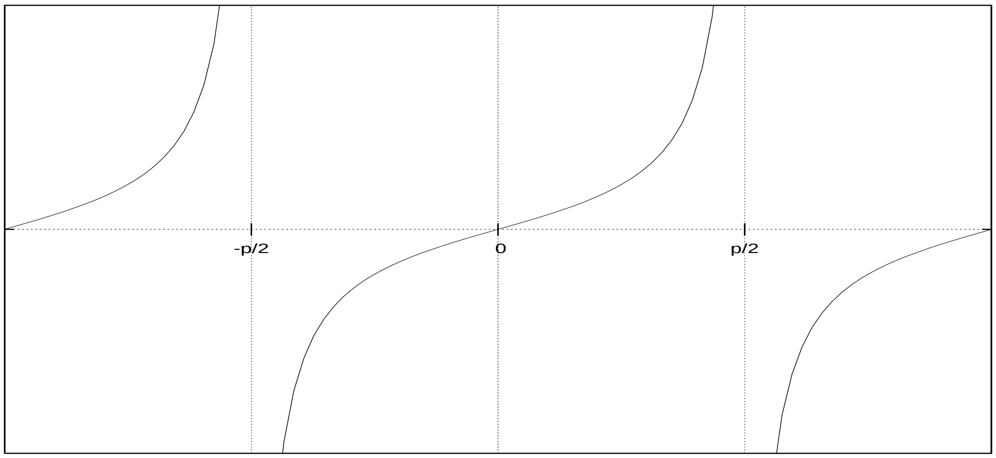
Θυμίζουμε επίσης ότι

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- $\cos 0 = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

Το γεγονός ότι $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση του ημιτόνου προκύπτει από τη συνάρτηση του συνημιτόνου με οριζόντια μεταφορά κατά $\frac{\pi}{2}$ ή η συνάρτηση του συνημιτόνου προκύπτει με οριζόντια μεταφορά του ημιτόνου κατά $-\frac{\pi}{2}$.
Η γραφική της παράσταση, για $x \in [-2\pi, 2\pi)$, φαίνεται στο Σχήμα 3.14.

3.6.3 Η συνάρτηση της εφαπτομένης

Η συνάρτηση της εφαπτομένης, ως κλάσμα των ημιτόνου και συνημιτόνου, δεν ορίζεται πλέον παντού στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, αλλά έχει ως



Σχήμα 3.15: Η απεικόνιση $f : A \to B,\ y = \tan x$.

πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} \setminus \{x/x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$, ως σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και είναι περιττή, αφού $\tan(-x) = \tan(x)$. Ήτοι

$$\tan : A \to \mathbb{R},\ y = \tan(x)$$

Είναι κι αυτή περιοδική, όμως με περίοδο $T = \pi$ και ως περιοδική αρκεί να τη μελετήσουμε στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Η συνάρτηση της εφαπτομένης είναι γνησίως αύξουσα σ' όλο το διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Θυμίζουμε ότι

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$,
- $\tan(\pi - x) = -\tan x, \quad \tan(\pi + x) = \tan x$,
- $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan x}, \quad \tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\frac{1}{\tan x}$,
- $\tan 0 = 0, \quad \tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \tan(\frac{\pi}{4}) = 1, \quad \tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$.

Η γραφική της παράσταση, για $x \in [-\pi, \pi)$, φαίνεται στο Σχήμα 3.15.

3.6.4 Τύποι και ταυτότητες

Ένας μεγάλος αριθμός τύπων και ταυτοτήτων συσχετίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών και τόξων, που είναι χρήσιμο να γνωρίζει κανείς, όταν επεξεργάζεται τέτοια προβλήματα. Στη συνέχεια θα δώσουμε ορισμένους βασικούς τύπους, οι οποίοι έχουν διδαχτεί στο Λύκειο.

- Άθροισμα και διαφορά τόξων
  $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$, $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$,
  $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$, $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$,
  $\tan(a+b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$, $\tan(a-b) = \frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$.

- Διπλάσια - μισά τόξα
  $\sin 2a = 2\sin a\cos a$,
  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$,
  $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$, $\sin 2a = \frac{2\tan}{1+\tan^2 a}$, $\cos 2a = \frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$.

- Μετασχηματισμοί γινομένων σε αθροίσματα
  $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$,
  $2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$,
  $2\cos a\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$.

- Μετασχηματισμοί αθροισμάτων σε γινόμενα
  $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$,
  $\sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$,
  $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$,
  $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$.

- Νόμοι ημιτόνου και συνημιτόνου (Τα a, b, c είναι οι πλευρές του τριγώνου ABC)
  $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$,
  $a = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

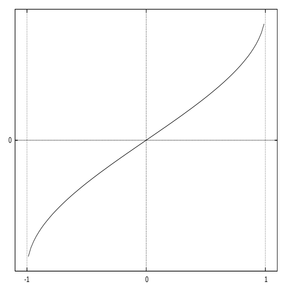
3.6.5 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Η συνάρτηση $y = \sin x$ δεν αντιστρέφεται, αφού αυτή δεν είναι '1-1'. Ωστόσο, αν περιοριστούμε κατάλληλα στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, η συνάρτηση γίνεται

'1-1' και μπορούμε να πάρουμε την αντίστροφή της

$$\sin^{-1}: \ [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \ y = \sin^{-1} x. \tag{3.15}$$

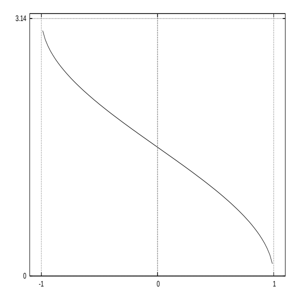
Η $y = \sin^{-1} x$ διαβάζεται «τόξον ημιτόνου x» και στη βιβλιογραφία, ίσως τις περισσότερες φορές, αναγράφεται $y = \arcsin x$. Ουσιαστικά δηλ. η συνάρτηση αυτή μας επιστρέφει το τόξο y, που βρίσκεται μεταξύ του $-\frac{\pi}{2}$ και του $\frac{\pi}{2}$ και έχει ημίτονο το x, π.χ. $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, αφού $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, επίσης $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$, αφού $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Παρόμοια ισχύουν και με τις άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Η συνάρτηση $y = \cos x$ γίνεται '1-1', αν περιοριστούμε στο διάστημα $[0, \pi]$ μπορούμε να πάρουμε την αντίστροφή της, δηλ.

$$\cos^{-1}: \ [-1,1] \to [0, \pi], \ y = \cos^{-1} x. \tag{3.16}$$

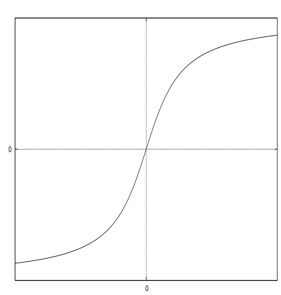
Η $y = \cos^{-1} x$ διαβάζεται «τόξο συνημιτόνου x» και στη βιβλιογραφία, αναγράφεται $y = \arccos x$. Ουσιαστικά, η συνάρτηση αυτή μας επιστρέφει το τόξο y, που βρίσκεται μεταξύ του 0 και του π και έχει συνημίτονο το x, π.χ. $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, αφού $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ επίσης $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$, αφού $\sin(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Τέλος, η συνάρτηση $y = \cos x$ γίνεται '1-1', αν περιοριστούμε στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και μπορούμε να πάρουμε την αντίστροφή της, δηλ.

$$\tan^{-1}: \ \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \ y = \tan^{-1} x. \tag{3.17}$$

Η $y = \tan^{-1} x$ διαβάζεται «τόξο εφαπτομένης x» και στη βιβλιογραφία αναγράφεται $y = \arctan x$. Ουσιαστικά, η συνάρτηση αυτή μας επιστρέφει το τόξο y, που βρίσκεται μεταξύ του $-\frac{\pi}{2}$ και του $\frac{\pi}{2}$ και έχει εφαπτομένη το x, π.χ. $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, αφού $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, επίσης $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{\pi}{6}$, αφού $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{6}$. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Παράδειγμα 3.9 *Να υπολογιστεί η παράσταση* $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{2}{3}\right)$, *αν τα τόξα* $\arcsin\frac{1}{3}$ *και* $\arccos\frac{2}{3}$ *ανήκουν στο πρώτο τεταρτημόριο.*

Λύση Θέτουμε $\arcsin\frac{1}{3}=a$ και $\arccos\frac{2}{3}=b$, οπότε $\sin a=\frac{1}{3}$ και $\cos b=\frac{2}{3}$, έτσι έχουμε

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\sqrt{1-\cos^2 b}\sqrt{1-\sin^2 a}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\sqrt{\frac{5}{9}}\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2+\sqrt{40}}{9}$$

Παράδειγμα 3.10 *Να λυθεί η εξίσωση* $\arcsin\frac{x}{2}+\arccos x=\frac{5\pi}{6}$, *αν τα τόξα* $\arccos x$ *και* $\arcsin\frac{x}{2}$ *ανήκουν στο* $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Λύση Θέτουμε $\arcsin\frac{x}{2}=a$, οπότε $\sin a=\frac{x}{2}$ και $\arccos x=b$, οπότε $\cos b=x$, έτσι έχουμε

$$a+b=\frac{5\pi}{6}\Rightarrow\sin(a+b)=\sin\frac{5\pi}{6}\Rightarrow\sin a\cos b+\sin b\cos a=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{x}{2}x+\sqrt{1-\cos^2 b}\sqrt{1-\sin^2 a}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x^2}{2}+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\cdots x^2=1\Rightarrow x=\pm1,$$

Όμως η $x=-1$ απορρίπτεται, διότι δεν πληροί την ισότητα της άσκησης.

3.6.6 Υπερβολικές συναρτήσεις

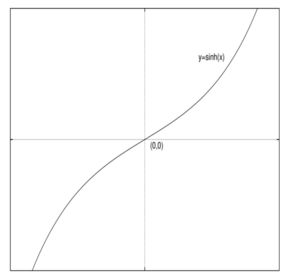
Το υπερβολικό ημίτονο του x ορίζεται $\forall x\in\mathbb{R}$ με τον τύπο $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Το υπερβολικό συνημίτονο του x ορίζεται $\forall x\in\mathbb{R}$ με τον τύπο $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Η υπερβολική εφαπτομένη του x ορίζεται $\forall x\in\mathbb{R}$ με τον τύπο $\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. Ένα πλήθος ιδιοτήτων, που μοιάζουν με εκείνες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, ισχύουν και εύκολα αποδεικνύονται, π.χ.

- $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh y \sinh x$
- $\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$
- $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$
- $\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$

Ορίζεται, λοιπόν, η συνάρτηση του υπερβολικού ημιτόνου

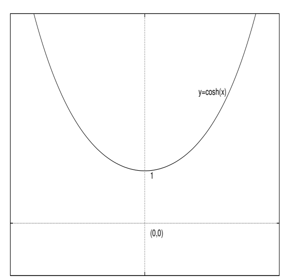
$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{3.18}$$



Η συνάρτηση του υπερβολικού ημιτόνου είναι περιττή, αφού $\sinh(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = -\sinh x$, με κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Αφού $e^x > 1 > e^{-x}$ για $x > 0$, έπεται ότι $\sinh x > 0$ για $x > 0$ και επομένως $\sinh x < 0$ για $x < 0$. Η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα, αφού για $x_1 < x_2$ ισχύει $\sinh x_1 - \sinh x_2 = \sinh x_1 + \sinh(-x_2) = 2 \sinh \frac{x_1 - x_2}{2} \cosh \frac{x_1 + x_2}{2} < 0$.
Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ως γνησίως αύξουσα συνάρτηση είναι '1-1' και επομένως έχει αντίστροφη, της οποίας η εύρεση αφήνεται ως άσκηση.

Η συνάρτηση του υπερβολικού συνημιτόνου είναι η

$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{3.19}$$

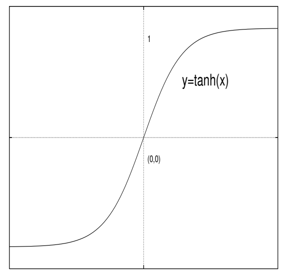


Η συνάρτηση του υπερβολικού συνημιτόνου είναι άρτια, αφού $\cosh(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \cosh x$, με άξονα συμμετρίας τον κατακόρυφο. Αφού $e^x + e^{-x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι $\cosh x > 0$ για όλα τα x. Για τη συνάρτηση αυτή ισχύει $\cosh x_1 - \cosh x_2 = 2 \sinh \frac{x_1 - x_2}{2} \sinh \frac{x_1 + x_2}{2}$, το οποίο είναι αρνητικό (< 0) για $x_1 < x_2$ και x_1, x_2 θετικά και θετικό (> 0) για x_1, x_2 αρνητικά. Έτσι η συνάρτηση είναι φθίνουσα $\forall x < 0$ και αύξουσα $\forall x > 0$.
Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η συνάρτηση δεν είναι

'1-1' (γιατί;) και επομένως δεν έχει αντίστροφη, κατάλληλος όμως περιορισμός αυτής μας δίνει αντίστροφη, της οποίας η μελέτη αφήνεται ως άσκηση.

Η συνάρτηση της υπερβολικής εφαπτομένης είναι η

$$\cosh : \mathbb{R} \to (-1,1),\ \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \tag{3.20}$$



Η συνάρτηση της υπερβολικής εφαπτομένης είναι περιττή, αφού $\tanh(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}} = -\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = -\tanh x$, με κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Αφού $e^x + e^{-x} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η $\tanh x$ συμπεριφέρεται όπως η $\sinh x$, δηλ. $\tanh x > 0,\ \forall x > 0$ και $\tanh x < 0,\ \forall x < 0$. Για τη συνάρτηση αυτή με $x_1 < x_2$, ισχύει $\tanh(x_1 - x_2) = \frac{\tanh x_1 - \tanh x_2}{1 - \tanh x_1 \cdot \tanh x_2}$, το οποίο συνεπάγεται (γιατί;) ότι η συνάρτηση είναι αύξουσα $\forall x \in \mathbb{R}$. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η συνάρτηση είναι '1-1' (γιατί;) και επομένως έχει αντίστροφη, της οποίας η μελέτη αφήνεται ως άσκηση.

3.7 Άλλες καμπύλες

Είναι γνωστό ότι τα σημεία του επιπέδου, που οι συντεταγμένες τους πληρούν την εξίσωση $f(x,y) = 0$, είναι τα σημεία ενός γεωμετρικού τόπου και βρίσκονται γενικά σε μια γραμμή. Ήδη έχουμε δει την ευθεία, τα σημεία της οποίας πληρούν την εξίσωση (3.4).

3.7.1 Ο κύκλος

Το σύνολο των σημείων του επιπέδου που απέχουν σταθερή απόσταση από σταθερό σημείο είναι τα σημεία ενός κύκλου. Έστω λοιπόν $K(a,b)$ το σταθερό σημείο του επιπέδου και $M(x,y)$ το τυχαίο σημείο αυτού, του οποίου η απόσταση από το σημείο $K(a,b)$ είναι σταθερή και ίση με r. Τότε ισχύει

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \tag{3.21}$$

η οποία είναι και η εξίσωσή του. Η καμπύλη της εξίσωσης (3.21) προφανώς δεν είναι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης, ωστόσο παίρνουμε από αυτή, με απλές πράξεις, τις επόμενες δυο σχέσεις

$$y = b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2}, \quad y = b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}, \tag{3.22}$$

κάθε μία από τις οποίες είναι συνάρτηση και η γραφική παράσταση, της μεν πρώτης είναι το ημικύκλιο του κύκλου, που βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = b$, της δε δεύτερης κάτω.

3.7.2 Η παραβολή

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν εξ' ίσου από ένα σταθερό σημείο $P(p, 0)$ και μια σταθερή ευθεία, την $x = -p$, ονομάζεται παραβολή. Έστω $M(x, y)$ ένα τυχαίο σημείο του τόπου, τότε θα ισχύει

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p| \Leftrightarrow (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \Leftrightarrow y^2 = 4px \tag{3.23}$$

Η καμπύλη της εξίσωσης (3.23) είναι φανερό ότι δεν είναι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης, ωστόσο παίρνουμε από αυτή, με απλές πράξεις, τις επόμενες δυο σχέσεις

$$y = +\sqrt{2px}, \quad y = -\sqrt{2px}, \tag{3.24}$$

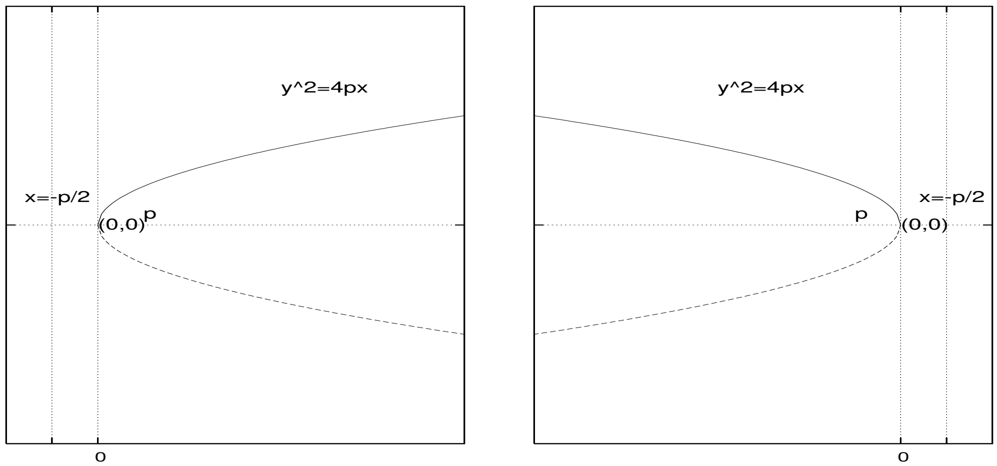
οι οποίες είναι συναρτήσεις και η γραφική παράσταση της μεν πρώτης είναι ο κλάδος που βρίσκεται πάνω από τον οριζόντιο άξονα, της δε δεύτερης κάτω. Όταν το p είναι θετικό, η παραβολή είναι στραμμένη προς τα δεξιά ενώ, όταν το p είναι αρνητικό, η παραβολή είναι στραμμένη προς τα αριστερά. Φυσικά, εναλλάσσοντας τα x και y παίρνουμε τη γνωστή μας παραβολή ($x^2 = 4py$) από την παράγραφο (3.4.1).

3.7.3 Η Έλλειψη

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που το άθροισμα των αποστάσεων από δυο σταθερά σημεία $P_1(-c, 0)$ και $P_2(c, 0)$ είναι σταθερό, ονομάζεται έλλειψη. Έστω $M(x, y)$ ένα τυχαίο σημείο του τόπου και $2a$ ($a > c > 0$) η σταθερή απόσταση, τότε θα ισχύει

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx \Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Leftrightarrow$$



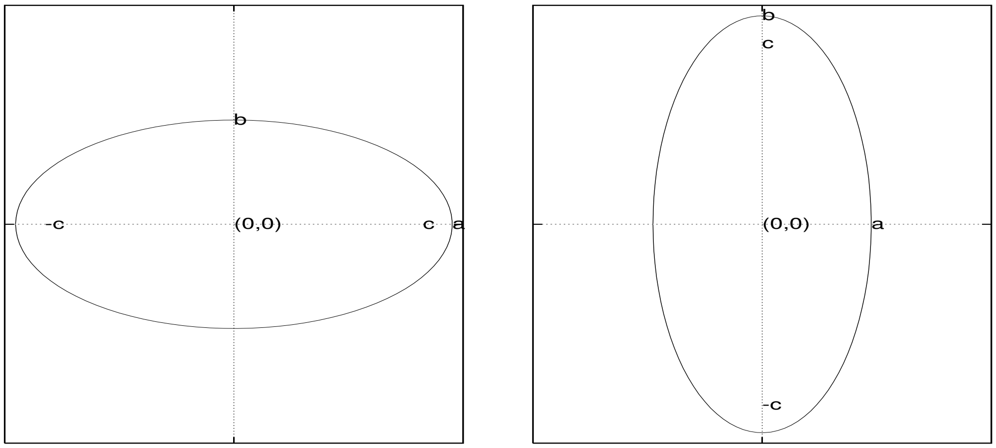
Σχήμα 3.16: Η απεικόνιση $f : A \rightarrow B,\ y^2 = 4px$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (b^2 = a^2 - c^2) \tag{3.25}$$

Είναι φανερό ότι $a > b$. Η καμπύλη της εξίσωσης (3.25) πάλι δεν είναι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης, ωστόσο παίρνουμε από αυτή, με απλές πράξεις, τις επόμενες δυο σχέσεις

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \tag{3.26}$$

οι οποίες είναι συναρτήσεις και η γραφική παράσταση της μεν πρώτης είναι ο κλάδος που βρίσκεται πάνω από τον οριζόντιο άξονα, της δε δεύτερης κάτω. Επίσης ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που το άθροισμα των αποστάσεων από τα σταθερά σημεία $P_1(0, -c)$ και $P_2(0, c)$ είναι σταθερό και ίσο με $2b$ είναι η έλλειψη που έχει τις εστίες της στον κατακόρυφο άξονα και τον ίδιο τύπο με $a^2 = b^2 - c^2$. Προφανώς τώρα $b > a$. Στο Σχήμα 3.17 παρουσιάζονται οι δυο ελλείψεις. Με $a = b$ η έλλειψη έχει τις εστίες της στην αρχή των αξόνων και εκφυλίζεται σε κύκλο ακτίνας a.



Σχήμα 3.17: Η απεικόνιση της έλλειψης.

3.7.4 Η Υπερβολή

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που η διαφορά των αποστάσεων από δυο σταθερά σημεία $P_1(-c,0)$ και $P_2(c,0)$ είναι σταθερή, ονομάζεται υπερβολή. Έστω $M(x,y)$ ένα τυχαίο σημείο του τόπου και $2a$ $(c>a)$ η σταθερή απόσταση, τότε θα ισχύει

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

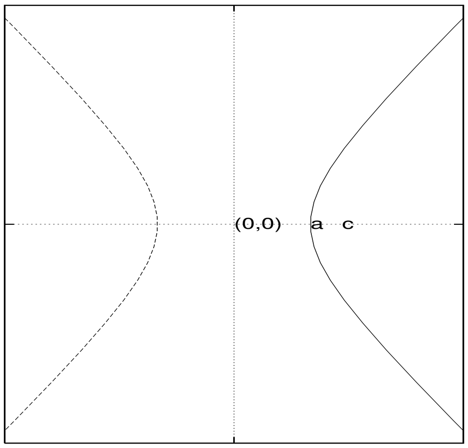
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2 \Leftrightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2) \Leftrightarrow$$

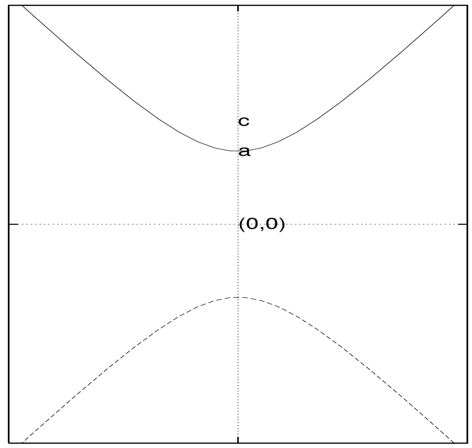
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{(c^2-a^2)}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad (b^2=a^2-c^2) \tag{3.27}$$

Ούτε η καμπύλη της εξίσωσης (3.27) είναι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης, ωστόσο παίρνουμε από αυτή, με απλές πράξεις, τις επόμενες δυο σχέσεις

$$y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \quad y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \tag{3.28}$$

οι οποίες είναι συναρτήσεις και η γραφική παράσταση της μεν πρώτης είναι ο κλάδος που βρίσκεται πάνω από τον οριζόντιο άξονα, της δε δεύτερης κάτω. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που η διαφορά των αποστάσεων από δυο





Σχήμα 3.18: Η απεικόνιση της υπερβολής.

σταθερά σημεία $P_1(0,-c)$ και $P_2(0,c)$ είναι σταθερή και ίση με $2b$ είναι επίσης μια υπερβολή με τύπο $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ ($a^2=b^2-c^2$). Προφανώς τώρα $b>a$. Στο Σχήμα 3.18 παρουσιάζονται οι δυο υπερβολές. Με $a=b$ η υπερβολή λέμε ότι είναι μια ισοσκελής υπερβολή.

Στην παράγραφο (3.4.2) είδαμε τη συνάρτηση $y=\frac{a}{x}\Leftrightarrow xy=a$. Αν στρέψουμε τους άξονες του επιπέδου στο οποίο την έχουμε παραστήσει γραφικά κατά γωνία 45^o, αποδεικνύεται ότι οι καινούργιες συντεταγμένες (X,Y) συνδέονται με τις παλιές (x,y) με τους τύπους

$$\begin{aligned} x &= \cos\frac{\pi}{4}X+\sin\frac{\pi}{4}Y \\ y &= \sin\frac{\pi}{4}X-\cos\frac{\pi}{4}Y \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα με τους

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}X+\frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}X-\frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{aligned}$$

οπότε προκύπτει ότι ο τύπος αυτής της καμπύλης μπορεί να έχει τη μορφή

$$xy=a\Leftrightarrow\frac{X^2}{2}-\frac{Y^2}{2}=a\Leftrightarrow\frac{X^2}{(\sqrt{2a})^2}-\frac{Y^2}{(\sqrt{2a})^2}=1$$

δηλ. μιας ισοσκελούς υπερβολής, απ' όπου παίρνει και το όνομά της.

3.7.5 Παραμετρικές εξισώσεις καμπύλων

Είδαμε μέχρι εδώ τις καμπύλες να περιγράφονται από εξισώσεις της μορφής $f(x,y)=0$. Τέτοιες εξισώσεις λέγονται αναλυτικές εξισώσεις της καμπύλης. Ωστόσο, πάρα πολλές φορές οι καμπύλες περιγράφονται καλύτερα ή μάλλον η μελέτη τους είναι ευκολότερη όταν αυτές περιγραφούν με διαφορετικό τρόπο. Μια άλλη μορφή εξισώσεων, με την οποία μπορούμε να περιγράψουμε μια καμπύλη, είναι οι παραμετρικές εξισώσεις. Αυτές έχουν τη μορφή

$$x = x(t) \quad \text{και} \quad y = y(t), \quad t \in \Delta, \tag{3.29}$$

όπου Δ ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών, στο οποίο παίρνει τιμές η παράμετρος t.

Από ένα ζευγάρι παραμετρικών εξισώσεων μπορούμε να πάρουμε την αναλυτική μορφή της καμπύλης, εφόσον αυτό είναι δυνατό, απαλείφοντας την παράμετρο t. Για παράδειγμα, οι συντεταγμένες του **κύκλου** (O,r) μπορούν να εκφραστούν μέσα από τις

$$x = r\cos\theta \quad \text{και} \quad y = r\sin\theta, \quad \theta \in [0,2\pi), \tag{3.30}$$

όπου r είναι η ακτίνα του κύκλου και θ η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα OM με τον οριζόντιο ημιάξονα. Πράγματι, υψώνοντας τις δυο προηγούμενες στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει η γνωστή εξίσωση του κύκλου. Εκείνο που θα πρέπει να τονιστεί εδώ είναι ότι ο τρόπος που εκφράζεται μια καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις δεν είναι μονόδρομος. Έτσι, ο κύκλος, που εκφράζεται με τις (3.30), μπορεί να εκφραστεί και με τις εξής

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{και} \quad y = \frac{2t}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

αφού πάλι υψώνοντας τις δυο προηγούμενες στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει η γνωστή εξίσωση του κύκλου.

Οι συντεταγμένες της **έλλειψης** (O,a,b) μπορούν να εκφραστούν μέσα από τις

$$x = a\sin\theta \quad \text{και} \quad y = b\cos\theta, \quad \theta \in [0,2\pi), \tag{3.31}$$

όπου a και b είναι τα σημεία τομής της έλλειψης με τον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα αντίστοιχα και θ η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα OM με τον οριζόντιο άξονα. Πράγματι, διαιρώντας τις δυο εξισώσεις της (3.31) με a και b αντίστοιχα, υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει η γνωστή εξίσωση της έλλειψης. Κι εδώ η έλλειψη μπορεί να εκφραστεί και με τις εξής εξισώσεις

$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{και} \quad y = b\frac{2t}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

αφού πάλι με την προηγούμενη διαδικασία προκύπτει η γνωστή εξίσωση αυτής.

Οι συντεταγμένες της **υπερβολής** (O, a, b) μπορούν να εκφραστούν μέσα από τις

$$x = \pm a \cosh t \quad \text{και} \quad y = b \sinh t, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.32}$$

όπου a και b είναι οι σταθερές της υπερβολής και t ένας πραγματικός αριθμός. Πράγματι, διαιρώντας τις δυο εξισώσεις της (3.32) με a και b αντίστοιχα, υψώνοντας στο τετράγωνο και αφαιρώντας προκύπτει η γνωστή εξίσωση της υπερβολής. Κι εδώ η υπερβολή μπορεί να εκφραστεί και με τις εξής

$$x = a\frac{t^2+1}{2t} \quad \text{και} \quad y = b\frac{t^2-1}{2t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

αφού πάλι με την προηγούμενη διαδικασία προκύπτει η γνωστή εξίσωση αυτής. Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι η έκφρασης της υπερβολής μέσα από τις εξισώσεις (3.32) χάρισε το όνομα στους υπερβολικούς τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Τέλος, οι συντεταγμένες της **παραβολής** (O, p) μπορούν να εκφραστούν μέσα από τις

$$x = \pm 2pt^2 \quad \text{και} \quad y = 2pt, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.33}$$

όπου p είναι η σταθερά της παραβολής και t ένας πραγματικός αριθμός. Πράγματι, απαλείφοντας το t στις δυο εξισώσεις της (3.32) προκύπτει η γνωστή εξίσωση της υπερβολής. Πριν κλείσουμε την παρούσα παράγραφο θα πρέπει να πούμε ότι για ένα πλήθος άλλων καμπύλων ο φοιτητής θα πρέπει να ανατρέξει στη βιβλιογραφία, αφού μεγαλύτερη έκταση του παρόντος ξεφεύγει των σκοπών του.

3.8 Όριο συναρτήσεων

Η έννοια του ορίου είναι ήδη γνωστή από τη μελέτη των ακολουθιών και των σειρών. Εκεί μελετήσαμε το όριο μιας ακολουθίας, καθώς το n έτεινε στο άπειρο. Εδώ θα μελετήσουμε το όριο των συναρτήσεων, το οποίο, γενικά, θα διαφοροποιείται ως προς το γεγονός ότι το πεδίο ορισμού πλέον είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή διαστήματα αυτού. Όμως, πριν αρχίσουμε να ασχολούμαστε με τις έννοιες αυτές, θα δώσουμε μερικούς απαραίτητους ορισμούς.

Ορισμός 3.8.1*Ονομάζουμε περιοχή του σημείου ξ κάθε διάστημα της μορφής $(a,\xi)\cup(\xi,b)\subseteqq\mathbb{R}$, όπου $a,b\in\mathbb{R}$.*

Αν η περιοχή του σημείου ξ είναι η $(\xi-\delta,\xi)\cup(\xi,\xi+\delta)$, όπου $\delta\in\mathbb{R}^+$, αυτή καλείται $\delta-$περιοχή του ξ. Είναι φανερό ότι σ' αυτή την περίπτωση ισχύει ότι $0<|x-\xi|<\delta$. Η περιοχή $(\xi-\delta,\xi)$ λέγεται αριστερή περιοχή του ξ, ενώ η $(\xi,\xi+\delta)$ λέγεται δεξιά περιοχή του ξ. Ένα διάστημα της μορφής $(-\infty,a)$ καλείται περιοχή του $-\infty$, ενώ ένα διάστημα της μορφής (a,∞) καλείται περιοχή του ∞.

Ορισμός 3.8.2*Ένα σημείο ξ καλείται σημείο συσσωρεύσεως του διαστήματος $\Delta\subseteqq\mathbb{R}$, αν κάθε δ-περιοχή του σημείου ξ περιέχει στοιχεία του διαστήματος Δ. Διαφορετικά, το σημείο καλείται μεμονωμένο σημείο.*

Από τον ορισμό καταλαβαίνει κανείς ότι κάθε σημείο ξ με $a<\xi<b$ ενός κλειστού, ανοικτού ή ημιάνοικτου διαστήματος των πραγματικών αριθμών είναι σημείο συσσωρεύσεως. Στα επόμενα και όσες φορές χρειάζεται κάποιο σημείο να είναι σημείο συσσωρεύσεως, θα θεωρείται ως τέτοιο, εκτός και αν αναφέρεται κατηγορηματικά ως μεμονωμένο.

3.8.1 Όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο x_0

Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $A(f)\subseteqq\mathbb{R}$ και x_0 ένα σημείο συσσωρεύσεως αυτού.

Ορισμός 3.8.3*Λέμε ότι το όριο μιας συνάρτησης $f(x)$ έχει όριο το $l\in\mathbb{R}$ καθώς το x τείνει στο x_0 και συμβολίζουμε με*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l,$$

όταν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει μια δ-περιοχή του σημείου x_0, που εξαρτάται από το ε, ώστε για κάθε σημείο της περιοχής αυτής να ισχύει $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Με συμβολισμούς ο παραπάνω ορισμός λέει

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{3.34}$$

Αποδεικνύεται, όπως και στα όρια των ακολουθιών, ότι το όριο της συνάρτησης $f(x)$, καθώς το x τείνει στο x_0, όταν υπάρχει, είναι μοναδικό.

Παράδειγμα 3.11Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1.$$

Λύση Έστω τυχαίο $\varepsilon > 0$ για το οποίο ισχύει $|f(x) - 1| < \varepsilon$. Θα δείξουμε ότι πράγματι υπάρχει κάποιο $\delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x \in A(f), |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

$$|f(x)-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x-3-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x-4| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αρκεί λοιπόν να πάρουμε ως $\delta(\varepsilon)$ το $\frac{\varepsilon}{2}$.

Ορισμός 3.8.4*Λέμε ότι το όριο μιας συνάρτησης $f(x)$ έχει όριο το ∞ $(-\infty)$, καθώς το x τείνει στο x_0 και συμβολίζουμε με*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \ (-\infty),$$

όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια δ-περιοχή του σημείου x_0, ώστε για κάθε σημείο της περιοχής αυτής να ισχύει $f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$ $(f(x) < -\frac{1}{\varepsilon})$.

Με συμβολισμούς ο παραπάνω ορισμός λέει

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \ (-\infty) \Leftrightarrow \\ &\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \ (f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}).\end{aligned} \tag{3.35}$$

Παράδειγμα 3.12Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{(x-2)^2}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \infty.$$

Λύση Έστω τυχαίο $\varepsilon > 0$ για το οποίο ισχύει $f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$. Θα δείξουμε ότι πράγματι υπάρχει κάποιο $\delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x \in A(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\},\ \ |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$.

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{2}{(x-2)^2} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow (x-2)^2 < 2\varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \sqrt{2\varepsilon}.$$

Αρκεί λοιπόν να πάρουμε ως $\delta(\varepsilon)$ το $\sqrt{2\varepsilon}$.

Όταν στον Ορισμό 3.8.3 αντικαταστήσουμε την έννοια της περιοχής με την έννοια της αριστερής ή δεξιάς περιοχής, παίρνουμε τον ορισμό της ένοιας του πλευρικού ορίου, αριστερού ή δεξιού. Έτσι

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 : 0 < x_0 - x < \delta_1(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon, \quad (3.36)$$
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2(\varepsilon) > 0 : 0 < x - x_0 < \delta_2(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon. \quad (3.37)$$

Αντίστοιχοι ορισμοί (πλευρικών ορίων) προκύπτουν από τον Ορισμό 3.8.4 και μένει στον αναγνώστη να τους δημιουργήσει ως άσκηση.

Πρόταση 3.8.5 *Αν x_0 ένα σημείο συσσωρεύσεως στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$, τότε*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Απόδειξη: Θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη, αφήνοντας την πλήρη (απόδειξη) ως άσκηση. Αν υποθέσουμε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, τότε ως $\delta_1(\varepsilon)$ και $\delta_2(\varepsilon)$ για τα πλευρικά όρια μπορούμε να πάρουμε το ίδιο το $\delta(\varepsilon)$.
Αν υποθέσουμε ότι $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$, τότε ως $\delta(\varepsilon)$, για το όριο, μπορούμε να πάρουμε το $\min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$. □

3.8.2 Όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο ∞

Όταν το ∞ είναι σημείο συσσωρεύσεως, τότε ορίζεται το όριο της συνάρτησης $f(x)$ καθώς το x τείνει στο ∞, ως εξής:

Ορισμός 3.8.6 *Λέμε ότι το όριο της $f(x)$ είναι το $l \in \mathbb{R}$ καθώς το x τείνει στο ∞, και συμβολίζουμε*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l,$$

όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M(\varepsilon) > 0$, ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $f(x)$ με $x > M(\varepsilon)$ να ισχύει $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Με συμβολισμούς ο Ορισμός 3.8.6 είναι

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > 0 : \forall x > M(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{3.38}$$

Στη συνέχεια δίνουμε και τους υπόλοιπους ορισμούς με συμβολισμούς.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) = l &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > 0 : \forall x < -M(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.\\
\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > 0 : \forall x > M(N) \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.\\
\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > 0 : \forall x < -M(N) \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.\\
\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > 0 : \forall x > M(N) \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}.\\
\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > 0 : \forall x < -M(N) \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.13 *Δείξτε ότι, αν $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$,*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2.$$

Λύση Έστω τυχαίο $\varepsilon > 0$ για το οποίο ισχύει $|f(x) - 2| < \varepsilon$ και για θεωρώντας ότι $x > 0$, αφού $x \to +\infty$, θα δείξουμε ότι πράγματι υπάρχει κάποιο $M(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x \in A(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad x > M(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$.

$$|f(x) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{2x-1}{x+1} - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{2x-1-2x-2}{x+1}| < e \Leftrightarrow$$

$$|\frac{-3}{x+1}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{x+1} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{3}{\varepsilon} - 1.$$

Αρκεί λοιπόν να πάρουμε ως $M(\varepsilon)$ το $\frac{3-\varepsilon}{\varepsilon}$.

Παράδειγμα 3.14 *Δείξτε ότι, αν* $f(x) = \frac{1}{x}$

$$a)\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad b)\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty, \quad c)\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$$

Λύση $a)$ Έστω τυχαίο $\varepsilon > 0$ για το οποίο ισχύει $|f(x)| < \varepsilon$. Θα δείξουμε ότι πράγματι υπάρχει κάποιο $M(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x \in A(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x > M(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$. Αφού $x \to \infty$, θεωρούμε ότι $x > 0$, οπότε

$$|f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Αρκεί λοιπόν να πάρουμε ως $M(\varepsilon)$ το $\frac{1}{\varepsilon}$.
$b)$ Έστω τυχαίο $\varepsilon > 0$ για το οποίο ισχύει $f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$. Θα δείξουμε ότι πράγματι υπάρχει κάποιο $\delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x \in A(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 < x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$.

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow 0 < x < \varepsilon.$$

Αρκεί λοιπόν να πάρουμε ως $\delta(\varepsilon)$ το ε. Το $c)$ αποδεικνύεται παρόμοια.

3.8.3 Θεωρήματα και ιδιότητες των ορίων

Στις προηγούμενες παραγράφους είδαμε τα όρια συναρτήσεων μέσα από τους ορισμούς. Η εύρεσή τους και η απόδειξή τους είναι μια διαδικασία δύσκολη και γι' αυτό έχει προταθεί μια σειρά κλασικών Θεωρημάτων και ιδιοτήτων που διευκολύνουν τη διαδικασία αυτή.

Πρόταση 3.8.7 *Αν η συνάρτηση* $f(x)$ *είναι φραγμένη σε μια περιοχή του* x_0 *και* $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, *τότε*

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = 0.$$

Απόδειξη: Αφού η $f(x)$ είναι φραγμένη σε μια περιοχή του x_0, τότε θα είναι και απολύτως φραγμένη, οπότε για κατάλληλη περιοχή θα ισχύει $|f(x)| < M$. Επίσης για κατάλληλη περιοχή (ποιά;) θα ισχύει $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$. Έτσι, τελικά υπάρχει περιοχή (ποιά;) που ισχύει $|f(x)g(x)| < \varepsilon$. □

Τα επόμενα Θεωρήματα που δίνονται χωρίς απόδειξη τα έχουμε δει και στις ακολουθίες. Είναι σημαντικά και μας επιτρέπουν να βγάζουμε συμπεράσματα για το όριο μιας συνάρτησης, μέσα από άλλες συναρτήσεις.

Θεώρημα 3.8.8*Έστω ότι* $\lim_{x\to x_0} f(x) = k$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$ *και* x_0 *σημείο συσσωρεύσεως στο κοινό πεδίο ορισμού τους, τότε και εφόσον οι πράξεις επιτρέπονται,*

$$\lim_{x\to x_0} (h(x) + g(x)) = k + l,$$
$$\lim_{x\to x_0} (h(x) - g(x)) = k - l,$$
$$\lim_{x\to x_0} (h(x) \cdot g(x)) = k, \cdot l$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{k}{l}, \quad l \neq 0.$$

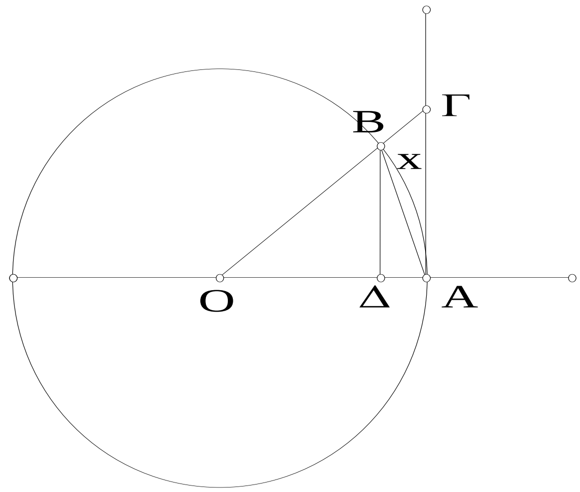
Παρατήρηση 3.8.1*Έχοντας υπόψη ότι* $\lim_{x\to x_0} k = k$ *και* $\lim_{x\to x_0} x = x_0$ *(αποδεικνύονται πολύ εύκολα) και με βάση το Θεώρημα 3.8.8 μπορούμε να βρούμε τα όρια πολυωνυμικών αλλά και ρητών συναρτήσεων. Εξάλλου σχετικές μεθοδολογίες είναι γνωστές από το Λύκειο.*

Θεώρημα 3.8.9*Έστω δυο συναρτήσεις* $f(x)$ *και* $g(x)$ *για τις οποίες ορίζεται η σύνθεση* $(f \circ g)(x)$· *αν για τις δυο συναρτήσεις ισχύει ότι* $f(x) \neq \xi$ *σε μια περιοχή του* x_0, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \xi$ *και* $\lim_{x\to \xi} g(x) = l$, *τότε*

$$\lim_{x\to x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = l. \tag{3.39}$$

Θεώρημα 3.8.10*Έστω ότι* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, x_0 *σημείο συσσωρεύσεως για το κοινό πεδίο ορισμού τους και* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l = \lim_{x\to x_0} g(x)$, *τότε*

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = l.$$



Σχήμα 3.19: Σχετικά με το $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

Παράδειγμα 3.15 *Να δειχτούν οι επόμενες ισότητες:*

$$\begin{aligned}
&1)\ \lim_{x\to 0}\sin x = 0, \quad \lim_{x\to 0}\cos x = 1,\\
&2)\ \lim_{x\to x_0}\sin x = \sin x_0, \quad \lim_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0,\\
&3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = 1.
\end{aligned}$$

Λύση 1) Εύκολα διαπιστώνει κανείς (βλ. και Σχήμα 3.19) ότι $-|x| < \sin x < |x|$, οπότε από το Θεώρημα 3.8.10 προκύπτει $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$. Από τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ και το Θεώρημα 3.8.8 παίρνουμε $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$.
2) Από τις τριγωνομετρικές ταυτότητες αθροίσματος τόξων προκύπτει

$$\lim_{x\to x_0}\sin x = \lim_{h\to 0}\sin(x_0+h) = \lim_{h\to 0}(\sin x_0\cos h + \cos x_0 \sin h) = \sin x_0,$$
$$\lim_{x\to x_0}\cos x = \lim_{h\to 0}\cos(x_0+h) = \lim_{h\to 0}(\cos x_0\cos h - \sin x_0 \sin h) = \cos x_0.$$

3) Για $x > 0$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.19 Εμβ(OAB) <Εμβ$(O.AxB)$ < Εμβ$(OA\Gamma)$, οπότε ισοδύναμα έχουμε $\frac{1}{2}R\sin x < \frac{1}{2}Rx < \frac{1}{2}R\tan x$, απλοποιώντα-ς, διαιρώντας με $\sin x$ και αντιστρέφοντας παίρνουμε $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ και από το

Θεώρημα 3.8.10 προκύπτει $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Για $x<0$, ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-|x|)}{-|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(|x|)}{-|x|}=\lim_{|x|\to 0}\frac{\sin(|x|)}{|x|}=1$$

Ως άσκηση να αποδειχτεί $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$.

Πρόταση 3.8.11 *Έστω δυο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ για τις οποίες ισχύει ότι $f(x)\geq g(x)$ για μια περιοχή του x_0 και επιπλέον υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to x_0}f(x)$ και $\lim_{x\to x_0}g(x)$, τότε*

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\geq\lim_{x\to x_0}g(x).$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{x\to x_0}f(x)=l_1$ και $\lim_{x\to x_0}g(x)=l_2$ και $l_1<l_2$, τότε ισχύει

$$\begin{aligned} l_2-l_1>\varepsilon>0 &\Rightarrow l_2-l_1+f(x)-g(x)>\varepsilon>0\Rightarrow\\ |l_2-l_1+f(x)-g(x)|>\varepsilon>0 &\Rightarrow |f(x)-l_1|+|g(x)-l_2|>\varepsilon>0 \end{aligned}\tag{3.40}$$

Επίσης υπάρχει μια κοινή περιοχή του x_0 (ποιά;) που θα ισχύει

$$|f(x)-l_1|<\frac{\varepsilon}{2}\text{ και }|g(x)-l_2|<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow|f(x)-l_1|+|g(x)-l_2|<\varepsilon,$$

το οποίο οδηγεί σε άτοπο. □

Όμως και από το όριο μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για τις συναρτήσεις. Έτσι, αν $\lim_{x\to x_0}f(x)=l>0$, από τον ορισμό του ορίου με $\varepsilon=l$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} &\exists\delta(l)>0:\forall x\in A_f,\ \text{ με }\ |x-x_0|<\delta(l)\Rightarrow|f(x)-l|<l\\ &\Rightarrow f(x)>0,\quad\forall x\in A_f,\ \text{ με }\ |x-x_0|<\delta(l), \end{aligned}$$

το οποίο μας δίνει την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.8.12 *Αν $\lim_{x\to x_0}f(x)=l>0$, τότε υπάρχει μια περιοχή του x_0, όπου η συνάρτηση $f(x)$ είναι θετική.*

Ένα σημαντικό Θεώρημα είναι το επόμενο. Οφείλεται στον Heine και συνδέει το όριο των συναρτήσεων με το όριο των ακολουθιών. Χρησιμοποιείται για να βρούμε το όριο μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο, αλλά και για να δείξουμε ότι κάποια συνάρτηση δεν έχει όριο σε κάποιο σημείο. Πριν όμως δώσουμε το Θεώρημα, ας δούμε τα επόμενα.
Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $A(f)$, και x_n μια ακολουθία αυτού ($x_n \in A(f)$). Η ακολουθία

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \ldots f(x_n)\ldots$$

λέγεται ακολουθία τιμών της συνάρτησης $f(x)$.

Θεώρημα 3.8.13 *Έστω ξ ένα σημείο συσσωρεύσεως στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης $f(x)$, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = l$, αν και μόνον αν για κάθε ακολουθία x_n του πεδίου ορισμού της $f(x)$, με $\lim x_n = \xi$, ισχύει $\lim f(x_n) = l$.*

Παράδειγμα 3.16 *Δείξτε ότι τα παρακάτω όρια δεν υπάρχουν·*

$$1)\ \lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}, \quad 2)\ \lim_{x\to 0^+} \cos\frac{1}{x}.$$

Λύση Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ και $y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$. Οι αντίστοιχες ακολουθίες τιμών είναι

$$\sin\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}} = \sin 2\pi n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\sin\frac{1}{\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}} = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Είναι φανερό ότι οι δυο ακολουθίες τιμών που δημιουργήσαμε δε συγκλίνουν στο ίδιο όριο. Συνεπώς η συνάρτηση δε συγκλίνει. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και το 2).

Παράδειγμα 3.17 *Δείξτε τα παρακάτω όρια:*

$$1)\ \lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}, \quad 2)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3.41}$$

Λύση Θα σκιαγραφήσουμε τη λύση στις δυο περιπτώσεις. Η ολοκλήρωση των αποδείξεων θα πρέπει να γίνει από τους αναγνώστες. 1) Αρχικά δείχνουμε ότι $\lim_{x\to 0} a^x = 1$. Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία $x_n \to 0^+$. Αφού $\lim x_n = 0$, θα ισχύει και $\frac{1}{x_n} \to \infty$, οπότε και $\left[\frac{1}{x_n}\right] \to \infty$. Έστω $m_n = \left[\frac{1}{x_n}\right]$, οπότε ισχύει $x_n \leq \frac{1}{m_n}$ με $1 < a^{x_n} \leq a^{\frac{1}{m_n}} = \sqrt[m_n]{a} \to 1$, αφού $\lim \sqrt[n]{a} = 1$. Εύκολα τώρα παίρνουμε ότι γενικά ισχύει $\lim_{x\to x_0}(a^x - a^{x_0}) = \lim_{x\to x_0} a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1) = 0$, οπότε $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.
2) Με λίγη προσοχή παραπάνω μπορούμε να δούμε και το άλλο όριο. Τώρα θα θεωρήσουμε τυχαία ακολουθία $x_n \to \infty$. Γι' αυτήν ισχύει $[x_n] \leq x_n < [x_n] + 1$ ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{[x_n]+1} < \quad & 1 + \tfrac{1}{x_n} && \leq 1 + \frac{1}{[x_n]} \Leftrightarrow \\
\left(1 + \frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} < \quad & \left(1 + \tfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} && \leq \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1} \Leftrightarrow \\
\left(1 + \frac{1}{[x_n]+1}\right)^{-1}\left(1 + \frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1} < \quad & \left(1 + \tfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} && \leq \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}.
\end{aligned}$$

Από τα Θεωρήματα (3.8.10) και (3.8.13) συμπεραίνουμε ότι
$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

3.9 Συνέχεια συναρτήσεων

Η έννοια της συνέχειας είναι ίσως από τις πλέον σημαντικές, τόσο στο θεωρητικό, όσο και στον πρακτικό τομέα. Ωστόσο είναι μάλλον παραμελημένη από τους μη μυημένους χρήστες των μαθηματικών. Είναι στενά συνδεδεμένη με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και επομένως με τη γεωμετρία και μεταφράζεται από πολλούς ως μονοκοντυλιά.

3.9.1 Ορισμοί και Ιδιότητες

Ορισμός 3.9.1*Μια συνάρτηση $f(x)$ λέμε ότι είναι συνεχής στο σημείο x_0, του πεδίου ορισμού της, αν*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Όπως φαίνεται από το ορισμό, για να μιλάμε για συνέχεια σ' ένα σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, πρέπει αφενός να ορίζεται η συνάρτηση στο συγκεκριμένο σημείο και αφετέρου να υπάρχει το όριο. Έτσι, εκ προοιμίου σε σημεία που δεν ορίζεται η συνάρτηση δεν μπορούμε να μιλάμε για συνέχεια. Επίσης δεν μπορούμε να μιλάμε για συνέχεια σε μεμονωμένα σημεία. Σε περιπτώσεις που είμαστε υποχρεωμένοι να παίρνουμε πλευρικά όρια, τότε μπορούμε να μιλάμε για πλευρική συνέχεια, όταν κάποιο από τα πλευρικά όρια ισούται με την τιμή της συνάρτησης.

Παρατήρηση 3.9.1*Πολλοί συγγραφείς δίνοντας έναν $\varepsilon - \delta$ ορισμό, καταλήγουν σε ενδιαφέροντα αποτελέσματα ([2]), εμείς όμως θα συνεχίσουμε τη μελέτη μας εμμένοντας στον Ορισμό 3.9.1.*

Παράδειγμα 3.18*Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια στο σημείο $x_0 = 0$ η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Λύση Η συνάρτησή μας ορίζεται στο $x_0 = 0$ και μάλιστα $f(0) = \frac{1}{2}$. Επίσης

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{1}{(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$$

και αφού $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Ορισμός 3.9.2*Μια συνάρτηση $f(x)$ λέμε ότι είναι συνεχής συνάρτηση, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.*

Με τον παραπάνω ορισμό γενικεύουμε τον Ορισμό 3.9.1 και επομένως δίνουμε κάτι πολύ πιο ισχυρό ως εργαλείο μελέτης. Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι

Θεώρημα 3.9.3*Αν δυο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους, που ορίζονται οι επόμενες πράξεις, τότε είναι συνεχείς και αυτές, δηλ. είναι συνεχείς οι*

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x)\cdot g(x), \quad \forall\, x \in\ A_f \cap A_g,$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}, \quad \forall\, x \in\ A_f \cap A_g,\ \mu\epsilon\ g(x) \neq 0,$$
$$(f\circ g)(x) = f(g(x)), \quad \forall\, x \in\ A_{f\circ g}.$$

Η παρατήρηση (3.8.1) και τα παραδείγματα (3.15) (3.17) δείχνουν ότι οι βασικές απλές συναρτήσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις, οπότε, μαζί με το Θεώρημα 3.9.3, μπορούμε να συμπεράνουμε για τη συνέχεια των πολυωνυμικών, των ρητών, εκτός των σημείων που μηδενίζεται ο παρονομαστής τους, και για ένα πλήθος άλλων περισσότερο πολύπλοκων συναρτήσεων.

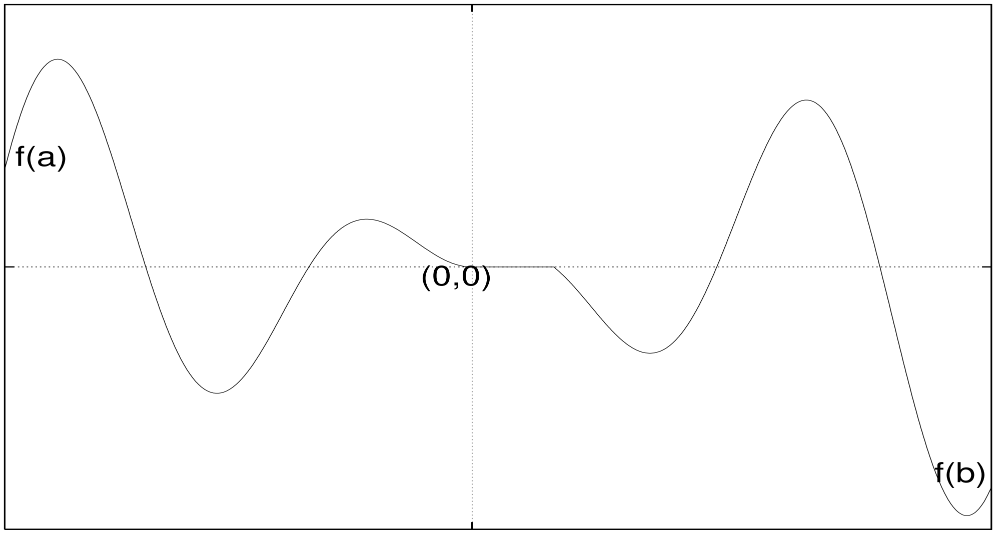
Θεώρημα 3.9.4*Αν η συνάρτηση $f(x)$ με $A_f = [a, b]$, είναι συνεχής και μονότονη, τότε και η αντίστροφη αυτής υπάρχει και είναι συνεχής και μονότονη.*

Απόδειξη: Η ύπαρξη της αντίστροφης και της μονοτονίας προκύπτει από την παρατήρηση (3.3.4).
Αφού η $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0, τότε για κάθε ακολουθία x_n, με $\lim x_n = x_0$ θα ισχύει $\lim f(x_n) = f(x_0)$. Έστω τώρα ότι η $f^{-1}(y)$ δεν είναι συνεχής στο σημείο $f(x_0)$. Ας είναι y_n μια ακολουθία του $f(A_f)$ με $\lim y_n = f(x_0)$, της οποίας η ακολουθία τιμών $f^{-1}(y_n)$ δε συγκλίνει στο $f^{-1}(f(x_0) = x_0$, τότε, επειδή οι τιμές $f^{-1}(y_n)$ ανήκουν στο $[a, b]$, αυτή θα είναι φραγμένη. Από το Θεώρημα 2.2.13 υπάρχει μια υπακολουθία αυτής, έστω η $f^{-1}(y_n^*) = x_n^*$, η οποία συγκλίνει σε κάποιο σημείο, π.χ. το $x' \neq x_0$.
Αντίστροφα τώρα, $\lim x_n^* = x'$, αφού η $f(x)$ είναι συνεχής θα έχουμε $\lim f(x_n^*) = \lim y_n^* = f(x')$, επίσης, αφού η y_n^* είναι υπακολουθία της y_n θα ισχύει $\lim y_n^* = f(x_0)$ άτοπο.

3.9.2 Σημαντικά θεωρήματα της συνέχειας

Σημαντικά θεωρήματα σχετικά με τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης ισχύουν, όταν αυτή είναι συνεχής σε κάποιο σημείο ή κάποιο διάστημα. Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο x_0 και επιπλέον ότι $f(x_0) > 0$, τότε, εφαρμόζοντας τα συμπεράσματα της Πρότασης 3.8.12 έχουμε το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 3.9.5*Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο x_0 και επιπλέον $f(x_0) > 0$, τότε υπάρχει μια περιοχή του x_0 όπου η συνάρτηση $f(x)$ είναι θετική.*



Σχήμα 3.20: Το Θεώρημα του Bolzano.

Τα δυο επόμενα Θεωρήματα, εκ των οποίων το ένα είναι το Θεώρημα του Bolzano, είναι ισως από τα πλέον σημαντικά Θεωρήματα και γνωστά από το Λύκειο. Για την απόδειξή τους χρειαζόμαστε ύλη που ξεφεύγει από τους σκοπούς του παρόντος, όσοι, όμως, επιθυμούν να δουν την απόδειξη, ας καταφύγουν στα ([7],[2]).

Θεώρημα 3.9.6(*Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής*). *Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε η $f(x)$ είναι φραγμένη στο $[a, b]$ και επιπλέον παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σ' αυτό.*

Θεώρημα 3.9.7(*Θεώρημα του Bolzano*). *Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και επιπλέον ισχύει $f(a)f(b) < 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$, ώστε $f(x_0) = 0$.*

Παρατηρήστε ότι τελικά η συνάρτηση πρέπει να είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και να είναι συνεχής παντού. Η μοναδικότητα του σημείου $x_0 \in (a, b)$ δεν εξασφαλίζεται από το Θεώρημα. Για παράδειγμα στο Σχήμα 3.20 υπάρχουν περισσότερα σημεία που μηδενίζουν τη συνάρτηση και επιπλέον η συνάρτηση

παίρνει την τιμή μηδέν για ολόκληρο διάστημα.
Θεωρώντας ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ και επιπλέον ισχύει $f(a) < f(b)$, τότε για κάθε $c \in (f(a), f(b))$ μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - c$, η οποία πληροί το Θεώρημα του Bolzano και επομένως υπάρχει $x_0 \in (a,b)$, ώστε $f(x_0) = c$. Έτσι μπορούμε να αποδείξουμε το επόμενο Θεώρημα

Θεώρημα 3.9.8*(Θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών). Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ και παίρνει δυο τιμές c και d στο $\mathbb{R}$, τότε παίρνει κάθε τιμή στο διάστημα $[c,d]$.*

Σημαντικά Θεωρήματα της άλγεβρας μπορούν πλέον εύκολα να αποδειχτούν όπως φαίνεται στις ασκήσεις (3.12, 3.13), και μια σπουδαία αριθμητική μέθοδος εύρεσης της ρίζας προτείνεται στην επόμενη παράγραφο.

3.9.3 Η μέθοδος της διχοτόμησης

Η πλέον απλή μέθοδος εύρεσης ρίζας εξίσωσης είναι η μέθοδος της διχοτόμησης. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στο Θεώρημα 3.9.7 που προαναφέραμε, γι' αυτό και πολλές φορές αναφέρεται ως μέθοδος του Bolzano. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f(x),\ x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$, με $f(a)f(b) < 0$. Από το Θεώρημα 3.9.7 θα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα $\xi \in (a,b)$. Για την περιγραφή της μεθόδου θα υποθέσουμε επιπλέον ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο διάστημα αυτό. Σε αντίθετη περίπτωση, χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή για την εφαρμογή της μεθόδου. Εκλέγουμε το σημείο $x_0 = \frac{a+b}{2}$ και ελέγχουμε την τιμή της $f(x_0)$. Δυο περιπτώσεις υπάρχουν: α)$f(x_0) = 0$, στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα έχει λυθεί, αφού βρήκαμε την ρίζα και β)$f(x_0) \neq 0$, στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι η τιμή x_0 είναι μια προσέγγιση της ρίζας μας. Εάν βρισκόμαστε στη δεύτερη περίπτωση, τότε το σημείο x_0 με ένα από τα άκρα του προηγούμενου διαστήματος ορίζουν ένα καινούργιο διάστημα, στο οποίο βρίσκεται η ρίζα μας. Υποθέτοντας ότι το άκρο αυτό είναι το a και θέτοντας $a_1 = a$ και $b_1 = x_0$, ορίζεται το διάστημα $[a_1, b_1] \subset [a_0 = a, b_0 = b]$, στο οποίο βρίσκεται η ρίζα της εξίσωσής μας. Εκλέγουμε τώρα το σημείο $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ και εφαρμόζουμε την προηγούμενη διαδικασία, οπότε ορίζεται με αυτόν τον τρόπο ένα καινούργιο διάστημα $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, στο οποίο βρίσκεται η ρίζα ξ και ένα καινούργιο $x_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$ κ.ο.κ.
Η παραπάνω διαδικασία ορίζει μια ακολουθία x_n, η οποία συγκλίνει στη ρίζα ξ.

Πράγματι, επειδή ισχύει

$$\begin{aligned} |x_n - \xi| &\leq \frac{1}{2}|a_n - b_n| \\ &= \frac{1}{2^2}|a_{n-1} - b_{n-1}| \\ &= \frac{1}{2^3}|a_{n-2} - b_{n-2}| \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}|a - b| \end{aligned} \tag{3.42}$$

και $\lim \frac{1}{2^n} = 0$, συμπεραίνουμε ότι $\lim x_n = \xi$.

Παράδειγμα 3.19 *Να γίνουν πέντε επαναλήψεις της μεθόδου της διχοτόμησης για την εύρεση της $\sqrt{5}$.*

Λύση Η $\sqrt{5}$ είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x^2 - 5 = 0$. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι $f(2.2) = 4.84 - 5 = -0.16 < 0$, ενώ $f(2.5) = 6.25 - 5 = 1.25 > 0$. Επομένως, η ρίζα μας βρίσκεται στο διάστημα $[a, b] = [2.2, 2.5]$. Για τη μεθόδευση της διαδικασίας με χαρτί και μολύβι προτείνουμε τον παρακάτω πίνακα. Στην πρώτη στήλη γράφουμε τα βήματα, στη δεύτερη και τρίτη τις τιμές των a_i και b_i, τέλος στην τέταρτη και πέμπτη τις τιμές των x_i και $f(x_i)$ αντίστοιχα.

βήμα	$a_i(-)$	$b_i(+)$	$x_i = \frac{a_i+b_i}{2}$	$f(x_i)$
0	2.2	2.5	2.35	0.5225
1	2.2	2.35	2.275	0.175625
2	2.2	2.275	2.2375	0.00640625
3	2.2	2.2375	2.21875	-0.077148438
4	2.21875	2.2375	2.228125	-0.035458984
5	2.228125	2.2375	2.2328125	-0.01454834

Θεωρώντας σαν προσεγγιστική τιμή της ρίζας μας την τελευταία τιμή ($\xi^* = x_5$), θα έχουμε $|\xi^* - \xi| < 0.5 \cdot |a_5 - b_5| = \cdots = 0.0046 < 0.5 \cdot 10^{-2}$, το οποίο σημαίνει ότι προσεγγίζουμε τη ρίζα μας σε δύο δεκαδικά ψηφία.

Η μέθοδος της διχοτόμησης είναι η μοναδική μέθοδος για την εύρεση ρίζας, στην οποία μπορούμε να υπολογίσουμε από πριν τον αριθμό των επαναλήψεων για την επιθυμητή προσέγγιση. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι επιθυμούμε να προσεγγίσουμε τη ρίζα κάποιας εξίσωσης με ακρίβεια ε, από τη σχέση (3.42) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} |\xi^* - \xi| = |x_n - \xi| &\leq \frac{1}{2^{n+1}}|a-b|, \text{ αρκεί} \\ \frac{1}{2^{n+1}}|a-b| &\leq \varepsilon \\ \frac{|a-b|}{\varepsilon} &\leq 2^{n+1} \\ \ln(\frac{|a-b|}{\varepsilon}) &\leq (n+1)\ln 2 \end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned} (n+1) &\geq (\ln 2)^{-1}\ln(\frac{|a-b|}{\varepsilon}) \\ n &\geq (\ln 2)^{-1}\ln(\frac{|a-b|}{\varepsilon}) - 1. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.20 *Να υπολογισθούν οι επαναλήψεις n, που χρειάζεται η μέθοδος της διχοτόμησης για την εύρεση της $\sqrt[3]{5}$ με ακρίβεια 5 δεκαδικά ψηφία.*

Λύση Η $\sqrt[3]{5}$ είναι η πραγματική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x^3 - 5 = 0$. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι $f(1) = 1 - 5 = -4 < 0$, ενώ $f(2) = 8 - 5 = 3 > 0$. Επομένως, η ρίζα μας βρίσκεται στο διάστημα $[a, b] = [1, 2]$. Από την (3.43) με $a = 1, b = 2$ και $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$ έχουμε ότι

$$n \geq (\ln 2)^{-1} \ln\left(\frac{|a-b|}{\varepsilon}\right) - 1 \approx 16.6096$$

Επομένως, ο ακριβής αριθμός επαναλήψεων είναι $n = 17$. Είναι φανερό ότι για την επίλυση της εξίσωσης με τον παραπάνω τρόπο χρειαζόμαστε πλέον Ηλεκτρονικό Υπολογιστή και οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού.

Ασκήσεις

Άσκηση 3.1 *Σχεδιάστε τις ευθείες:*

$$a)\ y = -2x + 6, \quad b)\ y = x - 2, \quad c)\ y = 0.5x - 3, \ \text{με } A = [-2, 4).$$

Άσκηση 3.2 *Βρείτε την ευθεία που περνά από τα σημεία $P_0(x_0, y_0)$ και $P_1(x_1, y_1)$. Να βρείτε την ευθεία που περνά από το σημείο $P_0(x_0, y_0)$ και έχει λόγο λ.*

Άσκηση 3.3 *Δείξτε ότι στις κάθετες ευθείες οι κλίσεις τους έχουν γινόμενο -1. Δηλ. για τις ευθείες*

$$y = ax + b \quad \text{και} \quad y = a'x + b', \quad \text{έχουμε } aa' = -1.$$

Άσκηση 3.4 *Δείξτε τις ταυτότητες των υπερβολικών συναρτήσεων. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των αντίστροφων των υπερβολικών συναρτήσεων.*

Άσκηση 3.5 *Κάντε τη γραφική παράσταση της καμπύλης $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$, χρησιμοποιώντας το Gnuplot. Στη συνέχεια να βρείτε την αναλυτική εξίσωση αυτής.*

Άσκηση 3.6 *Βρείτε μια περιοχή $0 < |x - 3| < \delta$, ώστε η απόλυτη τιμή της διαφοράς των τιμών $\frac{2x-2}{x+1}$ και 1 να είναι μικρότερη του $\frac{1}{1000}$.*

Άσκηση 3.7 *Βρείτε τα όρια:*

$$1)\ \lim_{x\to 2}\frac{x-4}{x^2-5x+4}, \quad 2)\ \lim_{x\to -3}\frac{x^2+4x+3}{x-3}, \quad 3)\ \lim_{x\to -3}\frac{x^2+4x+3}{x+3}.$$

Άσκηση 3.8 *Βρείτε τα όρια:*

$$1)\ \lim_{x\to \infty}\frac{x-5}{x^2-2x+4}, \quad 2)\ \lim_{x\to -\infty}\frac{x^3+3}{x^3-3}, \quad 3)\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+3x-10}{x+3},$$

$$4)\ \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+3x-10}{x-2}, \quad 5)\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x}{x-2}.$$

Άσκηση 3.9 *Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.8.11 αποδείξτε ότι: 1) αν η $f(x) > 0$ σε μια περιοχή του x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) \geq 0$, 2) αν η $f(x)$ είναι φραγμένη σε μια περιοχή του x_0, τότε $\phi_1 \leq \lim_{x\to x_0} f(x) \leq \phi_2$, όπου ϕ_1 και ϕ_2 τα δυο φράγματα.*

Άσκηση 3.10 *Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)$ με $x \in [a, \infty)$. Δείξτε ότι αν η f είναι αύξουσα και φραγμένη, τότε $\lim_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$*

Άσκηση 3.11 *Αφού αποδείξετε την ανισότητα* $1 < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1-x}$, *αποδείξτε ότι*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1.$$

Άσκηση 3.12 *Αποδείξτε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια ρίζα πραγματική.*

Άσκηση 3.13 *Αποδείξτε ότι κάθε πολυώνυμο άρτιου βαθμού με συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου την μονάδα, έχει ελάχιστο.*

Άσκηση 3.14 *Αποδείξτε ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση* f *ισχύει*

$$\lim_{x \to x_0} f(\xi) = f(x_0), \ \forall \xi \in (x, x_0) \text{ ή } \xi \in (x_0, x).$$

.

Παράγωγος

4.1 Γενικά

Για τις συναρτήσεις είπαμε ότι είναι νόμοι, κανόνες που συνδέουν τα στοιχεία δυο συνόλων. Εκτός από τον τρόπο που συνδέονται τα στοιχεία των συνόλων, πολλές φορές μας ενδιαφέρει κάτι περισσότερο, μας ενδιαφέρει το πώς συμπεριφέρονται αυτά, πώς μεταβάλλονται. Έτσι, λοιπόν, μια μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής x από x_0 σε x_1 κατά $\Delta x = x_1 - x_0$, επιφέρει μια μεταβολή στην ανεξάρτητη μεταβλητή y από $y_0 = f(x_0)$ σε $y_1 = f(x_1) = f(x_0 + \Delta x)$ κατά $\Delta y = y_1 - y_0$. Η ποσοστιαία μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής y στο σημείο x_0, δηλ. ο λόγος

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

έχει πολλά ονόματα, ανάλογα με το πού χρησιμοποιείται. Στη Φυσική, για παράδειγμα, όταν μελετάμε κίνηση, λέγεται μέση ταχύτητα, στη Βιολογία, όταν μελετάμε πληθυσμούς, λέγεται ρυθμός μεταβολής, στην Οικονομία, όταν μελετάμε το κόστος παραγωγής, μέση μεταβολή κόστους, στα Μαθηματικά, όταν μελετάμε τη συνάρτηση, εκφράζει την κλίση της τέμνουσας της καμπύλης στα σημεία $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$. Όμως, το μέγεθος που μόλις είδαμε είναι εξαιρετικά γενικό και μάλλον δεν ενδείκνυται ως μέτρο της μεταβολής. Εκείνο που θα ταίριαζε ως μέτρο, για τη λεπτομερειακή περιγραφή του όποιου φαινομένου, θα πρέπει να είναι κάτι που θα έχει να κάνει με το στιγμιαίο, π.χ. στιγμιαία ταχύτητα, στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού, οριακό κόστος και μάλιστα τη στιγμή που βρισκόμαστε στο σημείο x_0. Αυτό, ακριβώς, θα περιγράψουμε στην επόμενη παράγραφο.

4.2 Ορισμός και ερμηνεία της παραγώγου

4.2.1 Ο Ορισμός της παραγώγου

Ορισμός 4.2.1*Για τη συνάρτηση $f(x)$ που είναι ορισμένη σ' ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών Δ, όταν το*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η συνάρτηση παραγωγίζεται στο x_0 και το όριο αυτό λέγεται παράγωγος της συνάρτησης στο σημείο αυτό, συμβολίζεται δε με $f'(x_0)$.

Αφού η παράγωγος είναι όριο μιας συνάρτησης σε κάποιο σημείο, προφανώς θα είναι μοναδική στο σημείο αυτό. Επίσης αφού είναι όριο, θα ισχύουν τα σχετικά περί πλευρικών ορίων, δηλ. θα ορίζεται η αριστερή και δεξιά παράγωγος μιας συνάρτησης στο σημείο x_0, έτσι

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Από τον ορισμό, για μια συνάρτηση που παραγωγίζεται στο σημείο x_0, κάποιος θα μπορούσε να συμπεράνει ότι:

- Η συνάρτηση ορίζεται στο σημείο x_0.
- Το σημείο x_0 είναι σημείο συσσωρεύσεως.
- Το ότι $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ συνεπάγεται ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0, αφού η σχέση $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) \neq 0$ θα οδηγούσε σε άτοπο (γιατί;). Το αντίστροφο δεν ισχύει, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.
- Στο τυχαίο σημείο x_0 θα ισχύει

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + s(x), \quad \text{όπου} \quad \lim_{x \to x_0} s(x) = 0 \tag{4.1}$$

ή ισοδύναμα

$$\Delta y = (f'(x_0) + s(x))\Delta x, \quad \text{με} \quad \lim_{x \to x_0} s(x) = 0 \tag{4.2}$$

Παράδειγμα 4.1 *Να δειχτεί ότι η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ (x-2)^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$, όχι όμως και παραγωγίσιμη.

Λύση Πράγματι, η συνάρτηση είναι συνεχής, αφού

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^3 = 1 = \lim_{x\to 1^+} (x-2)^2 = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1),$$

ενώ η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη, αφού

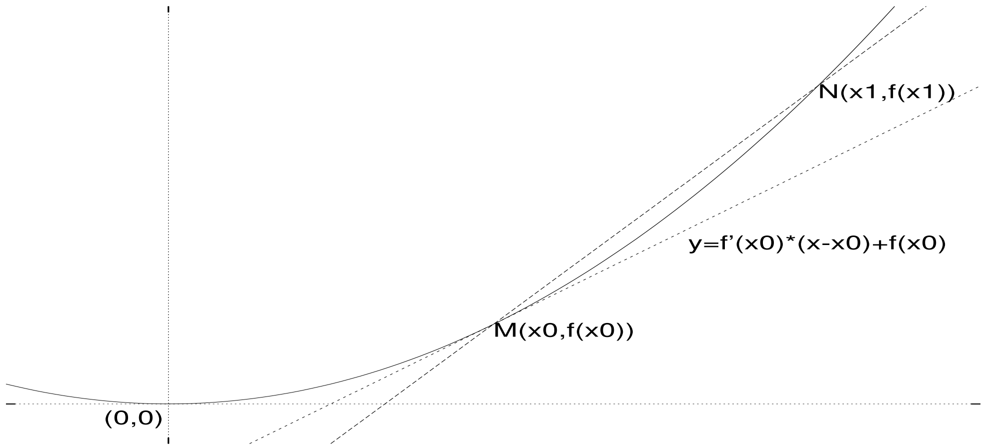
$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-1}{x-1} = 3 \neq -2 = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-2)^2-1}{x-1} = f'_+(1).$$

Όταν η συνάρτηση $f(x)$ παραγωγίζεται σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό και μάλιστα η συνάρτηση που δημιουργείται, όταν σε κάθε σημείο x_0 αντιστοιχίσουμε την τιμή της παραγώγου της, λέγεται παράγωγος της $f(x)$ και συμβολίζεται με

$$f'(x) \quad \text{ή} \quad \frac{df(x)}{dx} \quad \text{ή} \quad \frac{d}{dx}f(x).$$

Η παράγωγος μιας συνάρτησης είναι συνάρτηση και ως εκ τούτου συμπεριφέρεται και μελετάται ως συνάρτηση. Έτσι, είναι δυνατόν να παραγωγίζεται εκ νέου, οπότε έχουμε την παράγωγο δεύτερης τάξης, τρίτης τάξης κ.ο.κ. Οι συμβολισμοί της δεύτερης, τρίτης τάξης κ.ο.κ. είναι:

$$\begin{aligned} &f''(x) \quad \text{ή} \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2} \quad \text{ή} \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x), \\ &f'''(x) \quad \text{ή} \quad \frac{d^3f(x)}{dx^3} \quad \text{ή} \quad \frac{d^3}{dx^3}f(x), \\ &f^{(4)}(x) \quad \text{ή} \quad \frac{d^4f(x)}{dx^4} \quad \text{ή} \quad \frac{d^4}{dx^4}f(x), \\ &f^{(5)}(x), \quad f^{(6)}(x), \quad \ldots \end{aligned}$$



Σχήμα 4.21: Η εφαπτομένη της $y = f(x)$.

4.2.2 Η Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη, στο πεδίο ορισμού της, συνάρτηση $f(x)$ και δυο σημεία της $M(x_0, f(x_0))$ και $N(x_1, f(x_1))$. Η ευθεία που περνά από τα δυο αυτά σημεία (τέμνουσα) είναι γνωστό ότι έχει ως εξίσωση την

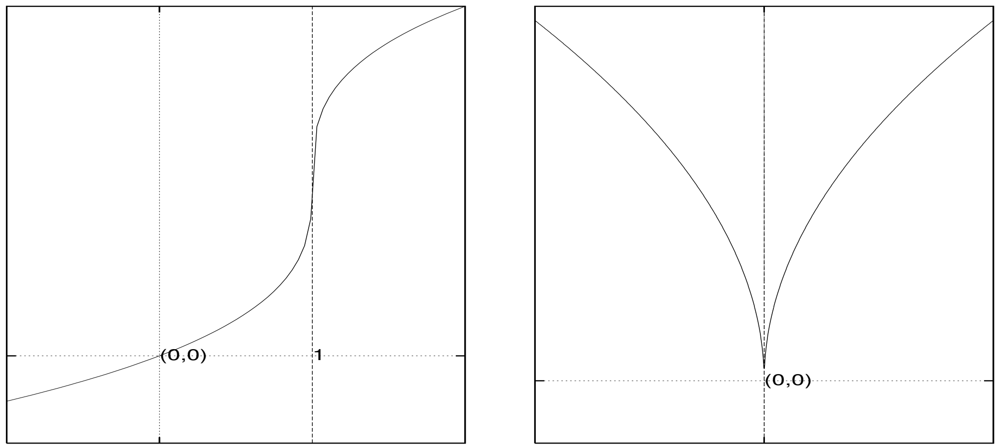
$$y-f(x_0) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0) \quad \text{ή} \quad y-f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0), \tag{4.3}$$

όταν θέσουμε το $x_1 = x_0 + h$. Ο λόγος

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

είναι, προφανώς, η κλίση αυτής, όπως ήδη έχει αναφερθεί.
Αν θεωρήσουμε ότι το $h \to 0$, τότε το $x_1 \to x_0$ και αφού θεωρήσαμε ότι η συνάρτησή μας είναι παραγωγίσιμη και επομένως θα είναι και συνεχής, τότε το $f(x_1) \to f(x_0)$. Έτσι, το σημείο $N \to M$, Σχήμα 6.39, οπότε τα δυο σημεία τείνουν να συμπέσουν. Η ευθεία που ορίζεται μ' αυτόν τον τρόπο λέγεται εφαπτομένη της καμπύλης και η εξίσωσή της είναι

$$y - f(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0), \quad \text{ή} \quad y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0). \tag{4.4}$$



Σχήμα 4.22: Η εφαπτομένη της $y = \sqrt[3]{x-1} + 1$ και $y = \sqrt{|x|}$ στο 1 και 0 αντίστοιχα.

Είναι φανερό ότι, η κλίση της ευθείας αυτής, δηλ. της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο x_0, είναι $f'(x_0)$.

Στο Σχήμα 4.22 δίνεται το σχήμα δυο συγκεκριμένων συνεχών συναρτήσεων και η εφαπτομένη στις γραφικές παραστάσεις τους, με τον τρόπο που ορίσαμε παραπάνω. Ωστόσο, για την πρώτη περίπτωση έχουμε

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}+1-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \infty.$$

Στην περίπτωση αυτή, όπως και στην περίπτωση που θα βρίσκαμε $-\infty$, λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ παραγωγίζεται **κατεκδοχήν**. Για τη δεύτερη βρίσκουμε

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \infty,$$

δηλ. η συνάρτηση δεν παραγωγίζεται ούτε κατεκδοχήν. Δυο πράγματα πρέπει να προσέχουμε σ' αυτές τις ακραίες καταστάσεις:

- Από την κατεκδοχήν παράγωγο δε συνάγεται η συνέχεια, όπως φαίνεται στην Άσκηση 4.2.

- Όταν μιλάμε για εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης σε κάποιο σημείο, η συνάρτηση θα πρέπει να είναι συνεχής σ' αυτό το σημείο.

4.3 Ιδιότητες των παραγώγων

Μερικές ιδιότητες των παραγώγων είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για την εύρεση παραγώγων των συναρτήσεων χωρίς τη χρήση του ορισμού, που δεν είναι πάντα εύκολος στη χρήση. Πολλές από αυτές έχουν δειχτεί στις τάξεις του Λυκείου και απλά θα τις αναφέρουμε.

Θεώρημα 4.3.1*Αν δυο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο κοινό πεδίο ορισμού τους, τότε ισχύει:*

$$\begin{aligned}
&1)\quad (f \pm g)' = f' \pm g', \quad \forall x \in A_f \cap A_g,\\
&2)\quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g', \quad \forall x \in A_f \cap A_g,\\
&3)\quad \Big(\frac{f}{g}\Big)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, \quad \forall x \in A_f \cap A_g, \quad \mu\epsilon \quad g(x) \neq 0.
\end{aligned}$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε μόνο την 3) και θα μείνουν οι άλλες ως άσκηση. Στο τυχαίο x_0, στο οποίο πληρούνται οι σχετικές προϋποθέσεις, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0}\Big(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\Big) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0}\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)\cdot g(x_0)} =\\
&\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0}\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)\cdot g(x_0)} =\\
&\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)}\Big(g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0)\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}\Big) =\\
&\frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Θεώρημα 4.3.2*Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο A_f και η συνάρτηση $g(y)$ είναι παραγωγίσιμη στο $A_g \cap f(A_f)$, τότε είναι παραγωγίσιμη και η $(g\circ f)(x)$ στο $A_g \cap f(A_f)$ και μάλιστα ισχύει*

$$(g\circ f)'(x) = g'_y(y)\cdot f'_x(x) = g'_y(f(x))\cdot f'_x(x).$$

Απόδειξη: Αφού η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο σημείο x_0, από τη σχέση (4.2) θα ισχύει

$$\Delta y = (f'(x_0) + a(x))\Delta x, \quad \text{με} \quad \lim_{x \to x_0} a(x) = 0.$$

Επίσης, αφού και η συνάρτηση $z = g(y)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $y_0 = f(x_0)$ με $\Delta y \neq 0$, θα ισχύει

$$\Delta z = (g'(y_0) + b(y))\Delta y, \quad \text{με} \quad \lim_{y \to y_0} b(y) = 0,$$

Αντικαθιστώντας τώρα από την πρώτη στη δεύτερη, διαιρώντας με Δx και παίρνοντας όρια προκύπτει

$$z'(y(x_0)) = g'(y_0)f'(x_0) = g'_y(f(x_0))f'(x_0).$$

Ο προηγούμενος τύπος ισχύει και στην περίπτωση που $\Delta y = 0$, οπότε και $\Delta z = 0$. Την πλήρη απόδειξη μπορεί κάποιος να βρει στο ([7]). Έτσι αφού ισχύει για το τυχαίο x_0, θα ισχύει γενικά. □

Θεώρημα 4.3.3 *Αν η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο A_f και υπάρχει η αντίστροφή της, τότε και η αντίστροφη είναι παραγωγίσιμη και ισχύει*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x(y))}.$$

Απόδειξη: Έστω $x(y) = f^{-1}(y)$ η αντίστροφη της $y = f(x)$, η οποία είναι συνεχής (Θεώρημα 3.9.4). Το ότι $\Delta x \to 0$ συνεπάγεται ότι και $\Delta y \to 0$ και αντιστρόφως. Έτσι, στο τυχαίο σημείο $y_0 = f(x_0)$ έχουμε

$$x'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{f'(x(y))}.$$

Πρέπει, ίσως, να σημειώσουμε ότι στο τέλος θα πρέπει να εναλλάξουμε τις μεταβλητές, αν χρειαστεί, θέτοντας όπου x το y και όπου y το x. □

4.4 Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων

Είναι ήδη γνωστό αλλά και εύκολα μπορεί να αποδειχτεί ότι

$$(c)' = 0, \quad (x)' = 1, \quad (x^n)' = nx^{n-1}, \text{ όταν } n \in \mathbb{Z}. \tag{4.5}$$

Χρησιμοποιώντας κάποιος τη σχέση (4.5) και το Θεώρημα 4.3.1 μπορεί να παραγωγίζει πολυωνυμικές συναρτήσεις αλλά και ρητές.

Παράδειγμα 4.2*Παραγωγίστε τις συναρτήσεις*

$$1) f(x) = 2x^5 - 3x^2 + x - 10, \quad 2) g(x) = \frac{2x^3 - 3x}{x^2 + 1}.$$

Λύση

$$\begin{aligned}
&1) \quad f'(x) = (2x^5 - 3x^2 + x - 10)' = 10x^4 - 6x + 1 \\
&2) \quad g'(x) = \frac{(2x^3 - 3x)'(x^2 + 1) - (2x^3 - 3x)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \\
&\frac{(6x^2 - 3)(x^2 + 1) - (2x^3 - 3x)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^4 + 9x^2 - 3}{(x^2 + 1)^2}.
\end{aligned}$$

Για τη **λογαριθμική** συνάρτηση $y = \ln x$, κάποιος θα μπορούσε να σκεφτεί ως εξής: Για το τυχαίο σημείο x_0, $(x_0 > 0)$ του πεδίου ορισμού έχουμε

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln x_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\ln(x_0 + h) - \ln x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln(1 + \frac{h}{x_0}).$$

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με x_0 και τροποποιούμε κατάλληλα το κλάσμα της παρένθεσης, οπότε παίρνουμε

$$y' = \frac{1}{x_0} \lim_{h \to 0} \frac{x_0}{h} \ln\Big(1 + \frac{h}{x_0}\Big) = \frac{1}{x_0} \lim_{h \to 0} \frac{x_0}{h} \ln\Big(1 + \frac{1}{\frac{x_0}{h}}\Big).$$

Θέτουμε $u = \frac{x_0}{h}$ και παρατηρούμε ότι, όταν $h \to 0$, τότε το $u \to \infty$, οπότε παίρνουμε

$$y' = \frac{1}{x_0} \lim_{u \to \infty} u \ln\Big(1 + \frac{1}{u}\Big) = \frac{1}{x_0} \lim_{u \to \infty} \ln\Big(1 + \frac{1}{u}\Big)^u = \frac{1}{x_0} \ln e = \frac{1}{x_0}.$$

Έτσι, γενικά, έχουμε $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, ακόμη γενικότερα δε αποδεικνύεται (να αποδειχτεί) ότι ισχύει η σχέση

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}, \qquad \forall x \neq 0. \tag{4.6}$$

Η **εκθετική** συνάρτηση $y = e^x$ είναι η αντίστροφη της λογαριθμικής, οπότε $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$. Από το Θεώρημα 4.3.3, για το τυχαίο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού έχουμε

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y(x) = e^x.$$

Στα ίδια αποτελέσματα θα μπορούσε να οδηγηθεί κάποιος κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της Άσκησης 3.11.

Παράδειγμα 4.3*Να αποδειχτούν οι γενικοί τύποι:*

$$1)\ (\ln_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \quad 2)\ (x^a)' = a \cdot x^{a-1}, \quad 3)\ (a^x)' = a^x \cdot lna.$$

Προσδιορίστε για κάθε περίπτωση τις περιοχές που ανήκουν τα x και a.

Λύση 1) Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων έχουμε

$$(\ln_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

2) Από τις ιδιότητες των λογαρίθμων επίσης έχουμε $x^a = e^{a \ln x}$, οπότε

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} \cdot (a \ln x)' = x^a a \frac{1}{x} = a \cdot x^{a-1}$$

3) Όπως και προηγούμενα $a^x = e^{x \ln a}$, οπότε

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = \ln a \cdot a^x$$

Για τις **τριγωνομετρικές** συναρτήσεις είναι γνωστό ότι

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Η απόδειξη των δυο πρώτων στηρίζεται στους μετασχηματισμούς αθροισμάτων σε γινόμενο και το βασικό όριο $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Η τρίτη είναι παράγωγος κλάσματος. (Να γίνουν οι αποδείξεις από τον αναγνώστη.)

Για τις αντίστροφες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, τις **κυκλομετρικές**, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 4.3.3. Έτσι, για τη συνάρτηση του τόξου ημιτόνου x, που ισχύει $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$, έχουμε

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Γι' αυτήν, του τόξου συνημιτόνου x, που ισχύει $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$, έχουμε

$$y' = (\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Για εκείνη, του τόξου εφαπτομένης x, που ισχύει $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$, έχουμε

$$y' = (\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Τέλος, οι παράγωγοι των **υπερβολικών** συναρτήσεων βρίσκονται από τις παραγώγους των εκθετικών και το Θεώρημα 4.3.1. Δίνουμε τους τύπους και μένει στον αναγνώστη να τους αποδείξει ως άσκηση:

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad (\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

4.5 Παράγωγοι άλλων συναρτήσεων

4.5.1 Παράγωγοι πεπλεγμένων συναρτήσεων

Πάρα πολλές φορές μια συνάρτηση εκφράζεται με τη βοήθεια μιας πεπλεγμένης σχέσης με τη μεταβλητή της μορφής

$$F(x, f(x)) \equiv 0 \Leftrightarrow F(x, y) \equiv 0. \tag{4.7}$$

Για τις περιπτώσεις, όπου μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $F(x, y) = 0$ και να καταλήξουμε σε μια έκφραση της μορφής $y = f(x)$, εφαρμόζουμε τους προηγούμενους κανόνες. Όμως, πολύ συχνά κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό. Σ' αυτές τις περιπτώσεις οι συναρτήσεις των δυο μελών της (4.7) ταυτίζονται και ως εκ τούτου θα έχουν τις ίδιες παραγώγους. Από τη σχέση που προκύπτει, μπορούμε να μελετήσουμε την παράγωγο της συνάρτησης.

Παράδειγμα 4.4*Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της $y = y(x)$ στο σημείο $M(1, 1)$, όταν αυτή πληροί τη σχέση*

$$x^3 - xy + y^3 = 1.$$

Λύση Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη ως προς x και έφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.3.2, παίρνουμε

$$(x^3 - xy + y^3)' = 1' \Rightarrow 3x^2 - y - xy' + 3y^2y' = 0 \Rightarrow$$

$$(-x + 3y^2)y' = y - 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{y - 3x^2}{-x + 3y^2}.$$

Το σημείο $M(1, 1)$ πληροί την πεπλεγμένη σχέση και, συνεπώς, είναι σημείο της συνάρτησής μας. Ο ρυθμός μεταβολής σ' αυτό το σημείο είναι $y' = \frac{1-3\cdot 1^2}{-1+3\cdot 1^2} = -1$.

Παράδειγμα 4.5*Να δείξετε ότι η παρακάτω συνάρτηση πληροί την διπλανή της σχέση*

$$y = \ln(1 + e^x), \quad y'' + (y')^2 = y'.$$

Λύση Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη ως προς x και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.3.2, παίρνουμε

$$y' = (\ln(1 + e^x))' = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

Παραγωγίζοντας εκ νέου έχουμε

$$y'' = \frac{e^x(1 + e^x) - e^x e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x(1 + e^x)}{(1 + e^x)^2} - \frac{(e^x)^2}{(1 + e^x)^2} = y' - (y')^2,$$

απ' όπου παίρνουμε τη ζητούμενη. Φυσικά θα μπορούσε κάποιος να εργαστεί κλασσικά και να καταλήξει στο ίδιο αποτέλεσμα, π.χ.

$$y'' = (\frac{e^x}{1 + e^x})' = \cdots = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$$

οπότε αντικαθιστώντας έχουμε

$$y'' + (y')^2 = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} + (\frac{e^x}{1+e^x})^2 = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{1+e^x} = y'$$

4.5.2 Συναρτήσεις με παραμετρικές εξισώσεις

Έχουμε ήδη δει ότι, πολλές φορές, οι μεταβλητές των συναρτήσεων δίνονται με παραμετρικές εξισώσεις. Επίσης, είδαμε ότι απαλείφοντας την παράμετρο t μπορούμε να μεταβούμε στους κανονικούς τύπους των συναρτήσεων ή στην πεπλεγμένη μορφή τους. Όμως, δεν είναι λίγες οι φορές που η απαλοιφή είναι δύσκολη υπόθεση, αλλά και όταν γίνεται, οι μορφές που παίρνουμε είναι πολύπλοκες. Έτσι, είμαστε αναγκασμένοι να ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία για να μελετήσουμε το ρυθμό μεταβολής της.

Έστω

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right. , \quad t \in \Delta = [a, b] \subseteqq \mathbb{R}, \tag{4.8}$$

δυο μονοσήμαντα ορισμένες συναρτήσεις, που περιγράφουν στο επίπεδο μια καμπύλη, δηλ. καθώς το t μεταβάλλεται από το a μέχρι το b, τα x και y ορίζουν στο επίπεδο τα σημεία $M(x, y)$ κι αυτά με τη σειρά τους την καμπύλη. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $x = x(t)$ έχει αντίστροφη την $t = t(x)$, τότε ορίζεται η συνάρτηση μας $y = y(t(x)) = y(x)$. Για την παράγωγο της τελευταίας χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 4.3.2 και παίρνουμε

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \tag{4.9}$$

Παράδειγμα 4.6*Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις*

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta) \end{array} \right. , \quad \theta \in \Delta = [0, 2\pi).$$

Λύση Χρησιμοποιώντας τον τύπο (4.9) έχουμε

$$\frac{dy}{dt} = r\sin\theta, \quad \frac{dx}{dt} = r(1 - \cos\theta),$$

οπότε

$$y' = \frac{r\sin\theta}{r(1-\cos\theta)} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}},\ \forall\theta\in(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$$

Παρατήρηση 4.5.1*Οι παραμετρικές εξισώσεις στο προηγούμενο παράδειγμα, είναι οι εξισώσεις της κυκλοειδούς, δηλ. της καμπύλης που γράφει ένα σημείο M του κύκλου (O, r), καθώς αυτός κυλά πάνω σε μια ευθεία. Το θ είναι η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα OM με την κατακόρυφο.*

Φυσικά, μπορούμε να παίρνουμε και υψηλότερης τάξης παραγώγους συναρτήσεων, που δίνονται με παραμετρικές εξισώσεις, αρκεί να κρατάμε τους κανόνες παραγώγισης που μάθαμε. Έτσι θα έχουμε

$$y'' = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}(\frac{y'_t}{x'_t}) = \frac{d}{dt}(\frac{y'_t}{x'_t})\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3}.$$

4.6 Το διαφορικό και η ερμηνεία του

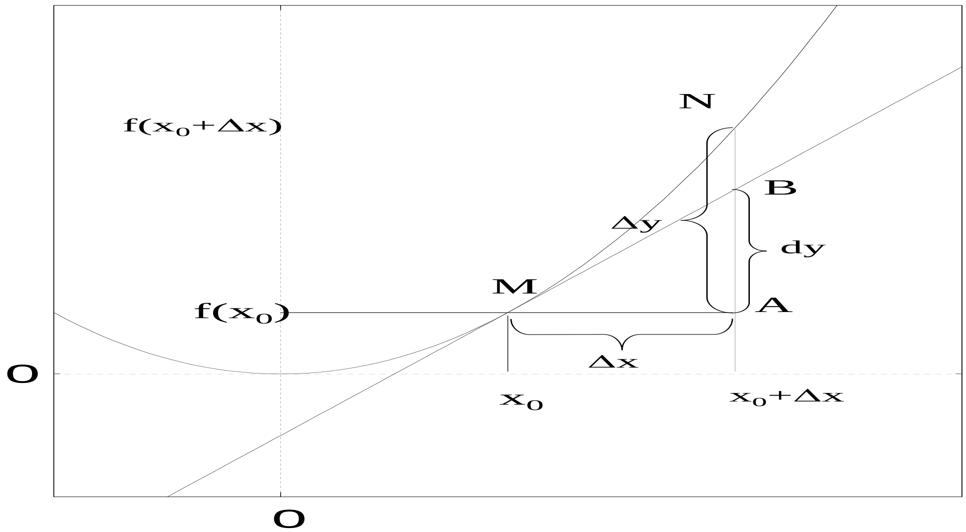
Έχουμε ήδη δει ότι μια μεταβολή Δx στην ανεξάρτητη μεταβλητή x, στο σημείο x_0, προκαλεί μια μεταβολή Δy στην εξαρτημένη μεταβλητή $y = f(x)$ και μάλιστα

$$\Delta y = (f'(x_0) + s(x))\Delta x = f'(x_0)\Delta x + s(x)\Delta x,\ \text{με}\ \lim_{\Delta x\to 0} s(x) = 0. \quad (4.10)$$

Ο όρος $s(x)\Delta x$ είναι εξαιρετικά μικρός σε σχέση με τον όρο $f'(x_0)\Delta x$ και αν παραλειφθεί, δεν αλλοιώνει σημαντικά το αποτέλεσμα. Έτσι, έχουμε $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$, δηλ. τη διαφορά Δy περίπου ίση με μια **γραμμική προσέγγιση**. Αυτή τη γραμμική προσέγγιση του Δy καλούμε **διαφορικό** και συμβολίζουμε με dy, οπότε $dy = f'(x_0)\Delta x$. Ειδικά για τη συνάρτηση $f(x) = x$ έχουμε $dx = f'(x_0)\Delta x = 1\cdot\Delta x = \Delta x$. Αφού, λοιπόν, αυτά συμβαίνουν στο τυχαίο x_0, θα είναι και $dx = \Delta x$, οπότε, γενικά, μπορούμε να γράφουμε

$$dy = f'(x)dx.$$

Είναι, λοιπόν, το διαφορικό μιας συνάρτησης, μια συνάρτηση η οποία μάλιστα εξαρτάται από δυο μεταβλητές, την dx και το σημείο x_0. Στο Σχήμα 4.23 το



Σχήμα 4.23: Η Γεωμετρική ερμηνεία του διαφορικού.

διαφορικό είναι η πλευρά AB του τριγώνου MAB και $AB = \tan(\widehat{AMB})MA$. Το τμήμα BN είναι το $s(x)\Delta x$ που θεωρήσαμε αμελητέο και το παραλείψαμε. Γεωμετρικά δηλ. στο σημείο x_0 η καμπύλη προσεγγίζεται από την εφαπτομένη της.

Παράδειγμα 4.7*Βρείτε το διαφορικό της $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Χρησιμοποιήστε το για να βρείτε μια προσεγγιστική τιμή για την α)$\sqrt[3]{27.054}$ β)$\sqrt[3]{63.052}$*

Λύση Αφού
$$f'(x) = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2},$$
θα ισχύει $dy = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}dx$. α) Στο σημείο $x_0 = 27$ είναι γνωστή η τιμή της συνάρτησης και μάλιστα ισχύει $f(27) = 3$· επίσης, στο σημείο αυτό επέρχεται μια μικρή μεταβολή $\Delta x = dx = 0.054$, οπότε η μεταβολή που επέρχεται στη συνάρτηση είναι

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x = f'(x)dx = dy = f'(27) \cdot dx = \frac{1}{3(\sqrt[3]{27})^2}0.054 = 0.02.$$

Η τιμή λοιπόν της συνάρτησης είναι

$$f(27.054) = f(27) + \Delta y \approx f(27) + dy = 3 + 0.02 = 3.02.$$

Παρόμοια υπολογίζουμε το β) στο σημείο $x_0 = 64$ και $dx = -0.048$.

4.7 Τύπος του Taylor

Ο τύπος (4.10) μπορεί να γραφεί λίγο διαφορετικά, ως εξής:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x), \tag{4.11}$$

όπου η ποσότητα $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ είναι ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού που προσεγγίζει την συνάρτηση $f(x)$ και μάλιστα έχει την ίδια τιμή και την ίδια παράγωγο στο σημείο x_0 και το $R(x)$ είναι το σφάλμα αυτής της προσέγγισης. Η ιδέα αυτή μπορεί να γενικευθεί για συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα περισσότερες φορές.
Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(x)$, η οποία είναι $n+1$ φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και έστω το n-βαθμού πολυώνυμο

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots + c_n(x - x_0)^n, \tag{4.12}$$

που έχει την ίδια τιμή και τις ίδιες τιμές των n παραγώγων στο σημείο $x_0 \in \Delta$, δηλ. ισχύει

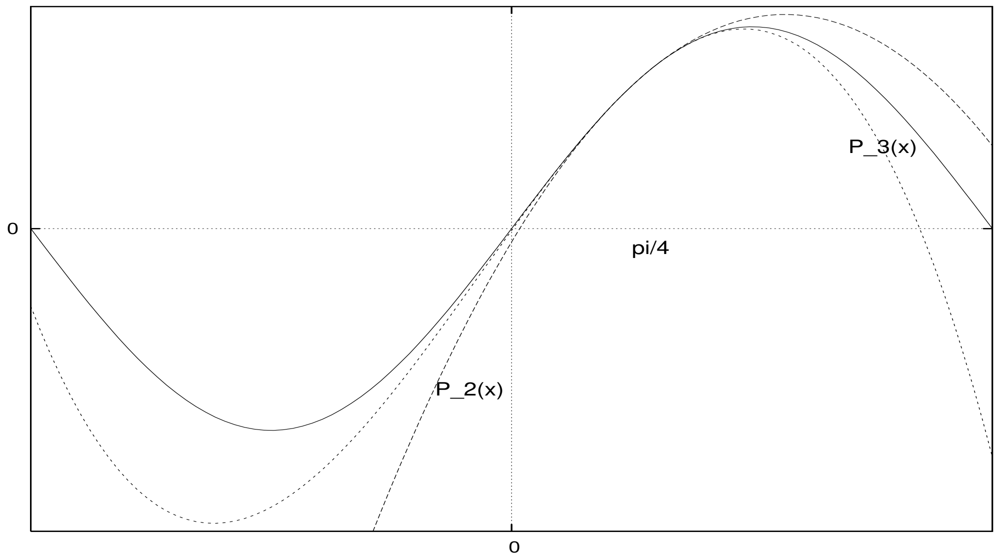
$$T_n(x_0) = f(x_0) \text{ και } T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.13}$$

Αν εφαρμόσουμε διαδοχικά τις σχέσεις της (4.13) σ' εκείνη της (4.12) παίρνουμε

$$c_0 = f(x_0),\ c_1 = f'(x_0),\ c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \ldots,\ c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \tag{4.14}$$

Έτσι προκύπτει ο τύπος

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R(x) \tag{4.15}$$



Σχήμα 4.24: Η προσέγγιση του ημιτόνου με Taylor στο $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Ο τύπος (4.15) είναι γνωστός ως **τύπος του Taylor**. Το $R(x)$, που είναι το σφάλμα που γίνεται κατά την προσέγγιση αυτή, αποδεικνύεται ([5],[7],[2]) ότι έχει την τιμή

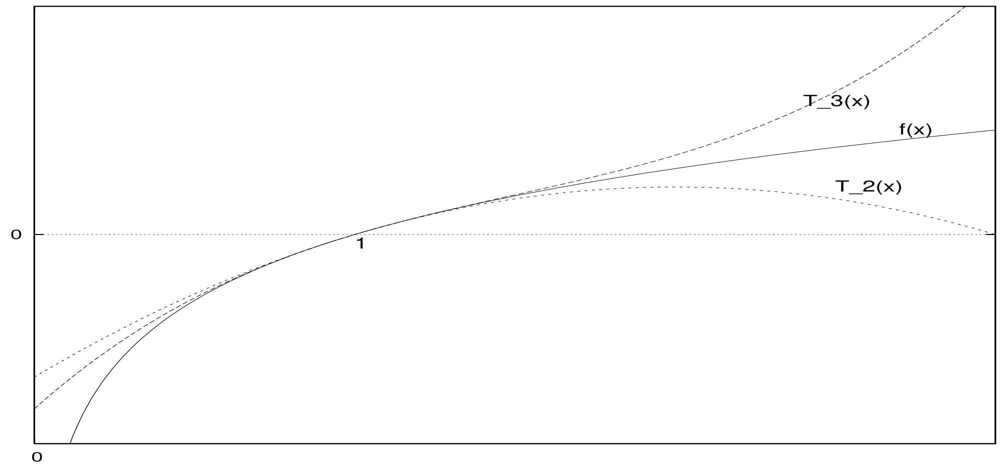
$$R(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \text{με } \xi \in (x_0, x) \text{ ή } \xi \in (x, x_0) \tag{4.16}$$

και είναι γνωστό ως **υπόλοιπο κατά Lagrange** ή την τιμή

$$R(x) = \frac{(x-x_0)(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \text{με } \xi \in (x_0, x) \text{ ή } \xi \in (x, x_0) \tag{4.17}$$

και είναι γνωστό ως **υπόλοιπο κατά Cauchy**. Διευκρινίζουμε ότι τα ξ στους δυο τύπους (4.16)και (4.17) είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Στο Σχήμα 4.24 φαίνεται η προσέγγιση της συνάρτησης του ημιτόνου στο σημείο $x_0 = \frac{\pi}{4}$, με πολυώνυμα Taylor δευτέρου και τρίτου βαθμού.

Παράδειγμα 4.8*Να προσεγγίσετε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(x)$ με πολυώνυμο Taylor γύρω από το σημείο $x_0 = 1$. Να βρεθούν και να γίνει η γραφική παράσταση των πολυωνύμων δευτέρου και τρίτου βαθμού. Να βρεθεί η προσεγγιστική τιμή $f(e^{-0.5})$ με τα δυο πολυώνυμα.*



Σχήμα 4.25: Η προσέγγιση της $f(x) = \ln(x)$ με πολυώνυμα Taylor γύρω από το σημείο $x_0 = 1$.

Λύση Η n-τάξης παράγωγος προκύπτει από διαδοχικές παραγωγίσεις και έχει τη μορφή $f^{(n)}(x) = (-1)^{(n-1)}(n-1)!x^{-n}$. Το πολυώνυμο Taylor τότε είναι το ακόλουθο:

$$T_n(x) = f(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(k-1)}(k-1)!}{k!}(x-1)^k =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(k-1)}}{k}(x-1)^k = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots + (-1)^{(n-1)}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Τα πολυώνυμα δευτέρου και τρίτου βαθμού είναι:

$$T_2(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}, \quad T_3(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 3x - \frac{11}{6}.$$

Η γραφική τους παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 4.25. Η ακριβής τιμή είναι $f(0.5) = \ln e^{(-0.5)} = -0.5$. Από τα δυο πολυώνυμα παίρνουμε $T_2(x) = -0.470878$ και $T_3(x) = -0.491184$.

Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες (π.χ. η συνάρτηση $y = e^x$). Σ' αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε να σχηματίσουμε ένα πολυώνυμο Taylor άπειρου βαθμού ή όπως λέμε μια σειρά Taylor γύρω από το σημείο x_0. Όταν το $x_0 = 0$, η σειρά λέγεται σειρά Maclaurin

$$T(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{4.18}$$

Ως σειρά, η σειρά αυτή είναι δυνατόν να συγκλίνει ή να αποκλίνει, όπως έχουμε δει σε προηγούμενα κεφάλαια. Το ερώτημα είναι αν η σειρά συγκλίνει σε μια συνάρτηση, η συνάρτηση αυτή είναι η αρχική; Η απάντηση είναι αρνητική, δηλ. δεν είναι πάντα η αρχική, όμως και τα αποτελέσματα δεν είναι απογοητευτικά, δηλ. οι συνηθισμένες γνωστές συναρτήσεις έχουν σειρές Taylor που συγκλίνουν σ' αυτές, τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται αναλυτικές συναρτήσεις.
Ωστόσο εκείνο που θα πρέπει να τονίσουμε είναι ότι μια σειρά Taylor θα συγκλίνει στη συνάρτησή της, σε μια περιοχή του x_0, αν και μόνο αν, το υπόλοιπο για κάθε x στην περιοχή αυτή, τείνει στο μηδέν καθώς το n τείνει στο άπειρο δηλ.

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \Big(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \Big) = 0,$$

$$\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Παράδειγμα 4.9*Να βρεθεί η σειρά Maclaurin για την συνάρτηση* $f(x) = \cos x$

Λύση Ας γράψουμε αρχικά τις n παραγώγους της συνάρτησης $f(x) = \cos x$.

$$f'(x) = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2}), \quad f''(x) = -\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + 2\frac{\pi}{2}),$$

$$f'''(x) = -\sin(x + 2\frac{\pi}{2}) = \cos(x + 3\frac{\pi}{2}),\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2}).$$

Έτσι έχουμε ότι $f^{(2k+1)}(x) = 0$ και $f^{(2k)}(x) = (-1)^k$ για $k = 1, 2, \ldots$. Προφανώς η σειρά Maclaurin για την συνάρτηση $f(x) = \cos x$ είναι η

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{4.19}$$

Θέτοντας $x^2 = z$ στη σειρά (4.19) παίρνουμε τη σειρά

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!} = 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \frac{z^3}{6!} + \cdots \tag{4.20}$$

Θυμίζουμε, για την ακτίνα σύγκλισης r των δυναμοσειρών είχαμε δει ότι

$$r = \frac{1}{\rho}, \quad \text{όπου } \rho = \lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}|.$$

Έτσι έχουμε

$$\rho = \lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim \left| \frac{\frac{1}{(2n+2)!}}{\frac{1}{(2n)!}} \right| = \lim \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0.$$

Δηλ. η σειρά (4.20) συγκλίνει $\forall z \geq 0$, οπότε η σειρά (4.19) συγκλίνει $\forall x \in \mathbb{R}$.
Για το υπόλοιπο έχουμε

$$|R_n(x)| = \left| \cos(\xi + n\frac{\pi}{2}) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| < \left| \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

αφού $|\cos(\xi + n\frac{\pi}{2})| < 1$ και $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 0$ από το Παράδειγμα 2.32.
Από το προηγούμενο παράδειγμα γίνεται φανερό ότι:

Παρατήρηση 4.7.1 *Μια σειρά Taylor θα συγκλίνει στη συνάρτησή της, σε μια περιοχή του x_0, αν και μόνο αν όλες οι παράγωγοι είναι φραγμένες στην περιοχή αυτή, αφού το υπόλοιπο για κάθε x στην περιοχή αυτή θα τείνει στο μηδέν, καθώς το n θα τείνει στο άπειρο από το Παράδειγμα 2.32.*

Παράδειγμα 4.10 *Γράψτε υπό μορφήν σειράς Maclaurin τη συνάρτηση $y = \arctan x$ και να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισής της.*

Λύση Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \arctan x$, οπότε παραγωγίζοντας αμέσως παίρνουμε

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)f'(x) = 1, \tag{4.21}$$

παραγωγίζοντας εκ νέου την παραπάνω σχέση έχουμε

$$2xf'(x) + (1+x^2)f''(x) = 0 \Rightarrow f''(x) = -\frac{2x}{1+x^2}f'(x). \tag{4.22}$$

Η πρώτη σχέση από την (4.22) παραγωγιζόμενη εκ νέου μας δίνει

$$2f'(x) + 4f''(x) + (1+x^2)f'''(x) = 0 \Rightarrow (1+x^2)f'''(x) = -2f'(x) - 4f''(x), \tag{4.23}$$

συνεχίζοντας ομοίως μπορούμε να δημιουργήσουμε και να αποδείξουμε $\forall n \geq 3$ (η δημιουργία και η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση) τον επόμενο γενικό τύπο:

$$\begin{aligned}(n-2)(n-1)f^{(n-2)}(x) + 2(n-1)f^{(n-1)}(x) + (1+x^2)f^{(n)}(x) = 0 \Rightarrow \\ (1+x^2)f^{(n)}(x) = -(n-2)(n-1)f^{(n-2)}(x) - 2(n-1)f^{(n-1)}(x),\ \forall n \geq 3\end{aligned} \tag{4.24}$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε της τιμές $f^{(n)}(0)$. Έτσι, από τις (4.21) και (4.22) παίρνουμε $f'(0) = 1$ και $f''(0) = 0$, ενώ από τη σχέση (4.24), θέτοντας όπου x το 0, επαγωγικά προκύπτει

$$f^{(2n)}(0) = 0 \text{ και } f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n (2n)!$$

Από τον τύπο (4.18) με $x_0 = 0$ έχουμε

$$\arctan x = x - \frac{2!}{3!}x^3 + \frac{4!}{5!}x^5 - \frac{6!}{7!}x^7 + \cdots = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{4.25}$$

Εργαζόμενοι όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, για την εύρεση της ακτίνας σύγκλισης της σειράς (4.25), δημιουργούμε τη σειρά

$$\arctan x = x\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \cdots\right) = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2n+1} \tag{4.26}$$

και έχουμε

$$\rho = \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\left|\frac{\frac{1}{(2n+1)}}{\frac{1}{(2n-1)}}\right| = \lim\frac{2n-1}{2n+1} = 1.$$

Η σειρά μας λοιπόν θα συγκλίνει $\forall z \in [0,1)$ ή $\forall x \in (-1,1)$ και μένει να δούμε τι κάνει στα άκρα του διαστήματος. Για $x = -1$ ή $x = 1$, η σειρά (4.25) είναι μια εναλλάσσουσα σειρά και εφαρμόζεται το Θεώρημα 2.3.9 (του Leibnitz), οπότε συμπεραίνουμε ότι και στα άκρα η σειρά συγκλίνει. Το ότι η σειρά αυτή είναι αναλυτική θα δειχτεί σε επόμενο κεφάλαιο.

Για $x = 1$ προκύπτει ότι

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}.$$

Ο προηγούμενος τύπος είναι εξαιρετικά κομψός και θα μπορούσε να είναι ένας τύπος υπολογισμού του π, όμως είναι πάρα πολύ αργός.
Η συνάρτηση του λογαρίθμου δεν αναπτύσσεται σε σειρά Maclaurin, αφού δεν ορίζεται στο μηδέν. Αντί αυτής συνήθως αναπτύσσεται η $f(x) = \ln(x+1)$.

Παράδειγμα 4.11*Να αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin η συνάρτηση* $f(x) = \ln(x+1)$.

Λύση Παραγωγίζοντας διαδοχικά παίρνουμε εύκολα το γενικό τύπο

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n},\ n = 1, 2, \ldots$$

Στο σημείο $x_0 = 0$ γενικά έχουμε $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, $n = 1, 2, \ldots$, οπότε η σειρά Maclaurin είναι

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}(-1)^{n-1}(n-1)! = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Η ακτίνα σύγκλισης είναι $r = 1$ (να αποδειχθεί από τον αναγνώστη), οπότε η περιοχή σύγκλισης είναι αρχικά η περιοχή $(-1, 1)$. Για $x = 1$ έχουμε την εναλλάσσουσα αρμονική σειρά

$$\ln(1+1) = \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\ ,$$

που από το Θεώρημα 2.3.9 (του Leibnitz) γνωρίζουμε ότι συγκλίνει και το όριό της είναι πλέον $\ln 2$. Για $x = -1$ έχουμε την αρμονική σειρά η οποία είναι γνωστό ότι δε συγκλίνει, όπως ίσως αναμέναμε. Έτσι, η περιοχή σύγκλισης αυτής είναι τελικά $(-1, 1]$. Το ότι η σειρά συγκλίνει στη συνάρτησή μας αποδεικνύεται ως εξής: Από το υπόλοιπο κατά Lagrange (4.16), για όλα τα $x \in (0, 1]$ με $\xi \in (0, x)$ έχουμε

$$|R_n(x)| = \frac{x^n}{n}\frac{1}{(1+\xi)^n} = \left(\frac{x}{1+\xi}\right)^n \frac{1}{n} < \frac{1}{n} \to 0.$$

Από το υπόλοιπο κατά Cauchy (4.17), για όλα τα $x \in (-1, 0)$ με $\xi \in (x, 0)$ έχουμε

$$|R_n(x)| = \frac{|x(x-\xi)^{(n-1)}|}{(n-1)!}(n-1)!\frac{1}{|1+\xi|^n} = \frac{|x|}{(1+\xi)}\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right|^{(n-1)} =$$

$$\frac{|x|^n}{(1+\xi)}\left|\frac{1-\frac{\xi}{x}}{1+\xi}\right|^{(n-1)} = \frac{|x|^n}{(1+\xi)}\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^{(n-1)} \to 0, \quad \text{όπου } \frac{\xi}{x} = \theta \in (0,1),$$

αφού

$$\frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1 \Leftrightarrow 1-\theta < 1+\theta x \Leftrightarrow -\theta < \theta x \Leftrightarrow -1 < x.$$

Στον πίνακα (4.7) φαίνονται οι περισσότερο χρησιμοποιούμενες σειρές Maclaurin μαζί με τις περιοχές σύγκλισής τους.

Πριν κλείσουμε την παράγραφο των δυναμοσειρών Taylor, θα πρέπει να πούμε ότι οι δυναμοσειρές που συγκλίνουν παραγωγίζονται ξανά και ξανά χωρίς προβλήματα και μας δίνουν πάλι συγκλίνουσες δυναμοσειρές. Δίνουμε το επόμενο Θεώρημα χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 4.7.1 *Αν η $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης r, τότε*

- *Η $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ έχει ακτίνα σύγκλισης r*
- *Η $f(x)$ παραγωγίζεται στο $(-r, r)$*
- *Η $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ στο $(-r, r)$.*

4.8 Σημαντικά Θεωρήματα των παραγώγων

Οι παράγωγοι είναι ένα εξεραιτικό εργαλείο στα χέρια του επιστήμονα για τη μελέτη των συναρτήσεων και γενικότερα για την εξαγωγή συμπερασμάτων. Ο φοιτητής είναι ήδη εξοικειωμένος με ορισμένα Θεωρήματα μελέτης συναρτήσεων από το Λύκειο. Εδώ, κάποια γνωστά Θεωρήματα θα επαναληφθούν για την πληρότητα του κειμένου αλλά και θα συμπληρωθούν με αποδείξεις, καθώς και με άλλα που δεν έχουν διδαχτεί.

4.8.1 Ακρότατα συνάρτησης

Ορισμός 4.8.1 *Έστω $y = f(x)$ μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και $x_0 \in A$. Λέμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο (τοπικό ελάχιστο), αν υπάρχει $\delta > 0$, έτσι ώστε να ισχύει*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)) \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

ΣΕΙΡΕΣ Maclaurin	ΣΥΓΚΛΙΣΗ
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$x \in (-1, 1)$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	$x \in (-1, 1)$
$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	$x \in (-1, 1]$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}$	$x \in [-1, 1]$
$\tanh^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}$	$x \in (-1, 1)$

Πίνακας 4.1: Συχνά χρησιμοποιούμενες σειρές Maclaurin

Το τοπικό μέγιστο (τ.μ.) και το τοπικό ελάχιστο (τ.ε.) λέγεται τοπικό ακρότατο. Δεν πρέπει να συγχέονται τα τοπικά ακρότατα με τα ακρότατα της συνάρτησης, που για να ξεχωρίζουν από αυτά καλούνται και ολικά ακρότατα. Προφανώς, το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα αποτελεί το ολικό μέγιστο και το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα αποτελεί το ολικό ελάχιστο. Η ύπαρξη τοπικού ακρότατου σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση μας επιτρέπει να βγάλουμε συμπεράσματα για την παράγωγο της συνάρτησης στο σημείο αυτό, όπως μας λέει το επόμενο γνωστό Θεώρημα.

Θεώρημα 4.8.2(*Θεώρημα του Fermat*). *Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x_0 και στο x_0 παρουσιάζει ακρότατο, τότε $f'(x_0) = 0$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0, τότε υπάρχει $\delta > 0$, έτσι ώστε

$$f(x) - f(x_0) \leq 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

από τον Ορισμό 4.2.1 όμως έχουμε

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_- \geq 0, \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+ \leq 0.$$

Η ύπαρξη όμως της παραγώγου αποδεικνύει το Θεώρημα. □

Γεωμετρικά το Θεώρημα του Fermat ερμηνεύεται ως εξής: Σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η εφαπτομένη σε τοπικό ακρότατο είναι παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα. Το αντίστροφο του Θεωρήματος 4.8.2 δυστυχώς δεν ισχύει. Ο μηδενισμός της παραγώγου μάς δίνει πιθανά ακρότατα. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, στο σημείο $x_0 = 0$ έχει $f'(0) = 0$, όμως δεν παρουσιάζει ακρότατο, αφού αριστερά από το $x_0 = 0$ είναι αρνητική και δεξιά θετική.

Ένα κριτήριο για την ύπαρξη ακρότατου στο σημείο x_0 είναι η γνώση της μονοτονίας δεξιά και αριστερά από το επίμαχο σημείο x_0. Αν αριστερά του x_0 η συνάρτηση είναι αύξουσα και δεξιά είναι φθίνουσα, τότε στο x_0 έχουμε τοπικό μέγιστο. Αν αριστερά του x_0 η συνάρτηση είναι φθίνουσα και δεξιά είναι αύξουσα, τότε στο x_0 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Ένα άλλο κριτήριο είναι η γνώση της τιμής των παραγώγων υψηλότερης τάξης στο σημείο x_0.

Θεώρημα 4.8.3 *Αν για μια συνάρτηση $f(x)$, η $f^{(2n)}(x)$ υπάρχει και είναι συνεχής σε μια περιοχή του x_0 και επιπλέον ισχύει*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0, \text{ και } f^{(2n)}(x_0) \neq 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

τότε

- $f^{(2n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ *τοπικό ελάχιστο στο* x_0
- $f^{(2n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ *τοπικό μέγιστο στο* x_0.

Απόδειξη: Αφού η $f'(x_0) = 0$, στο x_0 έχουμε πιθανό τοπικό ακρότατο. Έστω ότι $f^{(2n)}(x_0) > 0$, δηλ η παράγωγος άρτιας τάξης στο σημείο x_0 είναι θετική και όλες οι παράγωγοι μικρότερης τάξης στο x_0 είναι μηδέν. Αφού η $f^{(2n)}$ είναι συνεχής, θα είναι συνεχής και σε μια περιοχή του x_0. Για κάθε x στη περιοχή αυτή θα ισχύει το Θεώρημα Taylor (4.15), οπότε θα ισχύει

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n} > 0,$$

αφού οι όροι του αθροίσματος είναι όλοι μηδέν και ο όρος του υπολοίπου αποτελείται από θετικές ποσότητες (το ξ ανήκει στην περιοχή του x_0, που ισχύει $f^{(2n)}(x_0) > 0$). Παρόμοια αποδεικνύεται η δεύτερη περίπτωση, όπου $f^{(2n)}(x_0) < 0$. □

Παράδειγμα 4.12 *Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin(2x) + 2\cos x$ με $x \in [0, 2\pi]$. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης.*

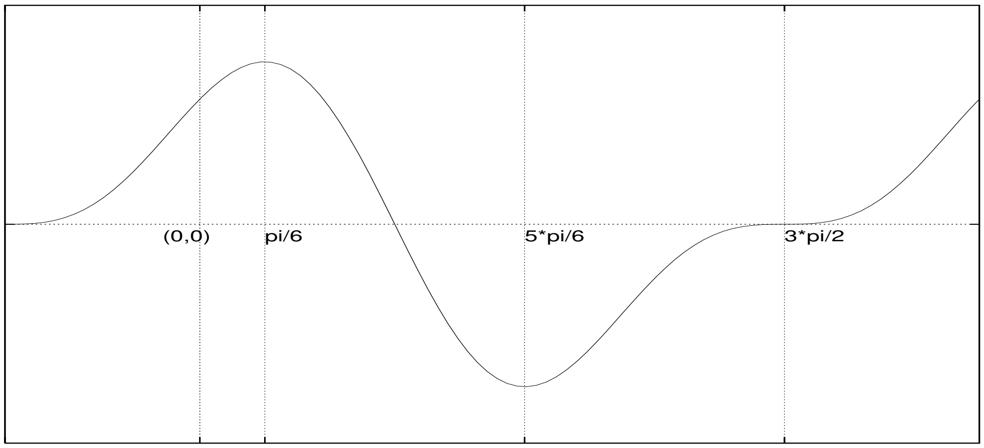
Λύση Εύκολα βρίσκουμε $f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin x$, $f''(x) = -4\sin(2x) - 2\cos x$, $f'''(x) = -8\cos(2x) + 2\sin x$ και όλες είναι συνεχείς συναρτήσεις. Πιθανά ακρότατα έχουμε στα σημεία για το οποία ισχύει

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2x) - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{5\pi}{6},\ x = \frac{3\pi}{2}.$$

Στο σημείο $x_0 = \frac{\pi}{6}$ έχουμε $f'(\frac{\pi}{6}) = 0$, $f''(\frac{\pi}{6}) = -3\sqrt{3}$, είναι φανερό ότι λοιπόν έχουμε τοπικό μέγιστο στο συγκεκριμένο σημείο. Στο σημείο $x_0 = \frac{5\pi}{6}$ έχουμε $f'(\frac{5\pi}{6}) = 0$, $f''(\frac{5\pi}{6}) = 3\sqrt{3}$, οπότε έχουμε τοπικό ελάχιστο. Για το σημείο $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ έχουμε $f'(\frac{3\pi}{2}) = 0$, $f''(3\frac{\pi}{2}) = 0$ και $f'''(\frac{3\pi}{2}) = 6$, που σημαίνει ότι δεν είναι διάφορη από το μηδέν, άρτιας τάξης παράγωγος, σ' αυτό το σημείο, οπότε το Θεώρημα (4.8.3) δεν εφαρμόζεται. Η γραφική παράσταση αυτής φαίνεται στο Σχήμα 4.26. Βοηθούμενοι από το σχήμα να αποφανθείτε για τη μονοτονία της συνάρτησης στο σημείο $x_0 = \frac{3\pi}{2}$.

4.8.2 Άλλα Θεωρήματα

Ένα από τα πλέον γνωστά Θεωρήματα της ανάλυσης είναι το Θεώρημα του Rolle.

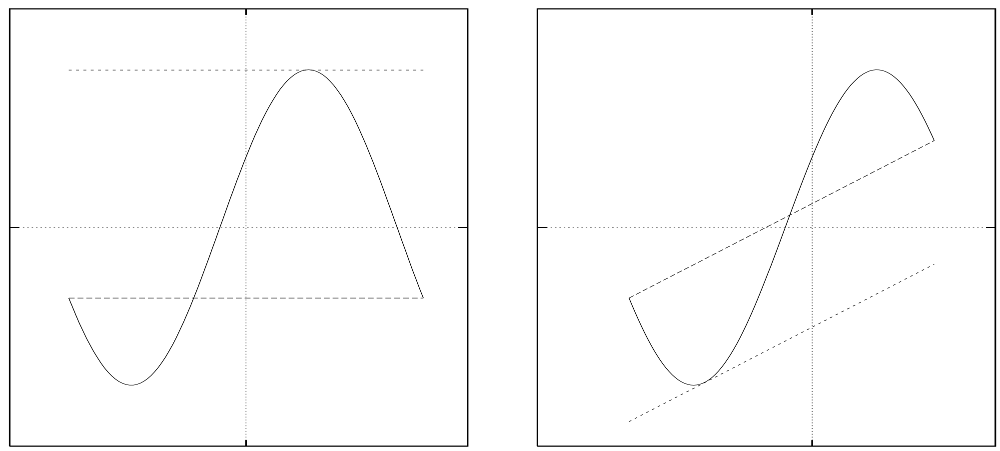


Σχήμα 4.26: Η συνάρτηση $f(x) = \sin(2x) + 2\cos x$.

Θεώρημα 4.8.4(*Θεώρημα του Rolle*). *Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b). Αν ισχύει $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει κάποιο σημείο $x_0 \in (a, b)$ για το οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$.*

Απόδειξη: Αφού η συνάρτηση είναι συνεχής, από το Θεώρημα 3.9.6 θα υπάρχουν x_1 και x_2, ώστε $f(x_1) = \max_{x\in A_f} f(x) = M$ και $f(x_2) = \min_{x\in A_f} f(x) = m$.
Αν $M = m$, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή και μάλιστα $f(x) = f(a)$, οπότε και $f'(x) = 0,\ \forall x \in A_f$.
Αν $M \neq m$, τότε ένα τουλάχιστον από τα δυο θα είναι διαφορετικό από το $f(a)$, έστω ότι $f(x_0) = M \neq f(a)$ με $x_0 \in (a, b)$, οπότε από το Θεώρημα 4.8.2 και $f'(x_0) = 0$. □
Γεωμετρικά, το παραπάνω Θεώρημα ερμηνεύεται ως εξής: Αν μια συνεχής συνάρτηση $f(x)$ συμβαίνει να παίρνει τις ίδιες τιμές στα άκρα ενός κλειστού διαστήματος $[a, b]$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο στο ανοικτό διάστημα (a, b) που η εφαπτομένη αυτής είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα, υπό την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. Τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα 4.27.

Πόρισμα 4.8.5*Μεταξύ δυο ριζών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f(x)$ υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της παραγώγου της.*



Σχήμα 4.27: Τα Θεωρήματα Rolle και Lagrange.

Απόδειξη: Αφού η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη, θα είναι και συνεχής. Έστω ρ_1 και ρ_2 οι δυο ρίζες αυτής. Τότε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$, οπότε ισχύει το Θεώρημα του Rolle και συνεπώς υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$, έτσι ώστε $f'(x_0) = 0$. □

Γενίκευση του παραπάνω αποτελεί το επόμενο Θεώρημα, που είναι γνωστό ως Θεώρημα της μέσης τιμής ή Θεώρημα του Lagrange.

Θεώρημα 4.8.6(*Θεώρημα του Lagrange*). *Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b). Τότε υπάρχει κάποιο σημείο $x_0 \in (a, b)$, για το οποίο ισχύει*

$$f'(x_0) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \tag{4.27}$$

.

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = f(x) - f(b) - \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - b).$$

Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο $[a, b]$, όπως και η $f(x)$. Επίσης, είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b), όπως και η $f(x)$. Επιπλέον,

$F(a) = F(b) = 0$, οπότε ισχύει το Θεώρημα του Rolle. Έτσι, υπάρχει κάποιο σημείο $x_0 \in (a, b)$ για το οποίο ισχύει $F'(x_0) = 0$, από το οποίο προκύπτει η σχέση (4.27). □

Γεωμετρικά, το παραπάνω Θεώρημα ερμηνεύεται ως εξής: Αν μια συνεχής συνάρτηση $f(x)$ συμβαίνει να είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b), τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο που η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στη χορδή που ενώνει τα άκρα. Τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα 4.27. Άλλη ερμηνεία θα μπορούσε να είναι η εξής: σε μια συνάρτηση που πληροί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Lagrange, υπάρχει κάποιο σημείο στο ανοικτό διάστημα (a, b) που η μέση τιμή της συνάρτησης γίνεται ίση με το ρυθμό μεταβολής αυτής. Τρία σημαντικά Θεωρήματα προκύπτουν ως άμεσες συνέπειες του Θεωρήματος του Lagrange. Το ένα από αυτά αναφέρεται στη μονοτονία της συνάρτησης.

Θεώρημα 4.8.7*Έστω f μια συνάρτηση, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο Δ. Τότε*

$$f'(x) = 0,\ \forall x \in \Delta \Longleftrightarrow f(x) = c,\ \forall x \in \Delta,$$

όπου c ένας σταθερός πραγματικός αριθμός.

Απόδειξη: Έστω ότι στο σημείο $x_0 \in \Delta$ έχουμε $f(x_0) = c$. Τότε, για κάθε σημείο $x_1 \in \Delta$ θα ισχύει το Θεώρημα του Lagrange, οπότε

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_0) = c$$

και επομένως $f(x) = c,\ \forall x \in \Delta$. □

Θεώρημα 4.8.8*Έστω f και g δυο συναρτήσεις ορισμένες και παραγωγίσιμες στο Δ. Τότε*

$$f'(x) = g'(x),\ \forall x \in \Delta \Longleftrightarrow f(x) = g(x) + c,\ \forall x \in \Delta,$$

όπου c ένας σταθερός πραγματικός αριθμός.

Απόδειξη: Θεωρούμε την $F(x) = f(x) - g(x)$, γι' αυτή ισχύει $F'(x) = 0$. Από το προηγούμενο Θεώρημα έχουμε $F(x) = c \Leftrightarrow f(x) = g(x) + c$. □

Τα δυο τελευταία Θεωρήματα είναι ιδιαίτερα σημαντικά για τον Ολοκληρωτικό Λογισμό που θα μελετήσουμε στο επόμενο Κεφάλαιο. Το Θεώρημα 4.8.8, επιπλέον, μας λέει ότι η ισότητα των παραγώγων δυο συναρτήσεων **δεν** οδηγεί και σε ισότητα των συναρτήσεων.

Παράδειγμα 4.13_Να δειχτεί ότι η συνάρτηση_

$$f(x) = 2\arctan x - \arcsin\frac{2x}{1+x^2}, \quad |x| < 1$$

είναι σταθερή και να βρεθεί η τιμή της.

Λύση Για να είναι σταθερή η συνάρτηση, θα πρέπει η παράγωγός της να είναι ίση με μηδέν. Είναι ήδη γνωστό ότι

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

οπότε

$$(2\arctan x - \arcsin\frac{2x}{1+x^2})' = \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{2\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}(\frac{2x}{1+x^2})'$$

$$= \frac{2}{1+x^2} - \frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Αφού η παράγωγος της συνάρτησης είναι μηδέν, η συνάρτηση είναι σταθερή και αρκεί να βρούμε την τιμή της για $x = 0$. Έτσι έχουμε $f(0) = 2\arctan 0 - \arcsin 0 = 0$.

Θεώρημα 4.8.9_Μια συνάρτηση $f(x)$ παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ είναι_

α) αύξουσα σ' αυτό, αν και μόνον αν $f'(x) \geq 0,\ x \in \Delta$

β) φθίνουσα σ' αυτό, αν και μόνον αν $f'(x) \leq 0,\ x \in \Delta$

Απόδειξη: α) Έστω η συνάρτηση $f(x)$ και δυο σημεία της x_1 και x_2 στο Δ. Έστω επιπλέον ότι $x_1 < x_2$, τότε η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό (x_1, x_2), οπότε από το Θεώρημα του Lagrange θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ με

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

και αφού $f'(\xi) > 0$ προκύπτει $f(x_1) < f(x_2)$. Το β) αποδεικνύεται παρόμοια. $\Box$

Το Θεώρημα του Lagrange σε συνδυασμό με τη μονοτονία της συνάρτησης γίνεται ένα ισχυρό εργαλείο για την απόδειξη ανισοτήτων.

Παράδειγμα 4.14*Να δειχτεί η επόμενη ανισότητα*

$$(y - x)a^x < \frac{a^y - a^x}{\ln a} < (y - x)a^y, \quad a > 1 \textit{ και } y > x.$$

Λύση Αναδιατάσσοντας την ανισότητα προκύπτει η επόμενη

$$a^x \ln a < \frac{a^y - a^x}{y - x} < a^y \ln a, \quad a > 1 \text{ και } y > x,$$

της οποίας η μεσαία παράσταση μοιάζει πολύ με εκείνη της σχέσης του Θεωρήματος του Lagrange με $f(t) = a^t$, η οποία είναι συνεχής στο $[x, y]$ και παραγωγίσιμη στο (x, y) μάλιστα $f'(t) = a^t \ln a$. Οπότε, ισχύει το Θεώρημα του Lagrange έτσι $\frac{a^y - a^x}{y - x} = a^\xi \ln a$ με $\xi \in (x, y)$. Αφού $a > 1$, έπεται ότι η f είναι αύξουσα, έτσι $x < \xi < y \Rightarrow a^x \ln a < a^\xi \ln a < a^y \ln a$, δηλ.

$$a^x \ln a < \frac{a^y - a^x}{y - x} = a^\xi \ln a < a^y \ln a.$$

Η γνώση του προσήμου της παραγώγου της συνάρτησης σε συνδυασμό με το Θεώρημα 4.8.2 μας λύνουν το πρόβλημα των ακρότατων της συνάρτησης.

Παράδειγμα 4.15*Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x) = x^{-x}$ με $x \in (0, \infty)$.*

Λύση Η συνάρτησή μας είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και μάλιστα ισχύει

$$f'(x) = (x^{-x})' = \left(e^{-x\ln x}\right)' = \left(e^{-x\ln x}\right)(-\ln x - x\frac{1}{x}) = -x^{-x}(\ln x + 1).$$

Οπότε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/e$, συνεπώς στο σημείο $x_0 = 1/e$ η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο. Αφού $x < 1/e \Leftrightarrow \ln x + 1 < 0$ και $x^{-x} > 0$, αμέσως παίρνουμε ότι η f είναι αύξουσα στο διάστημα $(0, 1/e)$. Επίσης, αφού $x > 1/e \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0$, αμέσως παίρνουμε ότι η f είναι φθίνουσα στο διάστημα $(1/e, \infty)$. Έτσι, στο σημείο $x_0 = 1/e$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Η προηγούμενη μελέτη συνοψίζεται στον επόμενο πίνακα

x	0		$1/e$		∞
f'		$+$	0	$-$	
f		↗	τ.μ.	↘	

Το Θεώρημα της μέσης τιμής του Lagrange, για συναρτήσεις δοσμένες με παραμετρικές εξισώσεις ($x = g(t)$ και $y = f(t)$), παίρνει την παρακάτω πιο γενική μορφή και είναι γνωστό ως Θεώρημα της μέσης τιμής του Cauchy.

Θεώρημα 4.8.10*(Θεώρημα του Cauchy) Έστω δυο συναρτήσεις f και g συνεχείς στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα (a, b) με $g(b) \neq g(a)$. Αν $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$. Η συνάρτηση αυτή πληροί τις συνθήκες του Θεωρήματος του Rolle και συνεπώς υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $F'(\xi) = 0$. Αφού $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$, τότε και $g(b) \neq g(a)$, οπότε

$$F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)) \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□

Παράδειγμα 4.16 *Θεωρούμε τη συνάρτηση f που δίνεται με τις παραμετρικές εξισώσεις*

$$x = 2t + 1, \quad y = t^2 - 2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Να βρεθεί σημείο $M(x_0, y_0)$, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τη χορδή AB, όπου $A(-3, 2)$ και $B(3, -1)$.

Λύση Από τις συντεταγμένες των σημείων A και B, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $t \in [-2, 1]$. Στο διάστημα αυτό, οι συναρτήσεις x και y πληρούν το Θεώρημα του Cauchy. Έτσι

$$\frac{y(b) - y(a)}{x(b) - x(a)} = \frac{y'(\xi)}{x'(\xi)} \Leftrightarrow \frac{-1-2}{3-(-3)} = \frac{2\xi}{2} \Leftrightarrow \xi = -\frac{1}{2}.$$

Συνεπώς, η παράλληλη εφαπτομένη προς τη χορδή AB είναι στο σημείο $M(0, -7/4)$.

Παράδειγμα 4.17 *Εστω η f παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ με $f'(a) = f'(b)$. Να δειχτεί ότι*

$$\exists \;\; \xi \in (a, b) \text{ με } f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}.$$

Λύση Θεωρούμε την

$$g : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x \neq a \\ f'(a), & x = a \end{cases}.$$

Η g είναι συνεχής στο $[a, b]$ (αποδεικνύεται εύκολα!) και επομένως έχει μέγιστο στοιχείο (M) και ελάχιστο (m).

1^o) Αν $m = M$, προφανώς η g είναι σταθερή και η f είναι ευθεία. Τότε οι ισχυρισμοί μας ισχύουν.

2^o) Αν $m \neq M$, τότε $\exists$ ξ_1 και ξ_2 $\in [a, b]$ με $g(\xi_1) = m$ και $g(\xi_2) = M$.

Αν ξ_1 ή ξ_2 $\in (a, b)$ τότε πράγματι (Θεώρημα του Fermat)

$$\exists \; \xi \in (a, b) \text{ με } g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}.$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι δεν είναι δυνατόν να έχουμε τα ξ_1 και ξ_2 στα άκρα. Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας $\xi_1 = a$ και $\xi_2 = b$. Έτσι έχουμε

$$m = g(\xi_1) = g(a) = f'(a) = f'(b). \tag{4.28}$$

Επίσης

$$g'(b) = \frac{f'(b)}{b-a} - \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2} = \frac{f'(b)}{b-a} - \frac{g(b)}{(b-a)} = \frac{1}{b-a}(m-M) < 0. \tag{4.29}$$

Όμως τότε η g στο b είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε $\exists\ x$ σε μια περιοχή του b, έτσι ώστε $g(x) > g(b)$. Άτοπο.

4.9 Κανόνας του De l' Hôspital

Στο Θεώρημα 3.8.8 μελετήσαμε την εύρεση και την αντιμετώπιση ορίων συναρτήσεων, όπου οι πράξεις μεταξύ των ορίων επιτρέπονται.
Ωστόσο, αμέσως μετά, στο Παράδειγμα 3.15, είδαμε ότι υπάρχουν όρια, τα οποία δεν είναι δυνατόν να αντιμετωπιστούν με το Θεώρημα 3.8.8, επειδή οι πράξεις δεν επιτρέπονται. Πράξεις που δεν επιτρέπονται και συνήθως αναφέρονται ως **απροσδιόριστες μορφές** είναι οι εξής:

$$\frac{0}{0}, 0\cdot\infty, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0, 0^\infty.$$

Ίσως, εκείνο που πρέπει να ξεκαθαρίσουμε είναι ότι σε ό,τι ακολουθεί δε θα ορίσουμε καινούργιες πράξεις, ώστε αυτές που δεν επιτρέπονται να επιτρέπονται στο μέλλον, ούτε θα προσδιορίσουμε αυτές τις μορφές. Εκείνο που θα κάνουμε είναι ότι θα προτείνουμε μεθόδους για την εύρεση ορίων των οποίων ο προσδιορισμός καταλήγει σε πράξεις που δεν επιτρέπονται.

Θεώρημα 4.9.1 *Έστω δυο συναρτήσεις f και g, ορισμένες και συνεχείς σ' ένα διάστημα $[a,b]$ με $f(a) = g(a) = 0$ και παραγωγίσιμες στο (a,b) με $g'(x) \neq 0$ σ' αυτό· τότε*

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες του Θεωρήματος είναι οι συνθήκες του Θεωρήματος 4.8.10. Θεωρούμε, λοιπόν, τυχαίο σημείο $x \in [a, b]$, οπότε από το Θεώρημα του Cauchy, αφού $f(a) = g(a) = 0$, έχουμε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{με } \xi \in (a, x). \tag{4.30}$$

Επειδή $x \to a^+$ συνεπάγεται $\xi \to a^+$, τότε από την (4.30) θα έχουμε ότι

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Παρατήρηση 4.9.1*Θα μπορούσε κάποιος να παρατηρήσει τα εξής:*

- *Τα παραπάνω ισχύουν ακριβώς τα ίδια για όρια από αριστερά.*
- *Υπό την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις είναι περισσότερες φορές παραγωγίσιμες, το Θεώρημα εφαρμόζεται κι άλλες φορές αν χρειαστεί.*
- *Το Θεώρημα ισχύει και για συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς σ' ένα διάστημα* $(a, b]$ *με* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$, *αφού τότε μπορούμε να ορίσουμε τις συναρτήσεις*

  $$F(x) = \begin{cases} f(x), \ \text{αν } x \neq a \\ 0, \ \text{αν } x = a \end{cases} \qquad \text{και} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x), \ \text{αν } x \neq a \\ 0, \ \text{αν } x = a \end{cases}$$

  και να εφαρμόσουμε το Θεώρημα.
- *Το Θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση που το διάστημα ορισμού είναι της μορφής* $(-\infty, b]$, *αφού αλλάζοντας τη μεταβλητή και θέτοντας* $x = \frac{1}{t}$, *δημιουργούμε συνθήκες κατάλληλες για την εφαρμογή του Θεωρήματος του De l' Hôspital.*

Παράδειγμα 4.18*Να βρεθεί το όριο*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x}.$$

Λύση Παρατηρούμε ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.9.1, οπότε παίρνουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{-\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{-2\tan x(1+\tan^2 x)}=$$

$$-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2(1+\tan^2 x)}=-\frac{1}{2}.$$

Για την περίπτωση που η απροσδιόριστη μορφή είναι $\frac{\infty}{\infty}$ ισχύει το δεύτερο Θεώρημα του De l' Hôspital, το οποίο δίνεται στη συνέχεια χωρίς απόδειξη (ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται θα μπορούσε να δει την απόδειξη στα ([2], [5], [7])).

Θεώρημα 4.9.2 *Έστω δυο συναρτήσεις f και g, ορισμένες, συνεχείς και παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα (a,b) με $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=\infty$ και $g'(x)\neq 0$ σ' αυτό· αν υπάρχει το*

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l, \quad l\in\mathbb{R},$$

τότε

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Παρατήρηση 4.9.2 *Θα μπορούσε κάποιος να παρατηρήσει τα εξής:*

- *Η παρατήρηση (4.9.1) ισχύει τροποποιημένη και για τούτο το Θεώρημα.*
- *Το l μπορεί να είναι και το ∞, αφού αν $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$, τότε $\lim_{x\to a^+}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0$.*
- *Η ύπαρξη του ορίου $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l, \quad l\in\mathbb{R}$ είναι σημαντική, αφού διαφορετικά προκύπτουν «άτοπα», όπως θα δούμε αμέσως.*

Παράδειγμα 4.19 *Εξετάστε αν ισχύει το δεύτερο Θεώρημα του De l' Hôspital για το όριο.*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sin x}$$

Να το υπολογίσετε!

Λύση Αν θέσουμε $f(x) = x$ και $g(x) = x + \sin(x)$, προφανώς και οι δυο είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες παντού στο $\mathbb{R}$ και τα όριο είναι $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Όμως, το όριο

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\cos x}$$

δεν υπάρχει, αφού αυτό ταλαντεύεται από $\frac{1}{2}$ μέχρι $+\infty$. Έτσι, το δεύτερο Θεώρημα του De l' Hôspital για το όριο δεν εφαρμόζεται. Εύκολα όμως υπολογίζουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+\sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}} = 1.$$

Οι άλλες απροσδιόριστες μορφές αντιμετωπίζονται μέσα από τις δυο προηγούμενες. Έτσι, για παράδειγμα, αν έχουμε δυο συναρτήσεις για τις οποίες συμβαίνει $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ κι εμείς θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x\to a} (f(x)g(x))$, τότε εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0$ και $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \pm\infty$, οπότε έχουμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = 0, \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

που το πρώτο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ και το δεύτερο $\frac{\infty}{\infty}$.
Αν έχουμε δυο συναρτήσεις για τις οποίες συμβαίνει $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ και $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ κι εμείς θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x\to a} (f(x) - g(x))$, τότε, αν γίνονται πράξεις, αυτές συνήθως μας οδηγούν σε μια από τις προηγούμενες μορφές· επίσης εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0$ και $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$, οπότε έχουμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\frac{1}{g(x)}},$$

που είναι της μορφής $\frac{0}{0}$.
Οι άλλες μορφές είναι εκθετικές και αντιμετωπίζονται με τη γνωστή ιδιότητα των λογαρίθμων, αφού εξασφαλίσουμε ότι πληρούνται οι περιορισμούς των λογαρίθμων,

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x)\ln(f(x))},$$

οπότε έχουμε πάντοτε να αντιμετωπίσουμε τη μορφή $0 \cdot \infty$.

Πριν κλείσουμε αυτήν την παράγραφο, θα πρέπει να τονίσουμε ότι ο Κανόνας του De l' Hôspital είναι ένα ισχυρότατο εργαλείο για την εύρεση ορίων, ωστόσο υπάρχουν περιπτώσεις, π.χ. σε περιπτώσεις με ριζικά, που πρέπει να καταφύγουμε στις κλασσικές μεθόδους, αφού αυτός δε δίνει λύση.

Παράδειγμα 4.20 *Να υπολογίσετε το όριο*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x^2+2}}.$$

Λύση Προσπαθώντας, τώρα, να εφαρμόσουμε τον κανόνα του De l' Hôspital καταλήγουμε σε αδιέξοδο, αφού θέτοντας $f(x) = \sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x}$ και $g(x) = \sqrt{2x+1}-\sqrt{x^2+2}$ έχουμε

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\sqrt{2x+1}\sqrt{x^2+2}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x})}{\sqrt{2x}\sqrt{x^2+1}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x^2+2})}.$$

Πολλαπλασιάζοντας όμως, με κατάλληλες παραστάσεις αριθμητή και παρανομαστή παίρνουμε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x^2+1-2x)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x+1})}{(2x+1-x^2-2)(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x})} = \frac{(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x+1})}{(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x})} \xrightarrow[x\to 1]{} 1\ .$$

4.10 Ασύμπτωτες

Η συμπεριφορά ενός σημείου $M(x,y)$ μιας συνάρτησης $y = f(x)$ γύρω από ένα σημείο $M(x_0,y_0)$ του πραγματικού επιπέδου, δηλ. ενός σημείου με συντεταγμένες πραγματικές, εύκολα ή δύσκολα μπορεί, εν γένει, να προσδιοριστεί ή να καταστεί γνωστή. Η συμπεριφορά του όμως στο άπειρο είναι κάτι που δεν είναι εύκολο να απεικονιστεί. Εκείνο που, ίσως, θα μας έδινε μια εικόνα σχετικά με τη συμπεριφορά του είναι το κατά πόσο το σημείο μας πλησιάζει στα σημεία μιας ευθείας, αφού η συμπεριφορά της ευθείας στο άπειρο είναι γνωστή.

Τρεις καταστάσεις είναι δυνατόν να εμφανιστούν για τις συντεταγμένες του σημείου $M(x,y)$:

1. Το $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ και $y \to \infty$

2. Το $x \to \infty$ και $y \to y_0 \in \mathbb{R}$

3. Το $x \to \infty$ και $y \to \infty$.

Στην πρώτη περίπτωση, καθώς το $x \to x_0$ και $y \to \infty$, η συνάρτησή μας τείνει στην ευθεία $x = x_0$, γι' αυτό ορίζουμε

Ορισμός 4.10.1*Η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτησης f, αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$.*

Στην περίπτωση αυτή καθορίζεται και η πλευρά από την οποία πλησιάζουν τα σημεία της συνάρτησής μας τα σημεία της ευθείας, αφού είναι γνωστό το πώς τείνει το x στο x_0. Πιθανά σημεία για έλεγχο είναι τα σημεία που μηδενίζουν τον παρανομαστή και γενικά τα σημεία στα οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση.
Για τις άλλες δυο περιπτώσεις θεωρούμε τη συνάρτηση της ευθείας $y = ax + b$ και θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές a και b, όταν το όριο της διαφοράς $f(x) - ax - b$ τείνει στο μηδέν.

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax - b) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} x\Big(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\Big) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a,$$

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax - b) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b.$$

Έτσι δίνουμε τον επόμενο ορισμό

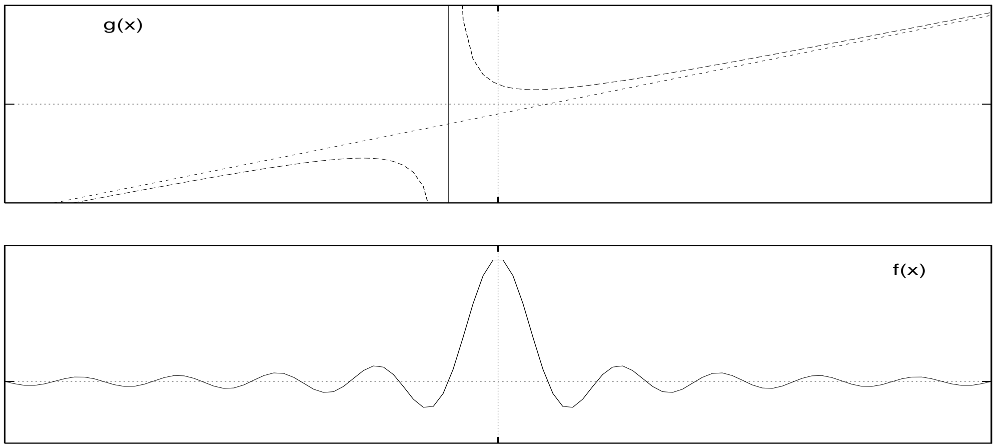
Ορισμός 4.10.2*Η ευθεία $y = ax + b$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης f, αν $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ και $\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b$. Όταν $a = 0$, τότε $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ και η ευθεία λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη.*

Παράδειγμα 4.21*Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των συναρτήσεων*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \ x \neq 0 \\ 1, \ x = 0 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 1}.$$

Λύση Για την πρώτη συνάρτηση το σημείο $x = 0$ είναι σημείο που πρέπει να προσέξουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη. Αφού όμως έχουμε $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, δεν έχουμε κατακόρυφο ασύμπτωτη. Εύκολα κάποιος βρίσκει

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0 \text{ και } \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$



Σχήμα 4.28: Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$

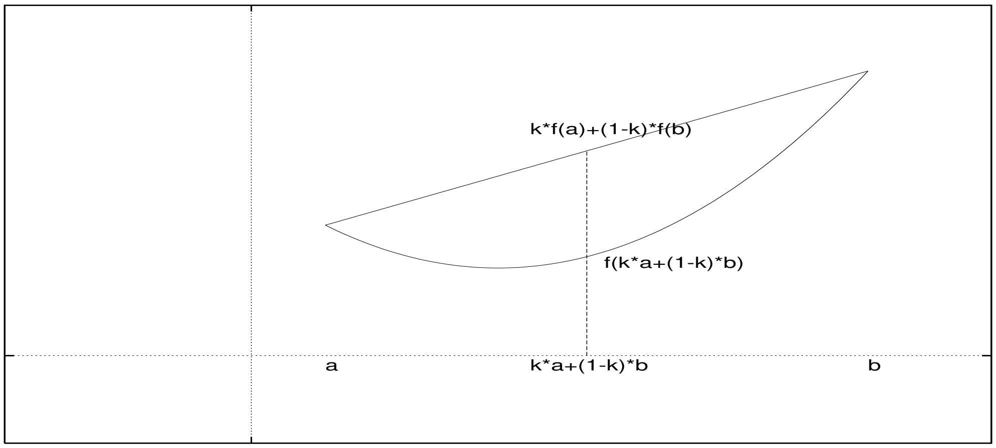
Έτσι η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη.
Για τη δεύτερη συνάρτηση το σημείο $x = -1$ είναι σημείο όπου δεν ορίζεται η συνάρτηση και γι' αυτό πρέπει να εξετάσουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη. Αφού έχουμε $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$, έχουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = -1$. Επίσης, εύκολα κάποιος βρίσκει

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^2+x} = 1 \text{ και } \lim_{x\to\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\infty} \frac{-x+2}{x-1} = -1.$$

Έτσι η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη. Οι γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων με τις ασύμπτωτές τους φαίνονται στο Σχήμα 4.28.

4.11 Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

Η καμπυλότητα στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι ένα άλλο χαρακτηριστικό που ενδιαφέρει. Είναι στενά συνδεδεμένη με την έννοια της κυρτής και κοίλης συνάρτησης, έννοιες που είναι στενά συνδεδεμένες με τη θεωρία της βελτιστοποίησης. Ο πρωτοετής φοιτητής είναι εξοικειωμένος με την έννοια της κυρτότητας από το Γυμνάσιο, αφού από πολύ νωρίς έχει ακούσει για κυρτές γωνίες, κυρτά σχήματα κ.λπ. Τα κυρτά σύνολα έχουν την ιδιότητα ότι, αν ενώσουμε δυο οποιαδήποτε σημεία τους με ένα ευθύγραμμο τμήμα, ολόκληρο το



Σχήμα 4.29: Η παράσταση της κυρτής συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

τμήμα βρίσκεται μέσα στο σχήμα. Αν $\vartheta \in (0, 1)$, τότε ο γραμμικός συνδυασμός $\vartheta x_0 + (1 - \vartheta)x_1$ εκφράζει κάθε εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος $x_0 x_1$. (Βλ. Άσκηση 4.13).

Ορισμός 4.11.1 *Η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, λέμε ότι είναι κυρτή στο $[a, b]$ αν για κάθε x_0 και x_1 στο $[a, b]$ και κάθε $\vartheta \in (0, 1)$ ισχύει*

$$\vartheta f(x_0) + (1 - \vartheta)f(x_1) \geq f(\vartheta x_0 + (1 - \vartheta)x_1). \tag{4.31}$$

Η f καλείται κοίλη, όταν η $-f$ είναι κυρτή.

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι για την κοίλη συνάρτηση η ανισότητα ισχύει με αντίθετη φορά. Ο κυρτός συνδυασμός των x_0 και x_1 είναι προφανώς ένα εσωτερικό σημείο x των $x_0 x_1$ και μας δίνει

$$x = \vartheta x_0 + (1 - \vartheta)x_1 \Leftrightarrow \vartheta = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \tag{4.32}$$

Γίνεται, πλέον, φανερό ότι η σχέση (4.31), συνδυασμένη με την (4.32), μας δίνει

$$f(x) \leq f(x_1) + \vartheta(f(x_1) - f(x_0)) = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Η τελευταία, γεωμετρικά, λέει ότι κάθε σημείο της καμπύλης βρίσκεται κάτω από τη χορδή AB, όπου $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_1, f(x_1))$. (Βλ. Σχήμα 4.29).

Παράδειγμα 4.22 *Να δειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι κυρτή.*

Λύση Πράγματι για κάθε x_0 και x_1 ισχύει

$$f(\vartheta x_0 + (1-\vartheta)x_1) = |\vartheta x_0 + (1-\vartheta)x_1| \leq |\vartheta x_0| + |(1-\vartheta)x_1| =$$

$$\vartheta|x_0| + (1-\vartheta)|x_1| = \vartheta f(x_0) + (1-\vartheta)f(x_1),$$

αφού οι ποσότητες ϑ και $1-\vartheta$ είναι θετικές.

Παράδειγμα 4.23 *Να δειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι κυρτή.*

Λύση Πράγματι για κάθε x_0 και x_1 ισχύει

$$\vartheta f(x_0) + (1-\vartheta)f(x_1) \geq f(\vartheta x_0 + (1-\vartheta)x_1) \Leftrightarrow$$

$$\vartheta x_0^2 + (1-\vartheta)x_1^2 \geq (\vartheta x_0 + (1-\vartheta)x_1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\vartheta x_0^2 + (1-\vartheta)x_1^2 \geq \vartheta^2 x_0^2 + (1-\vartheta)^2 x_1^2 + 2\vartheta(1-\vartheta)x_0 x_1 \Leftrightarrow$$

$$\vartheta(1-\vartheta)(x_0 - x_1)^2 \geq 0,$$

που ισχύει, αφού $\vartheta(1-\vartheta)(x_0 - x_1)^2 > 0$.

Οι κυρτές συναρτήσεις έχουν δυο σπουδαίες ιδιότητες, τις οποίες θα αναφέρουμε χωρίς απόδειξη. Ο φοιτητής που ενδιαφέρεται θα μπορούσε να κοιτάξει σε βιβλία Μαθηματικής Ανάλυσης π.χ. ([2],[7]).

- Κάθε κυρτή συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα $[a, b]$ είναι συνεχής.
- Για κάθε κυρτή συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα $[a, b]$, σε κάθε σημείο του διαστήματός της, υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι.

Θεώρημα 4.11.2 *Έστω η συνάρτηση f που είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$· η f είναι κυρτή στο παραπάνω διάστημα, αν και μόνον αν για κάθε x και y με $x \neq y$ στο $[a, b]$ ισχύει*

$$f(y) \geq f(x) + (y - x)f'(x). \tag{4.33}$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε, αρχικά, ότι αν ισχύει η σχέση (4.33), η συνάρτηση είναι κυρτή. Έστω y και z δυο τυχαία σημεία στο $[a,b]$ και $x \in (y,z)$, οπότε $x = \vartheta y + (1-\vartheta)z$ με $\vartheta \in (0,1)$. Αφού ισχύει η σχέση (4.33), έχουμε

$$\begin{aligned} f(y) \geq f(x) + (y-x)f'(x) &\Leftrightarrow \vartheta f(y) \geq \vartheta f(x) + \vartheta(y-x)f'(x) \\ f(z) \geq f(x) + (z-x)f'(x) &\Leftrightarrow (1-\vartheta)f(z) \geq (1-\vartheta)f(x) + (1-\vartheta)(z-x)f'(x) \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δυο προηγούμενες έχουμε

$$\begin{aligned} \vartheta f(y) + (1-\vartheta)f(z) &\geq \vartheta f(x) + (1-\vartheta)f(x) \\ &+ [\vartheta y + (1-\vartheta)z - \vartheta x - (1-\vartheta)x]f'(x) \\ &= f(x) + (x-x)f'(x) = f(x) = f(\vartheta y + (1-\vartheta)z). \end{aligned}$$

Αντιστρόφως, θεωρούμε τώρα ότι η f είναι κυρτή και x, y δυο σημεία στο $[a,b]$ με $x \neq y$, τότε για κάθε $\vartheta \in (0,1)$ θα ισχύει

$$\frac{f((1-\vartheta)x + \vartheta y) - f(x)}{\vartheta} \leq \frac{(1-\vartheta)f(x) + \vartheta f(y) - f(x)}{\vartheta} = f(y) - f(x).$$

Το πρώτο μέλος της προηγούμενης σχέσης αναδιατασσόμενο μας δίνει

$$\frac{f((1-\vartheta)x + \vartheta y) - f(x)}{\vartheta} = (y-x)\frac{f(x + \vartheta(y-x)) - f(x)}{\vartheta(y-x)},$$

οπότε προκύπτει η επόμενη ανισότητα

$$(y-x)\frac{f(x + \vartheta(y-x)) - f(x)}{\vartheta(y-x)} \leq f(y) - f(x).$$

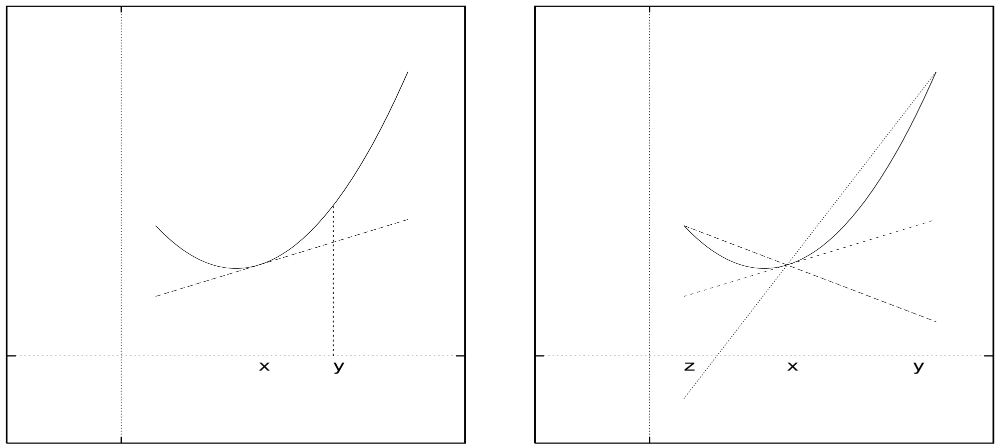
Η τελευταία με $\vartheta \to 0$ δίνει

$$(y-x)f'(x) \leq f(y) - f(x) \Leftrightarrow f(y) \geq f(x) + (y-x)f'(x),$$

που είναι η ζητούμενη. □

Δυο σημαντικές, διαφορετικές γεωμετρικές προσεγγίσεις μπορούν να γίνουν στο προηγούμενο Θεώρημα.

- Η πρώτη είναι η εξής: Κάθε σημείο της καμπύλης βρίσκεται πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της.



Σχήμα 4.30: Η ερμηνεία του Θεωρήματος 4.11.2.

- Για τη δεύτερη χρειάζεται μια μικρή τροποποίηση της σχέσης (4.33). Αν $y > x$ μας δίνει

$$f(y) \geq f(x) + (y-x)f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq f'(x), \tag{4.34}$$

ενώ αν $y < x$, παίρνουμε

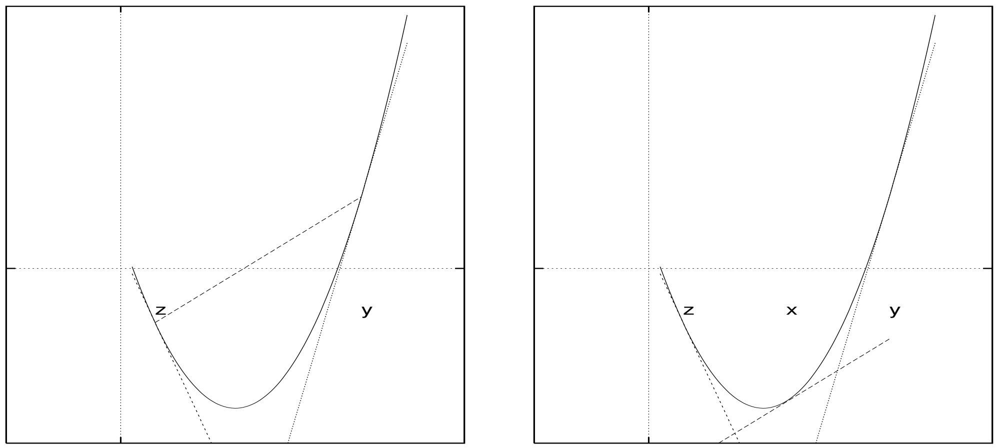
$$f(y) \geq f(x) + (y-x)f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(x). \tag{4.35}$$

Εκείνο που γίνεται, τώρα, φανερό είναι ότι η κλίση οποιασδήποτε χορδής της καμπύλης είναι μεγαλύτερη από την κλίση της εφαπτομένης της, στο αριστερό της άκρο, και μικρότερη από την κλίση της εφαπτομένης της, στο δεξιό της άκρο.

Τα παραπάνω φαίνονται παραστατικά στο Σχήμα 4.30.

Ήδη έχει φανεί ότι η κυρτότητα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης έχει στενή σχέση με την παράγωγο αυτής. Το επόμενο Θεώρημα επιβεβαιώνει του λόγου το αληθές.

Θεώρημα 4.11.3 *Έστω η συνάρτηση f που είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$· η f είναι κυρτή στο παραπάνω διάστημα, αν και μόνον αν η f' είναι αύξουσα σ' αυτό.*



Σχήμα 4.31: Η ερμηνεία της απόδειξης του Θεωρήματος 4.11.3.

Απόδειξη: Θεωρούμε αρχικά ότι η f είναι κυρτή. Έστω τώρα x και y δυο σημεία του $[a, b]$ με $x < y$. Από το προηγούμενο Θεώρημα 4.11.2 και ιδιαίτερα από τις σχέσεις (4.34) και (4.35) παίρνουμε

$$f'(x) < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} < f'(y).$$

Αντιστρόφως, αν η f' είναι αύξουσα και x, y δυο σημεία του $[a, b]$ με $x < y$, τότε, από το Θεώρημα 4.8.6 (Θεώρημα του Lagrange) και το γεγονός ότι η f' είναι αύξουσα, θα υπάρχει κάποιο σημείο ξ με $x < \xi < y$, έτσι ώστε

$$f'(x) < f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < f'(y)$$

Το ευθύ και το αντίστροφο απεικονίζονται στο Σχήμα 4.31. □

Από το Θεώρημα 4.8.9 προκύπτει ότι η f' αύξουσα ισοδυναμεί με τη f'' θετική, υπό την προϋπόθεση ότι η f' παραγωγίζεται. Έτσι, αβίαστα, προκύπτει το επόμενο Πόρισμα.

Πόρισμα 4.11.4 *Έστω η συνάρτηση f που είναι ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$· η f είναι κυρτή στο παραπάνω διάστημα, αν και μόνον αν η f'' είναι θετική σ' αυτό.*

Όσα προαναφέραμε για τις κυρτές συναρτήσεις ισχύουν κατάλληλα προσαρμοσμένα και για τις κοίλες. Έτσι, στο προηγούμενο πόρισμα με τις ίδιες προϋποθέσεις η $f'' < 0$ ισοδυναμεί με κοίλη συνάρτηση κ.λπ. Αξίζει να τονίσουμε ότι το σημείο στο οποίο μια συνάρτηση f αλλάζει καμπυλότητα, δηλ. από κυρτή γίνεται κοίλη ή από κοίλη κυρτή, λέγεται **«σημείο καμπής»** (σ.κ.). Ως πιθανά σημεία καμπής ελέγχουμε τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η f'', εφόσον υπάρχει ή δεν ορίζεται η f' (π.χ. $f'_- \neq f'_+$).

Παράδειγμα 4.24 *Να βρεθούν τα σημεία καμπής και να μελετηθεί ως προς την καμπυλότητα, δηλ. πότε είναι κυρτή και πότε κοίλη, η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in (-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}] \\ \sin(x - \frac{\pi}{3}), & x \in (\frac{2\pi}{3}, 2\pi) \end{cases}$$

Λύση Η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης είναι

$$f''(x) = \begin{cases} -\sin x, & x \in (-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(x - \frac{\pi}{3}), & x \in (\frac{2\pi}{3}, 2\pi) \end{cases} .$$

Στο σημείο $x_0 = \frac{2\pi}{3}$ αυτή δεν ορίζεται, αφού δεν ορίζεται η πρώτη παράγωγος στο σημείο αυτό. Πράγματι κάποιος εύκολα μπορεί να υπολογίσει (να βρεθεί!) ότι

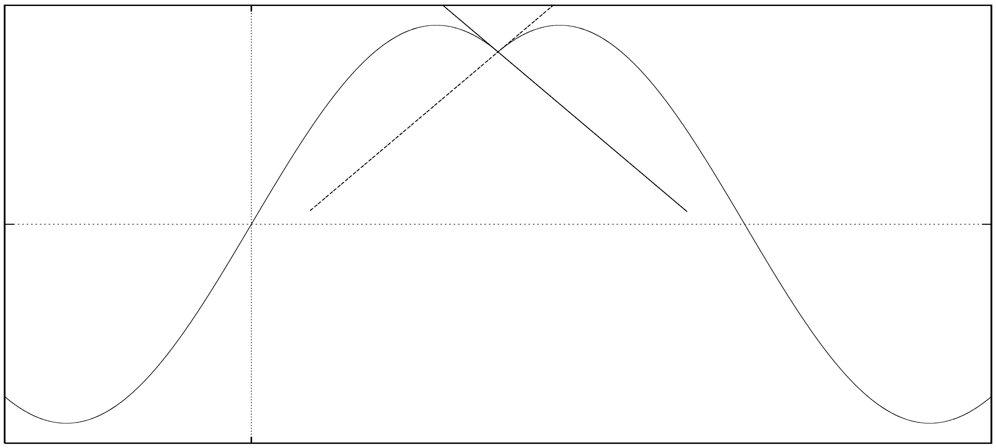
$$f'_-(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} = f'_+(\frac{2\pi}{3}).$$

Επίσης, $f''(x) = 0$ μας δίνει τα σημεία $x_1 = 0$ και $x_2 = \frac{4\pi}{3}$, τα οποία είναι κρίσιμα σημεία για σημεία καμπής. Η μελέτη του προσήμου της δεύτερης παραγώγου και της καμπυλότητας της συνάρτησης φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\frac{2\pi}{3}$		0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
f''		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f									

ενώ η γραφική παράσταση αυτής δίνεται στο Σχήμα 4.32.

Πριν κλείσουμε την παράγραφο αυτή, θα δώσουμε ένα Θεώρημα αντίστοιχο του Θεωρήματος 4.8.3, όπου η ύπαρξη σημείου καμπής εξασφαλίζεται από τη γνώση της τιμής της παραγώγου υψηλότερης τάξης.



Σχήμα 4.32: Η γραφική παράσταση της f του παραδείγματος (4.24).

Θεώρημα 4.11.5 *Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$, οι $2n+1$ παράγωγοι της f υπάρχουν και είναι συνεχείς και επιπλέον*

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(2n)}(x_0) = 0 \text{ και } f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0 \text{ με } n \geq 1,$$

τότε στο x_0 έχουμε σημείο καμπής.

Απόδειξη: Αναπτύσσοντας την f σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο x_0 έχουμε

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \underbrace{\sum_{k=2}^{2n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)}_{0} + \frac{(x-x_0)^{2k+1}}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(\xi).$$

Έτσι, αν $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$, η ποσότητα $\frac{(x-x_0)^{2k+1}}{(2k+1)!}$ δεξιά του x_0 είναι θετική, οπότε $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) > 0$ και η f είναι κυρτή (από το Θεώρημα 4.11.2), ενώ αριστερά του x_0 η ποσότητα $\frac{(x-x_0)^{2k+1}}{(2k+1)!}$ είναι αρνητική και η f είναι κοίλη. Συνεπώς, στο x_0 αλλάζει η μονοτονία. Παρόμοια συμβαίνουν, αν $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$. □

4.12 Η Μελέτη της συνάρτησης

Συγκεντρώνοντας όλα όσα αναφέραμε μέχρι τώρα θα μπορούσαμε, γενικά, να πούμε ότι για να μελετήσουμε μια συνάρτηση μπορούμε ή πρέπει να κάνουμε τις επόμενες ενέργειες:

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f και εξετάζουμε την περιοδικότητα και τις συμμετρίες (άρτια–περιττή) αυτής, εφόσον είναι εφικτό.
- Εντοπίζουμε όσα χαρακτηριστικά σημεία της συνάρτησης (σημεία τομής με τους άξονες) μπορούμε.
- Εξετάζουμε τη συνέχεια αυτής στα διαστήματα που ορίζεται, δίνοντας προσοχή στα άκρα αυτών.
- Βρίσκουμε τις ασύμπτωτες αυτής, αν υπάρχουν.
- Βρίσκουμε την παράγωγο αυτής και με τη βοήθειά της μελετούμε τη μονοτονία και εντοπίζουμε τα ακρότατα εξετάζοντας τη συνάρτηση στα κρίσιμα σημεία της.
- Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο f'', αν υπάρχει, και με τη βοήθειά της μελετούμε την καμπυλότητά της και εντοπίζουμε τα σημεία καμπής εξετάζοντας την συνάρτηση στα κρίσιμα σημεία της f'.

Παράδειγμα 4.25*Να μελετηθεί η συνάρτηση*

$$f(x)=\begin{cases} |x|^x, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases} .$$

Λύση Ως πεδίο ορισμού της συνάρτησης θεωρούμε το $\mathbb{R}$, αφού αυτή ορίζεται παντού μέσα σ' αυτό. Συμμετρίες και περιοδικότητες δεν υπάρχουν και ως εκ τούτου θα μελετήσουμε την $f(x)$ ως προς τη συνέχεια. Η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως $|x|^x = e^{x\ln|x|}$, με $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Έτσι, μπορούμε να δούμε ότι αυτή είναι συνεχής και στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,\infty)$. Η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$, όπου πράγματι έχουμε

$$\lim_{x\to 0}|x|^x=\lim_{x\to 0}e^{x\ln|x|}=e^{\lim_{x\to 0}x\ln|x|}=e^0=1=f(0),$$

αφού παίρνοντας υπόψη μας τη σχέση (4.6) μπορούμε να βρούμε

$$\lim_{x\to 0} x\ln|x| = \lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln|x|)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Ο οριζόντιος άξονας είναι ασύμπτωτη της καμπύλης μας, αφού εύκολα προκύπτει ότι $\lim_{x\to-\infty}|x|^x = 0$, ενώ πλάγιες δεν υπάρχουν.

Η παράγωγος στα διαστήματα της συνέχειάς της είναι $f'(x) = (|x|^x)' = |x|^x(\ln|x|+1)$, ενώ στο σημείο $x_0 = 0$ έχουμε

$$f'(1) = \lim_{x\to 0}\frac{|x|^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|^x(\ln|x|+1)}{1} = -\infty.$$

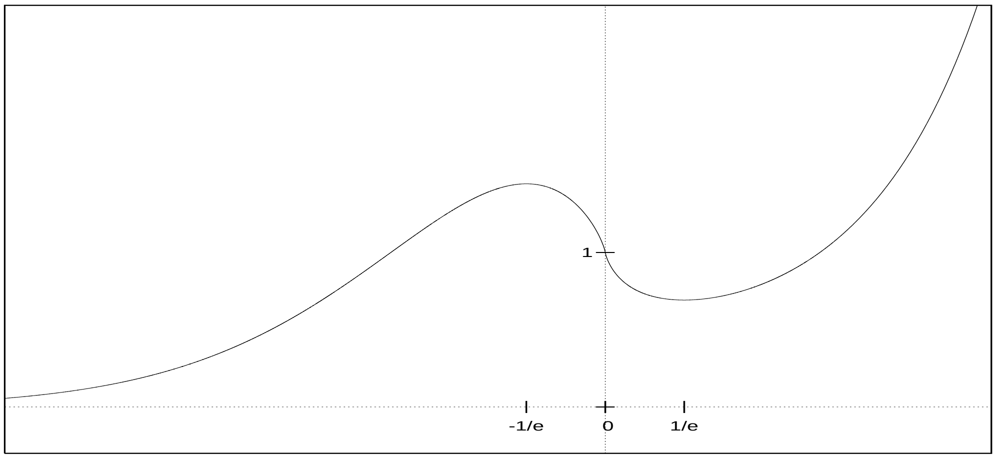
Με $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln|x| = -1 \Leftrightarrow |x| = e^{-1}$. Τα κρίσιμα σημεία, λοιπόν, είναι $x_0 = 0,\ x_1 = -1/e,\ x_2 = 1/e$. Το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται από το πρόσημο της ποσότητας $\ln|x|+1$, αφού $|x|^x > 0$. Έτσι, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας, όπου φαίνονται τα τοπικά μέγιστα, ελάχιστα και η μονοτονία.

x	∞		$-1/e$		0		$1/e$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$		$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	

Για τη δεύτερη παράγωγο έχουμε ότι στο σημείο $x_0 = 0$ αυτή δεν ορίζεται και ως εκ τούτου το σημείο αυτό είναι κρίσιμο σημείο. Στα διαστήματα ορισμού της έχουμε ότι $f''(x) = |x|^x[(\ln|x|+1)^2 + \frac{1}{x}]$. Είναι φανερό ότι $f''(x) > 0, \forall x > 0$, ενώ για $x < 0$, αφού $|x|^x > 0$, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (\ln(-x) + 1)^2 + \frac{1}{x}$ και εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε (η απόδειξη μένει για άσκηση) ότι έχει μοναδική ρίζα την τιμή $x_3 = -1$. Έτσι, μπορούμε να δημιουργήσουμε τον παρακάτω πίνακα, στον οποίο φαίνεται η καμπυλότητα αυτής.

x	∞		-1		0		∞
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$		$\smile$	σ.κ.	$\frown$	σ.κ.	$\smile$	

Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 4.33.



Σχήμα 4.33: Η γραφική παράσταση της $f(x) = |x|^x$.

Ασκήσεις

Άσκηση 4.1 *Δείξτε ότι, αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο* x_0, *τότε δεν παραγωγίζεται σ' αυτό.*

Άσκηση 4.2 *Εξετάστε ως προς τη συνέχεια και την παραγώγιση στο σημείο* 0 *τη συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \sqrt[3]{x} - 1, & x < 0 \end{cases}.$$

Άσκηση 4.3 *Δείξτε ότι, αν δυο συναρτήσεις παραγωγίζονται* n *φορές, τότε ισχύει*

1) $(f \cdot g)'' = f \cdot g'' + 2f'g' + f'' \cdot g$, 2) $(f \cdot g)^{(3)} = f \cdot g^{(3)} + 3f'g'' + 3f''g' + f^{(3)} \cdot g$.

(Μήπως μαντεύετε το γενικό τύπο;)

Άσκηση 4.4 *Να βρεθούν οι παράγωγοι των πεπλεγμένων συναρτήσεων*

$$1)\ 3^x - 3^y = 3^{x-y}, \quad 2)\ x + y = \ln(x+y),\ \mu\epsilon\ x + y > 0,$$

$$3)\ \sqrt{x^2 + y^2} = e^{\arctan \frac{x}{y}},\ \mu\epsilon\ y \neq 0.$$

Άσκηση 4.5 *Βρείτε το διαφορικό των* $f(x) = \cos x$ *και* $f(x) = \sin x$. *Να χρησιμοποιηθούν, για να βρεθεί μια προσεγγιστική τιμή για τα α)*$\cos\frac{\pi}{50}$ *β)*$\sin 0.0012$.

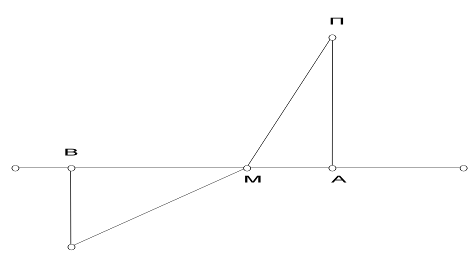
Άσκηση 4.6 *Να βρεθούν με δυναμοσειρές τα* e^{ix} *και* $\cos x + i\sin x$, *όπου* $i = \sqrt{-1}$. *Να συγκριθούν.*

Άσκηση 4.7 *Δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις διαφέρουν κατά σταθερά, αφού πρώτα εντοπίσετε το κοινό πεδίο ορισμού τους (*$a \neq 0$*).*

$$1)\ \begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{a}\operatorname{arg}\tanh\frac{x}{a} \\ f_2(x) = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} g_1(x) = \operatorname{arg}\sinh\frac{x}{a} \\ g_2(x) = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| \end{cases}$$

Άσκηση 4.8 *Ένα κομμάτι σύρμα κόβεται σε δυο κομμάτια και κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο κι έναν κύκλο. Βρείτε σε ποιο σημείο του πρέπει να κοπεί το σύρμα, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δυο σχημάτων να είναι μέγιστο.*

Άσκηση 4.9 *Στο διπλανό σχήμα ο παρατηρητής (Π) πρέπει να πάει το συντομότερο δυνατό στο παρατηρητήριο, εντός της λίμνης (Σ). Στο έδαφος ο παρατηρητής τρέχει με ταχύτητα* $6Km/h$, *ενώ στη λίμνη με τη μισή. Να βρεθεί, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της διχοτόμησης ή όποιο άλλο τρόπο θέλετε, το σημείο (Μ), αν είναι γνωστό ότι ΠΑ=*$100m$, *ΣΒ=*$60m$ *και ΑΒ=*$200m$.



Άσκηση 4.10 *Σ' ένα κυλινδρικό δοχείο ακτίνας* $R = 10cm$, *σε υγρό ικανού ύψους* h *φυλάσσονται* 10^6 *μόρια σφαιρικού οργανισμού ακτίνας* $r = 0.01cm$. *Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας των οργανισμών, αν το ύψος της στάθμης του υγρού ανεβαίνει με ταχύτητα* $0.2cm/sec$.

Άσκηση 4.11 *Θεωρώντας ότι το ωριαίο κόστος ενός σκάφους, που κινείται με σταθερή ταχύτητα, δίνεται από τον τύπο* $a + bv^n$, $n > 1$, *όπου* a *και* b *σταθερές, να βρεθεί η ταχύτητα που πρέπει να κινείται, αυτό ώστε να έχουμε το ελάχιστο κόστος.*

Άσκηση 4.12 *Να βρεθεί το ορθογώνιο (με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες), με το μέγιστο εμβαδόν, που εγγράφεται στην έλλειψη*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Άσκηση 4.13 *Αν $\vartheta \in (0,1)$, να δειχθεί ότι ο γραμμικός συνδυασμός $\vartheta x_0 + (1-\vartheta)x_1$ εκφράζει κάθε εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος x_0x_1 α)$x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ β)$x_0, x_1 \in \mathbb{R}^2$.*

Αόριστο Ολοκλήρωμα

5.1 Γενικά

Το αντίστροφο πρόβλημα της παραγώγισης είναι η ολοκλήρωση. Ολοκλήρωση δηλ. είναι η διαδικασία, με την οποία, όταν μας δίνεται μια συνάρτηση, εμείς βρίσκουμε από ποια συνάρτηση προήλθε αυτή με παραγώγιση. Διαφορετικά, όταν γνωρίζουμε το ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης βρίσκουμε τη συνάρτηση στην οποία αντιστοιχεί. Το πλήθος των πραγματικών προβλημάτων στις διάφορες επιστήμες είναι ακριβώς αυτού του είδους. Γνωρίζουμε το ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης και όχι την ίδια τη συνάρτηση ή γνωρίζουμε μια σχέση που συνδέει τη συνάρτηση με το ρυθμό μεταβολής αυτής και ψάχνουμε να βρούμε τη συνάρτηση. Σε αντίθεση με το πρόβλημα της παραγώγισης το πρόβλημα της ολοκλήρωσης είναι μεγάλο και πολύπλοκο. Ωστόσο, σχετικά με το πρόβλημα αυτό, έχουν γίνει πάρα πολλά μέχρι σήμερα και σε ένα μεγάλο αριθμό προβλημάτων έχει δοθεί λύση.

5.2 Ορισμοί και στοιχειώδη ολοκληρώματα

Ορισμός 5.2.1 *Έστω η συνάρτηση f με $A_f \subseteq \mathbb{R}\cdot$ αν υπάρχει μια άλλη συνάρτηση F, ώστε για κάθε x στο A_f να ισχύει*

$$F'(x) = f(x) \quad ή \quad dF(x) = f(x)dx, \tag{5.1}$$

τότε η συνάρτηση F ονομάζεται **αρχική** *της f.*

Στο Θεώρημα 4.8.8 είδαμε ότι, αν δυο συναρτήσεις διαφέρουν κατά σταθερά, έχουν τις ίδιες παραγώγους. Αυτό σημαίνει ότι μια συνάρτηση μπορεί να έχει πολλές αρχικές συναρτήσεις ή καλύτερα, αν F είναι μια αρχική της f τότε το σύνολο των αρχικών αυτής δίνεται από τον τύπο $F(x)+C$.

Ορισμός 5.2.2 *Έστω η συνάρτηση f με $A_f \subseteq \mathbb{R}$· αν η συνάρτηση F είναι μια αρχική της f, τότε η γενική μορφή $F(x)+C$ ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα της f και συμβολίζεται*

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{5.2}$$

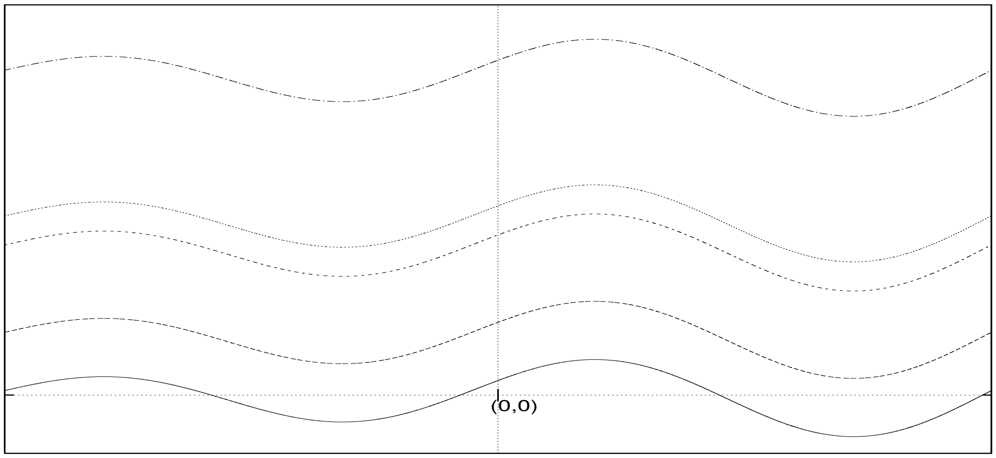
Ως άμεσες συνέπειες του ορισμού και του γεγονότος ότι $F'(x) = f(x)$ έχουμε τις εξής **στοιχειώδεις ιδιότητες**:

- $\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C$.
- $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = F'(x) = f(x)$.
- $d\int f(x)dx = F'(x)dx = f(x)dx$.

Θα μπορούσε, ίσως, κάποιος να παρατηρήσει ότι οι δυο πράξεις, της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης, είναι κατά κάποιο τρόπο αντίστροφες, με εξαίρεση ίσως το σταθερό προσθετέο C. Από τις στοιχειώδεις ιδιότητες της ολοκλήρωσης και τη γνώση μας σχετικά με τις παραγώγους, μπορούμε να έχουμε τον παρακάτω πίνακα ολοκλήρωσης, με τη συμφωνία ότι οι συναρτήσεις ορίζονται.

Γνωστά ολοκληρώματα	Γνωστά ολοκληρώματα
$\int 0dx = C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$
$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln x} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \sinh x dx = \cosh x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cosh x dx = \sinh x + C$
$\int (1+\tan^2 x)dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cosh^2 x}dx = \tanh x + C$

Γεωμετρικά, το αόριστο ολοκλήρωμα εκφράζει μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων, δηλ. το αόριστο ολοκλήρωμα δεν είναι μια καμπύλη αλλά ένα πλήθος καμπύλων, παράλληλων μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.34.



Σχήμα 5.34: Αόριστο ολοκλήρωμα: Μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων

Αν απαιτήσουμε η καμπύλη να περνά από συγκεκριμένο σημείο $M(x_0, y_0)$, τότε η σταθερά C προσδιορίζεται και η καμπύλη ορίζεται πλήρως.

Παράδειγμα 5.1 *Προσδιορίστε την καμπύλη, η οποία διέρχεται από το σημείο $M(1,2)$ και έχει ρυθμό μεταβολής $3x^2 - 2x + 1$.*

Λύση

$$\int (3x^2 - 2x + 1)dx = \int (x^3 - x^2 + x)' dx = \int d(x^3 - x^2 + x) = x^3 - x^2 + x + C.$$

Αφού η καμπύλη διέρχεται από το σημείο $M(1,2)$, έχουμε

$$2 = 1^3 - 1^2 + 1 + C \Leftrightarrow C = 1.$$

5.3 Ιδιότητες του Ολοκληρώματος

Από τις στοιχειώδεις ιδιότητες του ολοκληρώματος προκύπτουν εύκολα τέσσερις βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος, τις οποίες συνοψίζουμε υπό μορφήν Θεωρήματος.

Θεώρημα 5.3.1 *Αν δυο συναρτήσεις f και g είναι ολοκληρώσιμες σ' ένα διάστημα Δ και F η αρχική της f, τότε ισχύει*

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx, \quad \lambda \neq 0 \tag{5.3}$$

$$\int \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \tag{5.4}$$

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \tag{5.5}$$

$$\int g(x)df(x) = f(x)g(x) - \int f(x)dg(x)$$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))dg(x) = F(g(x)) + C. \tag{5.6}$$

Εκείνο, ίσως, που θα έπρεπε να παρατηρήσουμε είναι ότι το $\lambda \neq 0$ στην (5.3) του προηγούμενου Θεωρήματος είναι ουσιώδες, αφού για $\lambda = 0$ δεν ισχύει, ενώ την (5.5) την συναντάμε στη βιβλιογραφία ως ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Παράδειγμα 5.2 *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:*

$$1) \int (2x^5 + 3x^2 - x)dx, \quad 2) \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})dx, \quad 3) \int (\cos x - \frac{1}{\sqrt{x}})dx.$$

Λύση

$$1) \int (2x^5 + 3x^2 - x)dx = 2\int x^5 dx + 3\int x^2 dx - \int x dx = \frac{x^6}{3} + x^3 + \frac{x^2}{2} + C,$$

$$2) \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C,$$

$$3) \int (\cos x - \frac{1}{\sqrt{x}})dx = \int \cos x dx - \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \sin x - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sin x - 2x^{\frac{1}{2}} + C.$$

Παράδειγμα 5.3 *Επίσης τα ολοκληρώματα:*

$$1) \int x\cos x dx, \quad 2) \int e^x \cos x dx, \quad 3) \int \ln x dx.$$

Λύση

$$1) \int x\cos x dx = \int x(\sin x)' dx = x\sin x - \int \sin x (x)' dx =$$

$$x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x - \cos x + C,$$

$$2) \int e^x \cos x dx = \int (e^x)' \cos x dx = e^x \cos x - \int (\cos x)' e^x dx =$$

$$e^x \cos x + \int \sin x (e^x)' dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int (\sin x)' e^x dx =$$

$$e^x \cos x + e^x \sin x - \int \cos x e^x dx \Leftrightarrow 2\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x,$$

$$\text{οπότε} \ \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}(e^x \cos x + e^x \sin x) + C$$

$$3) \int \ln x dx = x\ln x - \int x d\ln x = x\ln x - \int x\frac{1}{x} dx = x\ln x - x + C.$$

Παράδειγμα 5.4 *Επίσης τα ολοκληρώματα:*

$$1) \int \frac{1}{(ax+b)^3} dx, \quad 2) \int \frac{\ln x}{x} dx, \quad 3) \int \frac{x}{1-2x^2} dx.$$

Λύση Θυμίζουμε τις ιδιότητες του διαφορικού $d(ax) = adx$ και $d(x+b) = dx$.

$$1) \int \frac{1}{(ax+b)^3} dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(ax+b)^3} d(ax+b) = -\frac{1}{2a(ax+b)^2} + C.$$

$$2) \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d\ln x = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

$$3) \int \frac{x}{1-2x^2} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-2x^2} d(1-2x^2) = -\frac{1}{2}\ln|1-2x^2| + C.$$

5.4 Τεχνικές ολοκλήρωσης

Ήδη, έχει αναφερθεί ότι η ολοκλήρωση είναι ένα δύσκολο πρόβλημα στα Μαθηματικά και μάλιστα μερικά ολοκληρώματα, ακόμη και απλών εκφράσεων, δεν ορίζουν στοιχειώδεις συναρτήσεις και είναι αδύνατο να αντιμετωπιστούν με α-πλό τρόπο, όπως για παράδειγμα τα $\int e^{-x^2}dx$, $\int \frac{e^x}{x}dx$, $\int \frac{1}{\ln x}dx$ $\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{\cos x}{x}dx$ κ.α. ([8]). Στη συνέχεια, θα δοθούν ορισμένες τεχνικές για την αντιμετώπιση του προβλήματος, όμως δε φιλοδοξούμε να εξαντλήσουμε όλες τις περιπτώσεις. Για πλέον ειδικές περιπτώσεις ο αναγνώστης θα πρέπει να αναζητήσει βοήθεια σε περισσότερο ειδικά συγγράμματα στη βιβλιογραφία π.χ. ([2],[8],[5]).

5.4.1 Αλλαγή μεταβλητής

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : A_f \to \mathbb{R}$ και έστω μια συνάρτηση $\phi : I \to A_f$ με συνεχή πρώτη παράγωγο και τέτοια ώστε $\phi'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$.
Αν θέσουμε $x = \phi(t)$, τότε αντί του ολοκληρώματος $\int f(x)dx$ προκύπτει το ολοκλήρωμα

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt,$$

το οποίο πολλές φορές είναι πιο εύκολο στον υπολογισμό του απ' ό,τι το αρχικό. Αφού η συνάρτηση ϕ επιλέχτηκε έτσι ώστε να υπάρχει η αντίστροφή της, τότε, αν $\Phi(t)$ μια παράγουσα της προηγούμενης, θα ισχύει

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \Phi(\phi^{-1}(x)) + C. \tag{5.7}$$

Ωστόσο στην πράξη μερικές φορές θεωρούμε τη συνάρτηση ϕ^{-1} και στη συνέχεια βρίσκουμε τη ϕ.

Παράδειγμα 5.5*Να βρεθεί το ολοκλήρωμα* $\int x\sqrt{2x+3}dx$.

Λύση Θέτοντας $t = \sqrt{2x+3},\ t > 0$ παίρνουμε $x = \frac{1}{2}(t^2 - 3)$, οπότε $dx = tdt$ και έχουμε:

$$\int x\sqrt{2x+3}dx = \int \frac{1}{2}(t^2-3)ttdt = \frac{1}{2}\int (t^4 - 3t^2)dt = \frac{1}{2}\Big(\frac{t^5}{5} - \frac{3t^3}{3}\Big) + C$$

$$= \frac{1}{10}\left(\sqrt{2x+3}\right)^5 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2x+3}\right)^3 + C.$$

Το ποιο μετασχηματισμό θα χρησιμοποιήσουμε είναι βασικά θέμα εμπειρίας και εξοικείωσης με την ολοκλήρωση. Ωστόσο, ορισμένοι μετασχηματισμοί είναι κλασικοί και στην προσπάθειά μας δεν τους αγνοούμε, γι' αυτό τους δίνουμε στον επόμενο πίνακα:

παράσταση	μετασχηματισμός	διαφορικό
$1+x^2$	$x=\tan\theta$	$dx=(1+\tan^2\theta)d\theta$
a^2+x^2	$x=a\tan\theta$	$dx=a(1+\tan^2\theta)d\theta$
$\sqrt{1+x^2}$	$x=\tan\theta$	$dx=(1+\tan^2\theta)d\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan\theta$	$dx=a(1+\tan^2\theta)d\theta$
$\sqrt{1-x^2}$	$x=\sin\theta$	$dx=\cos\theta d\theta$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin\theta$	$dx=a\cos\theta d\theta$
$\sqrt{x^2-1}$	$x=\frac{1}{\sin\theta}$	$dx=\frac{-\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=\frac{a}{\sin\theta}$	$dx=\frac{-a\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$

(5.8)

Παράδειγμα 5.6 *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:*

$$1)\int \frac{1}{a^2+x^2}dx, \quad 2)\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx, \quad 3)\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx.$$

Λύση 1) Από τον πίνακα (5.8) θέτουμε $x = a\tan\theta$ και $dx = a(1+\tan^2\theta)d\theta$, οπότε έχουμε

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \int \frac{1}{a^2(1+\tan^2\theta)}a(1+\tan^2\theta)d\theta = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

Πάλι από τον πίνακα (5.8) θέτουμε $x = a\sin\theta$ και $dx = a\cos\theta d\theta$, οπότε έχουμε

$$2)\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1-\sin^2\theta}}a\cos\theta d\theta = \int \frac{1}{\cos\theta}\cos\theta d\theta = \int d\theta = \arcsin\frac{x}{a}+C$$

Επίσης, από τον πίνακα (5.8) θέτουμε $x = \frac{a}{\sin\theta}$ και $dx = \frac{-a\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$, οπότε έχουμε

$$3)\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int \frac{1}{a\frac{a}{\sin\theta}\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}}\frac{-a\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta = -\frac{1}{a}\int d\theta = -\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C.$$

Με $a = 1$ οι δυο πρώτες είναι αναμενόμενες, αφού κάποιος που θυμάται τις παραγώγους των κυκλομετρικών συναρτήσεων από το προηγούμενο κεφάλαιο θα μπορούσε να τις πάρει άμεσα.

Παρατήρηση 5.4.1*Κάποιες φορές, στον πίνακα (5.8), εξυπηρετεί αντί των* $\sin\theta$ *και* $\cos\theta$ *να θέτουμε* $\sinh\theta$ *και* $\cosh\theta$ *τροποποιώντας κατάλληλα τα διαφορικά.*

5.4.2 Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Μια μεγάλη κατηγορία ολοκληρωμάτων είναι αυτή της ο ολοκλήρωσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Σ' αυτή θα πρέπει κάποιος να έχει υπόψη του τις τριγωνομετρικές ταυτότητες της παραγράφου (3.6.4). Θα δώσουμε τις διάφορες μεθόδους υπό μορφήν παραδειγμάτων και ο φοιτητής ας προσέξει τη μεθοδολογία.

Παράδειγμα 5.7*Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:*

$$1)\int \sin^n x\cos x dx, \qquad 2)\int \cos^n x \sin x dx.$$

Λύση Έχοντας υπόψη ότι $d\sin x = \cos x dx$, παίρνουμε

$$1)\int \sin^n x \cos x dx = \int \sin^n x d\sin x = \begin{cases} \frac{\sin^{n+1} x}{n+1}, n \neq -1 \\ \ln|\sin x|, \; n = -1 \end{cases} .$$

Αντίστοιχα ενεργούμε για το 2). (Να γίνει ως άσκηση.)

Παράδειγμα 5.8*Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:*

$$1)\int \tan x dx, \quad 2)\int \tan^2 x dx, \quad 3)\int \tan^n x dx \;\; 2 < n \in \mathbb{N}.$$

Λύση 1) Από την γνωστή ταυτότητα $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ έχουμε

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x} d\cos x = -\ln|\cos x| + C.$$

2) Προσθαφαιρώντας το 1, παίρνουμε

$$\int \tan^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x - 1)dx = \tan x - x + C.$$

3) Πολλές φορές, στην προσπάθειά μας να βρούμε κάποια ολοκληρώματα δημιουργούμε αναγωγικούς τύπους, όπως στην περίπτωση που τώρα διαπραγματευόμαστε.

$$\int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x(1 + \tan^2 x - 1)dx =$$

$$\int \tan^{n-2} x \underbrace{(1 + \tan^2 x)dx}_{d\tan x} - \int \tan^{n-2} x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx.$$

Είναι φανερό ότι, με τον αναγωγικό τύπο που δημιουργήσαμε, θα πηγαίνουμε προς τα πίσω, μειώνοντας τον εκθέτη κατά δύο κάθε φορά, και θα καταλήξουμε ή στο 1), αν το n είναι περιττό ή στο 2), αν αυτό είναι άρτιο.

Παράδειγμα 5.9*Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:*

$$1) \int \sin^{2n+1} x dx, \quad 2) \int \cos^{2n+1} x dx, \quad 3) \int \frac{1}{\cos^{2n} x} dx, \quad 4) \int \frac{1}{\sin^{2n} x} dx$$

Λύση Περιττές δυνάμεις του ημιτόνου και συνημιτόνου ολοκληρώνονται σχετικά εύκολα

$$1) \int \sin^{2n+1} x dx = \int \sin^{2n} x \sin x dx = -\int \sin^{2n} x d\cos x = -\int (1 - \cos^2 x)^n d\cos x.$$

Το τελευταίο, όμως, είναι ολοκλήρωμα πολυωνύμου, αφού αυτό μπορεί να αναπτυχθεί ως διώνυμο του Newton σε όρους του $\cos^2 x$. Παρόμοια το 2). (Να γίνει ως άσκηση.)

Λίγο πιο δύσκολα είναι τα πράγματα στα άλλα δυο ολοκληρώματα· στο πρώτο απ' αυτά παίρνουμε υπόψη μας ότι $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$. Έτσι έχουμε

$$3) \int \frac{1}{\cos^{2n} x} dx = \int \frac{1}{\cos^{2(n-1)} x} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2)^{n-1} d\tan x.$$

Όπως και προηγούμενα, το τελευταίο είναι ολοκλήρωμα πολυωνύμου, αφού αυτό μπορεί να αναπτυχθεί ως διώνυμο του Newton σε όρους της $\tan^2 x$. Στο άλλο παίρνουμε υπόψη μας ότι $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}$. Έτσι έχουμε

$$4) \int \frac{1}{\sin^{2n} x} dx = \int \Big(\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}\Big)^n dx = \int \Big(\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}\Big)^{n-1} \frac{(1+\tan^2 x)}{\tan^2 x} dx =$$

$$\int \Big(\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}\Big)^{n-1} \frac{1}{\tan^2 x} d\tan x = \int \Big(1+\frac{1}{\tan^2 x}\Big)^{n-1} \frac{1}{\tan^2 x} d\tan x.$$

Το τελευταίο μπορεί να αναπτυχθεί ως διώνυμο του Newton σε όρους του $\frac{1}{\tan^2 x}$ και εύκολα, πλέον, να το υπολογίσουμε.

Παράδειγμα 5.10*Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:*

$$1) \int \cos^2 x dx, \quad 2) \int \sin^2 x dx, \quad 3) \int \cos^2 x \sin^2 x dx.$$

Λύση Για τις άρτιες δυνάμεις των ημιτόνων και συνημιτόνων χρησιμοποιούμε τους τύπους $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ και $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

$$1) \int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x) dx = \frac{1}{2}\frac{1}{2} \int (1+\cos 2x) d2x = \frac{1}{4}\big(2x+\sin 2x\big)+C$$

$$2) \int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x) dx = \frac{1}{2}\frac{1}{2} \int (1-\cos 2x) d2x = \frac{1}{4}\big(2x-\sin 2x\big)+C$$

$$3) \int \cos^2 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 x(1-\cos^2 x) dx = \int \cos^2 x dx - \int \cos^4 x dx =$$

$$\frac{1}{4}\big(2x+\sin 2x\big) - \int \Big(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\Big)^2 dx = \cdots =$$

$$\frac{1}{4}\big(2x+\sin 2x\big) - \Big(\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x\Big) + C = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Παράδειγμα 5.11*Να υπολογισθούν τα ο Ολοκληρώματα:*

$$1) \int \sin 4x \sin 5x dx, \quad 2) \int \cos 4x \cos 5x dx, \quad 3) \int \sin 4x \cos 5x dx.$$

Λύση Για τη λύση θα χρησιμοποιήσουμε σχετικούς τύπους από την παράγραφο (3.6.4). Θα βρούμε το πρώτο ολοκλήρωμα και τα υπόλοιπα θα παραμείνουν ως ασκήσεις.

$$1)\ \int \sin 4x \sin 5x dx = \int \frac{1}{2}(\cos(4x-5x) - \cos(4x+5x))dx =$$

$$\frac{1}{2}\int (\cos(-x) - \cos 9x)dx = \frac{1}{2}(\sin x - \frac{1}{9}\sin 9x) + C.$$

5.4.3 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Η μέθοδος που προτείνεται είναι γενική και λύνει το πρόβλημα της ολοκλήρωσης των ρητών συναρτήσεων, ωστόσο, λόγω του ότι στηρίζεται στην εύρεση όλων των ριζών του πολυώνυμου του παρονομαστή, δεν μπορεί να εφαρμοστεί όταν κάτι τέτοιο δεν επιτυγχάνεται. Έστω λοιπόν το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx, \quad m < n. \tag{5.9}$$

Στην έκφραση (5.9) καταλήγουμε πάντα, όταν έχουμε να ολοκληρώσουμε ρητή συνάρτηση, αφού για τις περιπτώσεις όπου $m \geq n$ μπορούμε να κάνουμε Ευκλείδια διαίρεση και να έχουμε να ολοκληρώσουμε ένα πολυώνυμο βαθμού $m-n$ και μια έκφραση της μορφής (5.9).

Παράδειγμα 5.12*Να γράψετε το κλάσμα $\frac{x^3}{x^2-2x-1}$ ως άθροισμα ενός πολυωνύμου και ενός κλάσματος της μορφής (5.9).*

Λύση Κάνοντας Ευκλείδια διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή, παίρνουμε

$$\frac{x^3}{x^2-2x-1} = x + 2 + \frac{3x-2}{x^2-2x+1}.$$

Αρχίζουμε την ανάπτυξη της μεθόδου με τις πλέον απλές περιπτώσεις.

Παράδειγμα 5.13*Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:*

$$1) \int \frac{1}{(x-r)^k}dx, \quad 2) \int \frac{1}{(x^2+1)^k}dx, \quad 3) \int \frac{x+b}{(x^2+1)^k}dx.$$

Λύση

$$1)\int \frac{1}{(x-r)^k}dx = \int \frac{1}{(x-r)^k}d(x-r) = \begin{cases} \ln|x-r|+C, & k=1 \\ -\frac{1}{(k-1)(x-r)^{k-1}}, & k\neq 1 \end{cases}.$$

2) Η περίπτωση $k=1$ έχει μελετηθεί στο Παράδειγμα 5.6· θα μελετήσουμε την περίπτωση $k>1$.

$$I_k = \int \frac{1}{(x^2+1)^k}dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^k}dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^k}dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^k}dx =$$

$$\underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^{k-1}}dx}_{I_{k-1}} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^k}dx = \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^{k-1}}dx}_{I_{k-1}} - \int x\underbrace{\frac{x}{(x^2+1)^k}dx}_{dA(x)}$$

Όμως $dA(x) = -d\frac{1}{2(k-1)(x^2+1)^{k-1}}$, οπότε το δεύτερο ολοκλήρωμα της προηγούμενης σχέσης γίνεται

$$\int xdA(x) = -\int xd\frac{1}{2(k-1)(x^2+1)^{k-1}} = -\frac{x}{2(k-1)(x^2+1)^{k-1}}$$
$$+\frac{1}{2(k-1)}\underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^{k-1}}dx}_{I_{k-1}}.$$

Έτσι λοιπόν έχουμε την αναδρομική σχέση

$$I_k = I_{k-1} - \frac{1}{2(k-1)}I_{k-1} + \frac{x}{2(k-1)(x^2+1)^{k-1}} = \frac{2k-3}{2(k-1)}I_{k-1} + \frac{x}{2(k-1)(x^2+1)^{k-1}}.$$

3) Για την τελευταία περίπτωση μπορούμε να πάρουμε

$$\int \frac{x+b}{(x^2+1)^k}dx = \int \frac{x}{(x^2+1)^k}dx + \int \frac{b}{(x^2+1)^k}dx$$
$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^k}d(x^2+1)}_{\text{1) περίπτωση}} + b\underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^k}dx}_{\text{2) περίπτωση}}.$$

- Έστω ότι το πολυώνυμο του παρονομαστή, $P_n(x)$, έχει n απλές πραγματικές ρίζες, τις r_1, r_2, …, r_n.

Στην περίπτωση αυτή, αποδεικνύεται ότι το κλάσμα $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ γράφεται ως άθροισμα στοιχειωδών κλασμάτων, όπου ο αριθμητής είναι μια σταθερά (πολυώνυμο μηδενικού βαθμού) και ο παρονομαστής μονώνυμο, δηλ. στη μορφή

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{a_1}{(x-r_1)} + \frac{a_2}{(x-r_2)} + \frac{a_3}{(x-r_3)} + \cdots + \frac{a_n}{(x-r_n)}.$$

Οι αριθμητές του δευτέρου μέλους υπολογίζονται κάνοντας τις απαλοιφές και εξισώνοντας τους αριθμητές, οπότε δημιουργούμε σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, είτε απαιτώντας να έχουν τους ίδιους συντελεστές τα δυο πολυώνυμα είτε δίνοντας n διαφορετικές τιμές στη μεταβλητή, συνήθως τις ίδιες τις ρίζες.

Παράδειγμα 5.14*Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα*

$$1) \int \frac{2x+1}{(x-2)(x+3)}dx \quad 2) \int \frac{x-1}{(2x-1)(x+2)}dx$$

Λύση Θα χρησιμοποιήσουμε και τους δυο τρόπους προσδιορισμού των συντελεστών που προαναφέραμε:

$$1) \frac{2x+1}{(x-2)(x+3)} = \frac{a_1}{x-2} + \frac{a_2}{x+3} = \frac{a_1(x+3)+a_2(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{(a_1+a_2)x+3a_1-2a_2}{(x-2)(x+3)}$$

Έτσι έχουμε $a_1 + a_2 = 2$ και $3a_1 - 2a_2 = 1$, οπότε λύνοντας το σύστημα τελικά παίρνουμε $a_1 = 1$ και $a_2 = 1$. Για το ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int \frac{2x+1}{(x-2)(x+3)}dx = \int (\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3})dx = \ln|x-2| + \ln|x+3| + C.$$

$$2) \frac{x-1}{(2x-1)(x+2)} = \frac{a_1}{2x-1} + \frac{a_2}{x+2} = \frac{a_1(x+2)+a_2(2x-1)}{(2x-1)(x+2)}.$$

Έτσι έχουμε $a_1(x+2) + a_2(2x-1) = x-1$, οπότε για $x = -2$ και $x = \frac{1}{2}$ παίρνουμε $a_1 = -\frac{1}{5}$ και $a_2 = \frac{3}{5}$. Για το ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int \frac{x-1}{(2x-1)(x+2)}dx = \frac{1}{5}\int (\frac{-1}{2x-1} + \frac{3}{x+2})dx = \frac{1}{5}(-\frac{1}{2}\ln|2x-1| + 3\ln|x+2|) + C.$$

- Έστω ότι το πολυώνυμο $P_n(x)$ έχει μια ρίζα πραγματική πολλαπλότητας n_1 την r_1, και $n-n_1$ ρίζες απλές πραγματικές τις $r_2, r_3, \ldots, r_{n-n_1+1}$.

Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι το κλάσμα $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ γράφεται στη μορφή:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{a_1}{(x-r_1)}+\frac{a_2}{(x-r_1)^2}+\cdots+\frac{a_{n_1}}{(x-r_1)^{n_1}}+\frac{b_1}{(x-r_2)}+\cdots+\frac{b_{n-n_1}}{(x-r_{n-n_1+1})},$$

δηλ., τώρα, στα στοιχειώδη κλάσματα έχουν προστεθεί όλα τα κλάσματα που προκύπτουν, αν θέτουμε στον αριθμητή σταθερές και στον παρονομαστή διαδοχικά όλες τις δυνάμεις του μονωνύμου, που αντιστοιχεί στην πολλαπλή ρίζα, από την πρώτη μέχρι την n_1-οστή. Οι αριθμητές του δευτέρου μέλους υπολογίζονται κάνοντας τις απαλοιφές και εξισώνοντας τους αριθμητές, οπότε δημιουργούμε, με τους γνωστούς τρόπους, σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους.

Παράδειγμα 5.15*Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:*

$$1)\int\frac{2x+1}{(x-2)^2}dx, \quad 2)\int\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+2)}dx.$$

Λύση

$$1)\ \frac{2x+1}{(x-2)^2} = \frac{a_1}{x-2}+\frac{a_2}{(x-2)^2} = \frac{a_1(x-2)+a_2}{(x-2)^2} = \frac{a_1x-2a_1+a_2}{(x-2)^2}$$

Έτσι έχουμε $a_1 = 2$ και $-2a_1+a_2 = 1$, οπότε παίρνουμε $a_1 = 2$ και $a_2 = 5$. Για το ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int\frac{2x+1}{(x-2)^2}dx = \int(\frac{2}{(x-2)}+\frac{5}{(x-2)^2})dx = 2\ln|x-2| - \frac{5}{x-2}+C.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα παίρνουμε:

$$2)\ \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{(x-1)^2}+\frac{b_1}{x+2} = \frac{a_1(x-1)(x+2)}{(x-1)^2(x+2)}+$$

$$\frac{a_2(x+2)}{(x-1)^2(x+2)}+\frac{b_1(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{a_1(x-1)(x+2)+a_2(x+2)+b_1(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} =$$

$$\frac{(a_1+b_1)x^2+(a_1+a_2-2b_1)x-2a_1+2a_2+b_1}{(x-1)^2(x+2)}.$$

Έτσι έχουμε $a_1 + b_1 = 1$, $a_1 + a_2 - 2b_1 = 0$ και $-2a_1 + 2a_2 + b_1 = 1$, οπότε παίρνουμε $a_1 = \frac{4}{9}$, $a_2 = \frac{2}{3}$ και $b_1 = \frac{5}{9}$. Για το ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int \frac{x^2-1}{(x-1)^2(x+2)}dx = \frac{1}{9}\int (\frac{4}{x-1} + \frac{6}{(x-1)^2} + \frac{5}{x-2})dx =$$

$$\frac{1}{9}(4\ln|x-1| - \frac{6}{x-1} + 5\ln|x-2|) + C.$$

Παρατήρηση 5.4.2*Με ανάλογο τρόπο αντιμετωπίζονται και όλες οι περιπτώσεις που έχουν πολλαπλές ρίζες περισσότερες από μία.*

- Έστω ότι το πολυώνυμο $P_n(x)$ έχει ρίζες απλές μιγαδικές τις r_1, r_2, $\ldots$, r_{m_1} και $n - 2m_1$ ρίζες πραγματικές.

Στην περίπτωση αυτή, το πολυώνυμο $P_n(x)$ θα έχει ρίζες και τις συζυγείς των r_1, r_2, $\ldots$, r_{m_1}, τις $\overline{r_1}\ \overline{r_2}$, $\ldots$, $\overline{r_{m_1}}$. Έτσι, όταν το $P_n(x)$ αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων, θα υπάρχουν στο γινόμενο και τετραγωνικοί όροι της μορφής $x^2 - s_ix + p_i$, $i = 1(1)m_1$, όπου $s_i = r_i + \overline{r_i}$ και $p_i = r_i \cdot \overline{r_i}$. Στα στοιχειώδη κλάσματα, τώρα, εμφανίζονται όλα εκείνα τα κλάσματα, που έχουν στον αριθμητή τους μονώνυμα και στον παρονομαστή τους τις τετραγωνικές μορφές, δηλ.

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{a_1x + b1}{x^2 - s_1x + p_1} + \cdots + \frac{a_{m_1}x + b_{m_1}}{x^2 - s_{m_1}x + p_{m_1}} +$$

$$\sum (\text{στοιχειώδη κλάσματα πραγματικών ριζών}).$$

Παράδειγμα 5.16*Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:*

$$1)\ \int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}dx, \quad 2)\ \int \frac{x^2 + 2x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 2)}dx.$$

Λύση 1) Ο παρονομαστής του πρώτου κλάσματος γράφεται $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$. Έτσι, η ανάλυση είναι:

$$\frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx + c}{x^2 + 1} = \frac{(a + b)x^2 + (b + c)x + a + c}{(x + 1)(x^2 + 1)},$$

οπότε προκύπτουν οι εξισώσεις $a+b=2$, $b+c=1$ και $a+c=1$ και τελικά $a=1$, $b=1$ και $c=0$. Για το ολοκλήρωμα, μετά από τις αντικαταστάσεις, έχουμε

$$I=\int\frac{2x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}dx=\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{x}{x^2+1}dx,$$

τα οποία υπολογίζονται με την τεχνική που αναπτύχθηκε στο Παράδειγμα 5.13· έτσι

$$I=\ln|x+1|+\int\frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)=\ln|x+1|+\ln(x^2+1)+C.$$

2) Ο παρονομαστής του δευτέρου κλάσματος δεν αναλύεται σε πρωτοβάθμιους παράγοντες αφού οι τετραγωνικές μορφές έχουν μιγαδικές ρίζες. Έτσι, για τα στοιχειώδη κλάσματα έχουμε:

$$\frac{x^2+2x+2}{(x^2+x+1)(x^2+2)}=\frac{ax+b}{x^2+x+1}+\frac{cx+d}{x^2+2}=$$

$$\frac{(a+c)x^3+(b+c+d)x^2+(a+c+d)x+2b+d}{(x+1)(x^2+1)},$$

οπότε προκύπτουν οι εξισώσεις $a+c=0$, $b+c+d=1$, $a+c+d=2$ και $2b+d=2$ και τελικά $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$, $c=-\frac{2}{3}$ και $d=\frac{4}{3}$. Για το ολοκλήρωμα, μετά από τις αντικαταστάσεις, έχουμε:

$$I=\int\frac{x^2+2x+2}{(x^2+x+1)(x^2+2)}dx=\underbrace{\int\frac{\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}dx}_{I_1}+\underbrace{\int\frac{-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}}{x^2+2}dx}_{I_2}$$

Όμως

$$I_1=\frac{1}{3}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2+x+1}d(x^2+x+1)=\frac{1}{3}\ln\left(x^2+x+1\right)$$

και

$$I_2=-\frac{1}{3}\int\frac{2x-4}{x^2+2}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{2x}{x^2+2}dx+\frac{1}{3}\int\frac{4}{x^2+2}dx=$$

$$-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2+2}d(x^2+2)+\frac{4}{3}\underbrace{\int\frac{1}{x^2+2}dx}_{I_3}.$$

Όμως το I_3 ολοκλήρωμα έχει μελετηθεί στο Παράδειγμα 5.6. Έτσι έχουμε

$$I = \frac{1}{3}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{3}\ln(x^2+2) + \frac{2\sqrt{2}}{3}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{2} + C.$$

- Έστω ότι το πολυώνυμο $P_n(x)$ έχει ρίζες μιγαδικές απλές και πολλαπλές και ρίζες πραγματικές απλές και πολλαπλές.

Στην περίπτωση αυτή, ισχύουν όλα τα προηγούμενα και επιπλέον στα στοιχειώδη κλάσματα προστίθενται όλα τα κλάσματα που προκύπτουν, αν θέτουμε στον αριθμητή μονώνυμα και στον παρονομαστή διαδοχικά όλες τις δυνάμεις των τετραγωνικών μορφών, που αντιστοιχούν στις πολλαπλές μιγαδικές ρίζες, από την πρώτη μέχρι εκείνης του βαθμού πολλαπλότητάς της.

Παράδειγμα 5.17 *Να αναλυθεί σε στοιχειώδη κλάσματα η ρητή παράσταση*

$$\frac{2x^3-x^2+3x-2}{(x-1)^3(x^2+x+2)^2}$$

Λύση

$$\frac{2x^3-x^2+3x-2}{(x-1)^3(x^2+x+2)^2} = \frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{(x-1)^2}+\frac{a_3}{(x-1)^3}+\frac{b_1x+c_1}{x^2+x+2}+\frac{b_2x+c_2}{(x^2+x+2)^2}.$$

οπότε μετά από τις σχετικές πράξεις βρίσκουμε

$$a_1 = -\frac{25}{128}, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{8}, \quad b_1 = -\frac{3}{32}, \quad c_1 = \frac{14}{32}, \quad b_2 = \frac{25}{128}, \quad c_2 = \frac{18}{128}.$$

Πολλές φορές για την ολοκλήρωση τριγωνομετρικών παραστάσεων, κάνοντας χρήση των τύπων

$$\sin\vartheta = \frac{2\tan\frac{\vartheta}{2}}{1+\tan^2\frac{\vartheta}{2}}, \quad \cos\vartheta = \frac{1-\tan^2\frac{\vartheta}{2}}{1+\tan^2\frac{\vartheta}{2}}, \quad \tan\vartheta = \frac{2\tan\frac{\vartheta}{2}}{1-\tan^2\frac{\vartheta}{2}}$$

της παραγράφου (3.6.4) και μετασχηματισμών, καταλήγουμε σε ολοκλήρωση ρητών παραστάσεων.

Παράδειγμα 5.18*Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:*

$$1) \int \frac{1}{\sin x} dx, \quad 2) \int \frac{1}{\cos x} dx.$$

Λύση Θα τα υπολογίσουμε με διαφορετικό τρόπο και θα αφήσουμε ως άσκηση την εναλλαγή των τρόπων στον υπολογισμό.

$$1) \ I_1 = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}} dx = \int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}} dx$$

Θέτοντας $u = \tan\frac{x}{2}$, έχουμε $du = (1+\tan^2\frac{x}{2})\frac{1}{2}dx$, οπότε

$$I_1 = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln\tan|\frac{x}{2}| + C.$$

$$2) \ I_2 = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx$$

Θέτοντας $u = \sin x$, έχουμε $du = \cos x dx$, οπότε έχουμε

$$I_2 = \int \frac{1}{1-u^2} du = \int \frac{1}{(1-u)(1+u)} du = \cdots = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C.$$

5.4.4 Ολοκλήρωση άρρητων παραστάσεων

Εκφράσεις της μορφής $\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ στην υπό ολοκλήρωση παράσταση αντικαθίστανται από μια μεταβλητή u και πολλές φορές μας βγάζουν από το αδιέξοδο.

Παράδειγμα 5.19*Να δείξετε ότι τα ολοκληρώματα*

$$1) \ I_1 = \int \sqrt[3]{\frac{8x-1}{x+1}} dx, \quad 2) \ I_2 = \int \sqrt[3]{(x+1)(x-1)^2} dx$$

εκφράζονται με απλές αλγεβρικές παραστάσεις.

Λύση 1) Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω μετασχηματισμό έχουμε

$$\sqrt[3]{\frac{8x-1}{x+1}} = u \Leftrightarrow u^3 = \frac{8x-1}{x+1} \Leftrightarrow x = -\frac{u^3+1}{u^3-8}.$$

Παίρνοντας διαφορικά στην τελευταία προκύπτει

$$dx = -\frac{3u^2(u^3-8)-(u^3+1)3u^3}{(u^3-8)^2}du = \frac{27u^2}{(u-2)^2(u^2+2u+4)^2}du.$$

Έτσι κάνοντας τις αντικαταστάσεις έχουμε

$$I_1 = \int \frac{27u^3}{(u-2)^2(u^2+2u+4)^2}du = 27\int \underbrace{\frac{u^3}{(u-2)^2(u^2+2u+4)^2}}_{R(u)}du.$$

Όμως, η ρητή έκφραση $R(u)$ μπορεί να αναλυθεί σε στοιχειώδη κλάσματα και μάλιστα μετά από τις σχετικές πράξεις έχουμε

$$R(u) = \frac{1}{36(u-2)} + \frac{1}{18(u-2)^2} - \frac{u+6}{36(u^2+2u+4)} + \frac{u+2}{3(u^2+2u+4)^2}.$$

Είναι φανερό, λοιπόν, ότι τα στοιχειώδη κλάσματα ολοκληρώνονται και παίρνουμε την τελική έκφραση, αφού αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή u. Καταλαβαίνει κάποιος ότι μια τέτοια έκφραση, που στην πράξη είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη, μόνο θεωρητική αξία μπορεί να έχει. Για τη χρήση της στα ορισμένο ολοκληρώματα, χρειαζόμαστε τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή και φυσικά υπολογιστικές μεθόδους.

2) Πολλαπλασιάζοντας με $x-1$ αριθμητή και παρονομαστή στην υπόριζο ποσότητα παίρνουμε

$$\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x-1)^3}{x-1}} = (x-1)\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Με το μετασχηματισμό που προαναφέραμε και ακολουθώντας μια ανάλογη πορεία με την προηγούμενη περίπτωση έχουμε

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = u \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow dx = -\frac{6u^2}{(u-1)^2(u^2+u+1)^2}du.$$

Κάνοντας τις σχετικές αντικαταστάσεις τελικά παίρνουμε

$$I_2 = \int (x-1)\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx = \cdots = -12\int \frac{u^3}{(u-1)^3(u^2+u+1)^3}du.$$

Είναι φανερό ότι και το δεύτερο ολοκλήρωμα εκφράζεται, πολύπλοκα μεν, με απλές αλγεβρικές παραστάσεις δε.

Για ριζικά με τριώνυμο ($\sqrt{ax^2+bx+c}$), εκτός των τριγωνομετρικών μετασχηματισμών, προτείνονται και οι μετασχηματισμοί Euler, έτσι

- όταν $a > 0$, θέτουμε $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$, οπότε

$$ax^2+bx+c = ax^2 + 2xt\sqrt{a} + t^2 \Leftrightarrow x = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}$$

- όταν $c > 0$, θέτουμε $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$, οπότε

$$ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c \Leftrightarrow ax+b = xt^2 + 2t\sqrt{c} \Leftrightarrow x = \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}$$

- όταν το τριώνυμο έχει δυο πραγματικές ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους τις r_1 και r_2, θέτουμε $\sqrt{ax^2+bx+c} = t|x-r_1|$, οπότε

$$ax^2+bx+c = t^2(x-r_1)^2 \Leftrightarrow a(x-r_1)(x-r_2) = t^2(x-r_1)^2 \Leftrightarrow x = \frac{ar_2-r_1t^2}{a-t^2}.$$

Και στις τρεις περιπτώσεις τελικά καταλήγουμε σε ρητές εκφράσεις του t.

Παράδειγμα 5.20 *Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα*

$$1)\ I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x-1}}dx, \quad 2)\ I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}dx.$$

Λύση 1) Αφού $a = 1 > 0$, θέτουμε $\sqrt{x^2+x-1} = x+t$, οπότε

$$\sqrt{x^2+x-1} = x+t \Rightarrow x^2+x-1 = x^2+t^2+2xt \Leftrightarrow x = \frac{t^2+1}{1-2t},$$

$$\text{έτσι } \sqrt{x^2+x-1} = \frac{t^2+1}{1-2t} + t = \frac{-t^2+t+1}{2t-1} \text{ και } dx = \frac{2(-t^2+t+1)}{(2t-1)^2}dt.$$

Κάνοντας τις αντικαταστάσεις έχουμε

$$I_1 = \int \frac{2t-1}{-t^2+t+1}\frac{2(-t^2+t+1)}{(2t-1)^2}dt = \int \frac{2}{(2t-1)}dt = \ln|2t-1| + C.$$

Θέτοντας $t = -x+\sqrt{x^2+x-1}$ έχουμε $I_1 = \ln|-1-2x+2\sqrt{x^2+x-1}|+C$.

2) Η υπόριζος ποσότητα είναι θετική ποσότητα για $x \in (1,2)$, αφού $r_1 = 1$ και $r_2 = 2$ είναι οι ρίζες του τριωνύμου και μεταξύ των ριζών, το πρόσημο του τριωνύμου είναι ετερόσημο του $a = -3 < 0$. Με τον τρίτο μετασχηματισμό του Euler έχουμε

$$\sqrt{-x^2+3x-2} = t(x-1) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = \frac{t^2+2}{t^2+1},$$

$$\text{έτσι } \sqrt{-x^2+3x-1} = t(\frac{t^2+2}{t^2+1} - 1) = \frac{t}{t^2+1} \text{ και } dx = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}dt.$$

$$\text{Αντικαθιστώντας παίρνουμε } I_2 = -2\int \frac{1}{t^2+1}dt = -2\arctan t + C.$$

$$\text{Θέτοντας } t = \sqrt{\frac{2-x}{x-1}} \text{ έχουμε } I_2 = -2\arctan\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} + C.$$

Ασκήσεις

Άσκηση 5.1 *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:*

$$1) \int 3^{2x+1}dx, \quad 2) \int 3^x e^{2x}dx, \quad 3) \int e^{\frac{2}{x}}\frac{1}{x^2}dx, \quad 4) \int x(1+\tan^2(1-x^2))dx.$$

Άσκηση 5.2 *Επίσης να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:*

$$1) \int 3^{\sin x} cosx dx, \quad 2) \int \tan x \ln(\cos x)dx, \quad 3) \int 3^x \sin x dx, \quad 4) \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx,$$

$$5) \int \sin(3x)\sin(7x)dx, \quad 6) \int \cos(3x)\sin(7x)dx, \quad 7) \int \sin^3 x \sin^7 x dx.$$

Άσκηση 5.3 *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς.*

$$1)\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx, \quad e^x=t \text{ ή } x=\ln t, \quad 2)\int \frac{2+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}}dx, \quad \sqrt{x+3}=t.$$

Άσκηση 5.4 *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:*

$$1)\int \frac{x}{2x^2+x-1}dx, \quad 2)\int \frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+2)}dx, \quad 3)\int \frac{e^{3x}}{(e^x-1)(e^x+2)^2}dx$$

Άσκηση 5.5 *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς.*

$$1)\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}dx, \quad a)\text{Euler και } \beta)\text{τριγωνομετρικό },$$

$$2)\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-\sin x-2}dx, \quad \sin x=t$$

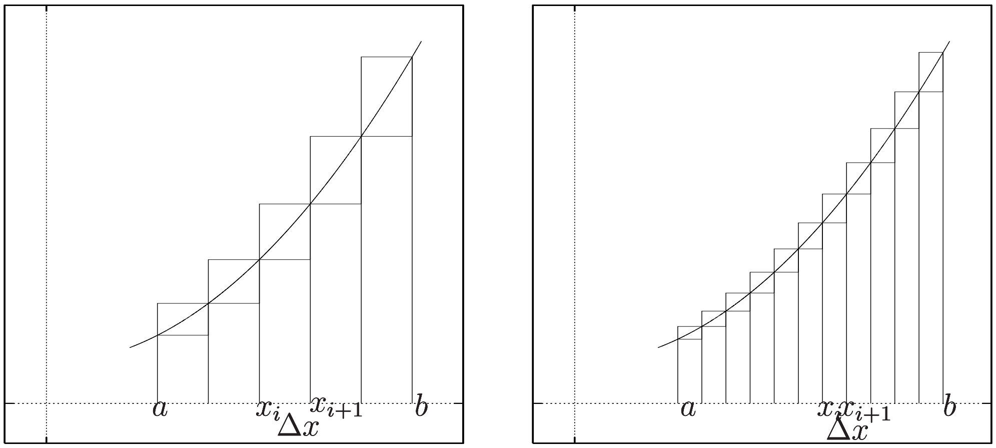
$$3)\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx, \quad 4)\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx, \quad \tan\frac{x}{2}=t.$$

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

6.1 Γενικά

Από το Γυμνάσιο ακόμη είναι γνωστό ότι το εμβαδόν του κύκλου είναι πr^2 όπου $\pi = 3,14159\ldots$. Στο Λύκειο έγινε γνωστό ότι η παραπάνω μέτρηση προέκυψε παίρνοντας το όριο στο εμβαδόν ενός κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου (ή περιγεγραμμένου) στον κύκλο, διπλασιάζοντας συνεχώς τις πλευρές του και ότι οφείλεται στους αρχαίους Έλληνες και μάλιστα στον Αρχιμήδη. Βέβαια, οι αρχαίοι Έλληνες υπολόγισαν το εμβαδόν και άλλων καμπυλόγραμμων σχημάτων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης, η οποία σήμερα καλείται «μέθοδος της εξάντλησης». Στη μέθοδο αυτή στηρίχθηκαν, πολλούς αιώνες αργότερα, οι Ευρωπαίοι μαθηματικοί και δημιούργησαν τον Ολοκληρωτικό Λογισμό, με τον οποίο θα ασχοληθούμε στα επόμενα.

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, για την οποία ισχύει $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$, η οποία μαζί με τις ευθείες $x = a,\ x = b$ και τον οριζόντιο άξονα $y = 0$ περικλείουν μια επιφάνεια (στο Σχήμα ;; ένα καμπυλόγραμμο τραπέζιο). Για τον υπολογισμό του εμβαδού αυτής της επιφάνειας χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα $[a,b]$ σε n τμήματα με τα ενδιάμεσα σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ και ορίζουμε τις ευθείες $x = x_i,\ i = 1(1)n-1$. Συνολικά, οι $n+1$ κάθετες ευθείες στον οριζόντιο άξονα, οι $n-1$ που ορίστηκαν από τα ενδιάμεσα σημεία $x_i,\ i = 1(1)n-1$ και οι δύο εκείνες που ορίζονται από τα σημεία $x_0 = a$ και $x_n = b$, ορίζουν n λωρίδες παράλληλες μεταξύ τους. Μεταφερόμαστε στη λωρίδα που ορίζεται από τις διαδοχικές ευθείες $x = x_i$ και x_{i+1}, έστω την λ_i και ό,τι ισχύει γι' αυτή θα ισχύει για όλες. Στο διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ η συνάρτησή μας παίρνει μεγίστη τιμή, έστω την M_i και ελαχίστη έστω την m_i. Αν E_i είναι το



Σχήμα 6.35: Η εφαπτομένη της $y = f(x)$.

εμβαδόν του στοιχειώδους καμπυλόγραμμου τραπεζίου, γι' αυτό θα ισχύει:

$$m_i(x_{i+1} - x_i) \leq E_i \leq M_i(x_{i+1} - x_i). \quad i = 0(1)n - 1 \tag{6.1}$$

Αθροίζοντας όλα τα στοιχειώδη εμβαδά της σχέσης (6.1), παίρνουμε

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq E = \sum_{i=1}^{n} E_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = U_n. \tag{6.2}$$

Το εμβαδόν L_n αντιστοιχεί στα ορθογώνια που είναι στο εσωτερικό του σχήματός μας και U_n αντιστοιχεί στα ορθογώνια που είναι στο εξωτερικό του. Θα εξυπηρετούσε το σκοπό μας η μείωση της διαφοράς του $U_n - L_n$, και αν είναι δυνατό, να γίνει αυτή μηδέν. Για το σκοπό αυτό στενεύουμε τις λωρίδες με τον εξής τρόπο: Αυξάνουμε τον αριθμό των εσωτερικών σημείων και παίρνουμε τα $x'_j,\ j = 1(1)n' - 1$, έτσι ώστε

$$\max_j |x'_{j+1} - x'_j| = \max_j \Delta x'_j < \max_i \Delta x_i = \max_i |x_{i+1} - x_i|.$$

Φαίνεται, τώρα, (βλ. Σχήμα ;;) ότι η τεθλασμένη που σχηματίζει η άνω πλευρά των ορθογώνιων, πλησιάζει περισσότερο στην καμπύλη και η διαφορά $U_n - L_n$ μειώνεται.

Αποδεικνύεται ότι, η απόδειξη στηρίζεται στην έννοια της «ομοιόμορφης συνέχειας» και ως εκ τούτου ξεφεύγει του σκοπού του παρόντος εγχειριδίου, για τις

συνεχείς συναρτήσεις f, καθώς το $\max_j \Delta x'_j \to 0$ το $n \to \infty$ και η διαφορά $(U_n - L_n) \to 0$. Επομένως, $\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} U_n = E$.
Αφού θεωρήσαμε τη συνάρτηση f συνεχή, στο διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ θα ισχύει πάντα

$$m_i \leq f(c_i) \leq M_i, \forall c_i \in [x_{i-1}, x_i] \tag{6.3}$$

και επομένως

$$\sum_i^n m_i \Delta x_i \leq \sum_i^n f(c_i)\Delta x_i \leq \sum_i^n M_i \Delta x_i. \tag{6.4}$$

Το γεγονός $(U_n - L_n) \to 0$, μας λέει ότι το όριο

$$\lim_{\max_j \Delta x_j \to 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = S \tag{6.5}$$

υπάρχει και είναι ανεξάρτητο της επιλογής των c_i.

Ορισμός 6.1.1*Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[a, b]$, τότε το όριο της σχέσης (6.5) ονομάζεται ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a, b]$ ή ορισμένο ολοκλήρωμα της f από το a στο b και συμβολίζεται*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx. \tag{6.6}$$

Ορισμός 6.1.2*Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[a, b]$, τότε*

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad \text{και} \quad \int_a^a f(x)dx = 0. \tag{6.7}$$

Γίνεται φανερό ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι δυνατόν να παίρνει και αρνητικές τιμές, που σημαίνει ότι τώρα δε θα εκφράζει ένα εμβαδόν, με την έννοια που το γνωρίζουμε από το Λύκειο. Θα εκφράζει εμβαδόν με τη γνωστή έννοια μόνον, όταν $f(x) \geq 0$ και $a < b$, διαφορετικά θα εκφράζει ένα προσημασμένο εμβαδόν.

Παρατήρηση 6.1.1*Η μεταβλητή x στο ορισμένο ολοκλήρωμα δεν παίζει κανένα ρόλο. Μπορεί να είναι οποιαδήποτε άλλη. Δηλ. τα σύμβολα*

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b f(t)dt, \quad \int_a^b f(u)du$$

παριστάνουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα.

Παρατήρηση 6.1.2 *Αποδεικνύεται ότι η σχέση (6.6) του ορισμού (6.1.1) ισχύει και στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι φραγμένη και έχει ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων ασυνέχειας.*

Παρατήρηση 6.1.3 *Για μια λεπτομερή μελέτη της κατά Riemann ολοκλήρωσης ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται μπορεί να καταφύγει σε βιβλία Μαθηματικής Ανάλυσης π.χ. ([7], [5], [3], [4]).*

Παράδειγμα 6.1 *Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα*

$$1)\int_1^2 x dx, \quad 2)\int_0^2 x^2 dx, \quad 3)\int_0^1 \sqrt{x} dx, \quad 4)\int_0^1 e^x dx,$$

χρησιμοποιώντας εξωτερικά ή εσωτερικά ορθογώνια, αφού πρώτα διαιρεθούν τα σχετικά διαστήματα σε n ισομήκη τμήματα.

Λύση 1) Το διάστημα $[1,2]$ το χωρίζουμε σε n ισομήκη τμήματα μήκους $\Delta x = \frac{1}{n}$ με τα σημεία $1 = x_0, x_1 = 1 + \frac{1}{n}, x_2 = 1 + 2\frac{1}{n}, \ldots, x_i = 1 + i\frac{1}{n}, \ldots, x_n = 2$. Από τον Ορισμό 6.1.1 και χρησιμοποιώντας εσωτερικά ορθογώνια θα ισχύει:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1}(1 + i\frac{1}{n})\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} 1 + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} i\Big) = \frac{1}{n}\Big(n + \frac{1}{n}\frac{n(n-1)}{2}\Big)$$

$$\text{οπότε} \quad \int_1^2 x dx = \lim\,(1 + \frac{n(n-1)}{2n^2}) = \frac{3}{2}.$$

2) Το διάστημα $[1,2]$ το χωρίζουμε σε n ισομήκη τμήματα μήκους $\Delta x = \frac{2}{n}$ με τα σημεία $0 = x_0, x_1 = \frac{2}{n}, x_2 = 2\frac{2}{n}, \ldots, x_i = i\frac{2}{n}, \ldots, x_n = 2$. Από τον Ορισμό 6.1.1 και χρησιμοποιώντας εξωτερικά ορθογώνια θα ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}(i\frac{2}{n})^2\frac{2}{n} = \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{οπότε} \quad \int_0^2 x^2 dx = \lim\frac{8n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{8}{3}.$$

3) Το διάστημα $[0,1]$ το χωρίζουμε σε n ισομήκη τμήματα μήκους $\Delta x = \frac{1}{n}$ με τα σημεία $0 = x_0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = 2\frac{1}{n}, \ldots, x_i = i\frac{1}{n}, \ldots, x_n = 1$. Από τον Ορισμό 6.1.1 και χρησιμοποιώντας εξωτερικά ορθογώνια θα ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i\frac{1}{n}}\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{i}}{n\sqrt{n}}$$

$$\text{οπότε} \quad \int_0^1 \sqrt{x}dx = \lim \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$$

Όμως από το κριτήριο του Stolz (2.2.20) θα έχουμε

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx = \lim \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}} = \lim \frac{\sqrt{n+1}\big[(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}\big]}{(n+1)^3 - n^3} = \cdots = \frac{2}{3}.$$

4) Το διάστημα $[0,1]$ το χωρίζουμε σε n ισομήκη τμήματα μήκους $\Delta x = \frac{1}{n}$ με τα σημεία $0 = x_0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = 2\frac{1}{n}, \ldots, x_i = i\frac{1}{n}, \ldots, x_n = 1$. Από τον Ορισμό (6.1.1 και χρησιμοποιώντας εσωτερικά ορθογώνια θα ισχύει:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} e^{i\frac{1}{n}}\frac{1}{n} = h\sum_{i=0}^{n-1} e^{ih}, \text{ θέτοντας } \quad \frac{1}{n} = h$$

$$\text{έχουμε} \quad \int_0^1 e^x dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{i=0}^{n-1} e^{ih} = \lim_{h\to 0} h(1 + e^h + e^{2h} + \cdots + e^{(n-1)h}).$$

Η προηγούμενη σχέση, το γεγονός ότι $nh = 1$ και ο κανόνας του De l' Hôspital, τελικά, δίνουν

$$\int_0^1 e^x dx = \lim_{h\to 0} h\frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1} = \lim_{h\to 0} (e-1)\frac{h}{e^h - 1} = e - 1.$$

6.2 Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

Μια σειρά από βασικές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος απορρέουν από τον ορισμό, τις οποίες θα δώσουμε στο επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 6.2.1(*Ιδιότητες*) *Έστω οι f και g δυο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a,b]$. Τότε ισχύουν:*

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx, \tag{6.8}$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \tag{6.9}$$

$$f(x)\geq g(x),\ \text{στο } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx, \tag{6.10}$$

$$\min_{x\in[a,b]} f(x)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max_{x\in[a,b]} f(x)(b-a), \tag{6.11}$$

$$\text{αν η } f \text{ είναι συνεχής στο } [\min\{a,b,c\},\max\{a,b,c\}]$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{6.12}$$

Από τις βασικές ιδιότητες μπορούμε να αντλήσουμε άλλες σημαντικές ιδιότητες του ολοκληρωτικού λογισμού. Για παράδειγμα, από την ιδιότητα (6.10) και το γεγονός ότι $-f(x)\leq |f(x)|$ και $f(x)\leq |f(x)|$ συμπεραίνουμε ότι $-\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$ και $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$, οπότε έχουμε

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Αν θεωρήσουμε τις συνεχείς συναρτήσεις f και g στο διάστημα $[a,b]$ και έναν αριθμό $k\in\mathbb{R}$, τότε αφού $(kf(x)+g(x))^2\geq 0$, θα ισχύει και

$$\int_a^b (kf(x)+g(x))^2dx = k^2\int_a^b (f(x))^2dx + 2k\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b (g(x))^2dx \geq 0.$$

Όμως το τελευταίο είναι ένα τριώνυμο ως προς k, μόνιμα μη αρνητική ποσότητα όπως ακριβώς είναι το a του, δηλ το $\int_a^b (f(x))^2dx$. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να έχει μη θετική διακρίνουσα. Έτσι αποδείξαμε το επόμενο.

Θεώρημα 6.2.2(*Cauchy–Schwartz για συναρτήσεις*) *Αν οι f και g είναι δυο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a,b]$, τότε ισχύει*

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)dx\Big)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2dx\int_a^b (g(x))^2dx.$$

Με δεδομένο ότι $b > a$, η ιδιότητα (6.11) γράφεται ώς εξής:

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \max_{x\in[a,b]} f(x). \tag{6.13}$$

Αφού η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[a, b]$, από το Θεώρημα 3.9.8 (των ενδιάμεσων τιμών) προκύπτει το επόμενο.

Θεώρημα 6.2.3(*Μέσης τιμής συνεχούς συνάρτησης.) Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$, τότε υπάρχει ένα σημείο $\xi \in [a, b]$, ώστε*

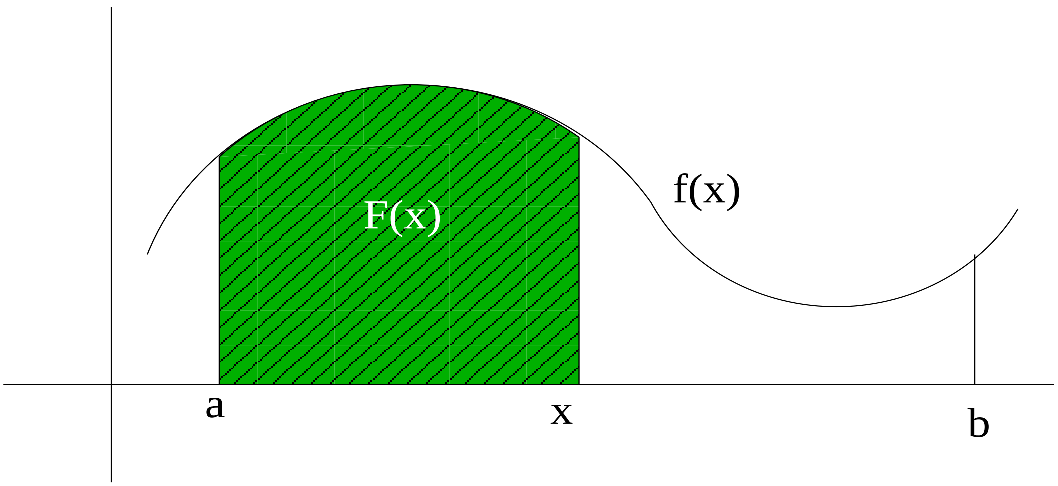
$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{6.14}$$

Το δεξιό μέλος της (6.14) εκφράζει τη μέση τιμή της συνάρτησης f. Γεωμετρικά το Θεώρημα αυτό ερμηνεύεται ως εξής: Μεταξύ του a και του b υπάρχει κάποιο σημείο ξ, για το οποίο το ορθογώνιο που έχει για ύψος την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό και βάση το τμήμα $[a, b]$ έχει το ίδιο εμβαδόν με το ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο $[a, b]$.

Από την ιδιότητα (6.12) και την παρατήρηση (6.1.2) μπορεί κάποιος να συμπεράνει ότι ο ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος ισχύει ακόμη και για ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων ασυνέχειας. Οι συναρτήσεις με ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων ασυνέχειας, επειδή ακριβώς γι' αυτές τις συναρτήσεις υπάρχει το ορισμένο ολοκλήρωμα, ανήκουν σε μια ευρύτερη κατηγορία συναρτήσεων, που καλούνται «**ολοκληρώσιμες**» συναρτήσεις.

6.3 Το θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

Η εύρεση του ορισμένου ολοκληρώματος δια μέσου του ορισμού είναι γενικά δύσκολη και ούτε οι ιδιότητες, που είδαμε, βοηθούν ιδιαίτερα. Η σύνδεση όμως του ορισμένου ολοκληρώματος με το αόριστο λύνει κυριολεκτικά τα χέρια του επιστήμονα και κάνει τον ολοκληρωτικό λογισμό ένα δυνατό εργαλείο για την επιστήμη του.



Σχήμα 6.36: Η παράγουσα $F(x)$.

Έστω f μια ορισμένη και συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$ και x ένα τυχαίο σημείο αυτού. Ορίζεται τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{6.15}$$

Η μεταβλητή t τέθηκε για να μην υπάρχει σύγχυση με τη μεταβλητή x. Γεωμετρικά η συνάρτηση F εκφράζει το εμβαδόν κάτω από τη συνάρτηση f στο διάστημα $[a, x]$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.36. Μάλιστα είναι φανερό ότι $F(b)$ ισούται με το ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο διάστημα $[a, b]$, δηλ. $F(b) = \int_a^b f(t)dt$ και $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$.

Θεώρημα 6.3.1 *Έστω f μια ορισμένη και συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$. Τότε η συνάρτηση της (6.15) είναι μια παράγουσα της f, δηλ. $F'(x) = f(x)$.*

Απόδειξη: Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής, τότε για κάθε ξ με $\xi \in [x, x_0)$ ή $\xi \in (x_0, x]$ θα ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(\xi) = f(x_0)$ (βλ. Άσκηση 3.14).
Έστω τώρα ένα τυχαίο σημείο $x_0 \in (a, b)$. Η παράγωγος της $F(x)$ στο σημείο x_0 είναι

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(\xi)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(\xi) = f(x_0),$$

αφού από το Θεώρημα 6.2.3 ισχύει $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(\xi)(x - x_0)$ με $\xi \in [x, x_0]$. Επειδή το x_0 το πήραμε τυχαία, το ίδιο θα ισχύει για κάθε σημείο του διαστήματος (a, b). □

Με το προηγούμενο Θεώρημα ουσιαστικά βρήκαμε όλες τις παράγουσες της f, αφού γνωρίζουμε ότι αυτές διαφέρουν κατά σταθερά δηλ. αν G είναι μια παράγουσα της f, αυτή θα είναι $G(x) = F(x) + C$, επειδή $G(a) = F(a) + C$ και $F(a) = 0$ έχουμε $G(a) = C$. Επιπλέον

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = G(b) - C = G(b) - G(a).$$

Έτσι αποδείξαμε το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 6.3.2*(Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού). Αν η f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα $[a, b]$ και G μια παράγουσα αυτής, τότε*

$$\int_a^b f(x)dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a).$$

Παράδειγμα 6.2*Να βρεθούν τα ολοκληρώματα:*

$$1)\ \int_0^2 x^2 dx \quad 2)\ \int_0^1 \sqrt{x}dx, \quad 3)\ \int_0^1 e^x dx \quad 4)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx.$$

Λύση

$$1)\ \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}.$$

$$2)\ \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$3)\ \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1.$$

$$4)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^e = 1 - 0 = 1.$$

Φυσικά, η καινούργια διαδικασία που εφαρμόστηκε εδώ δεν έχει καμιά σχέση με εκείνη του παραδείγματος (6.1), εκτός από το αποτέλεσμα που είναι, προφανώς, το ίδιο. Είναι πιο κομψή, πιο εύκολη και πολύ πιο γρήγορη.

6.3.1 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Θεώρημα 6.3.3 *Έστω f και g δυο συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς στο $[a, b]$, με συνεχείς παραγώγους σ' αυτό. Τότε ισχύει*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Απόδειξη: Να γίνει από τον αναγνώστη. □

Παράδειγμα 6.3 *Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:*

$$1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx, \quad 2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx, \quad 3)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx.$$

Λύση

1) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

2) $$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\sin x dx = -\sin^{n-1}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx$$

οπότε $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Leftrightarrow I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.

Εφαρμόζοντας τον τελευταίο τύπο αναδρομικά παίρνουμε τα αποτελέσματά μας.

Θεώρημα 6.3.4 *Έστω η συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και $x = g(t)$, όπου g μια συνάρτηση ορισμένη και με συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[\sigma, \tau]$. Αν $g(\sigma) = a$ και $g(\tau) = b$, τότε*

$$\int_\sigma^\tau f(g(t))g'(t)dt = \int_a^b f(x)dx.$$

Απόδειξη: Αν $F(x)$ μια παράγουσα της f, τότε $F'(x) = f(x)$ και $\int_a^b f(x)dx = F(b) - f(a)$. Επιπλέον, από την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης ισχύει

$$\Big(F(g(t))\Big)' = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

έτσι έχουμε

$$\int_\sigma^\tau f(g(t))g'(t)dt = \int_\sigma^\tau \Big(F(g(t))\Big)'dt = F(g(\tau)) - F(f(\sigma) =$$

$$F(b) - F(a) = \int_{a=g(\sigma)}^{b=g(\tau)} f(x)dx.$$

□

Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο τύπος του Θεωρήματος 6.3.4 εφαρμόζεται και αντίστροφα. Ας θυμηθούμε την αλλαγή μεταβλητής από το αόριστο ολοκλήρωμα. Στην περίπτωση αυτή, θέτοντας $x = g(t)$ και υπό την προϋπόθεση ότι η g είναι αντιστρέψιμη, εξυπηρετεί η μορφή

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt.$$

Παράδειγμα 6.4*Να υπολογιστούν τα ορισμένα ολοκληρώματα:*

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx, \quad 2) \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}dx, \quad a > 0$$

Λύση

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x (\sin x)' dx = \int_{0=\sin 0}^{1=\sin\frac{\pi}{2}} u^3 du = \frac{u^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

2) Θέτοντας $x = a\cos t$, έχουμε $dx = -a\sin t dt$, οπότε $t = \cos^{-1}\frac{x}{a}$, έτσι

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int_{\pi=\arccos\frac{-a}{a}}^{0=\arccos\frac{a}{a}} a\sqrt{1-\cos^2 t}(-a\sin t)dt = -a^2\int_\pi^0 \sin^2 t dt =$$

$$\cdots = \frac{\pi a^2}{2},$$

ένα αποτέλεσμα που μάλλον θα έπρεπε να περιμένουμε, αφού το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ουσιαστικά το εμβαδόν ενός ημικυκλίου ακτίνας a.

Φυσικά, κάποια προβλήματα μπορεί να έχουν μια μεγαλύτερη δυσκολία, όμως αυτό δεν πρέπει να καταβάλει τον φοιτητή. Εξάλλου ο σημερινός φοιτητής και αυριανός επιστήμονας πάντοτε θα προσπαθεί να επιλύσει κάποιο πρόβλημα.

Παράδειγμα 6.5*Έστω η f συνεχής και αύξουσα στο $[a, b]$. Να δειχτεί ότι*

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

Λύση Εύκολα μπορεί να δει κάποιος (με αλλαγή μεταβλητής) ότι

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

Έτσι

$$\int_a^b xf(x)dx = \int_a^b (a+b-x)f(a+b-x)dx =$$

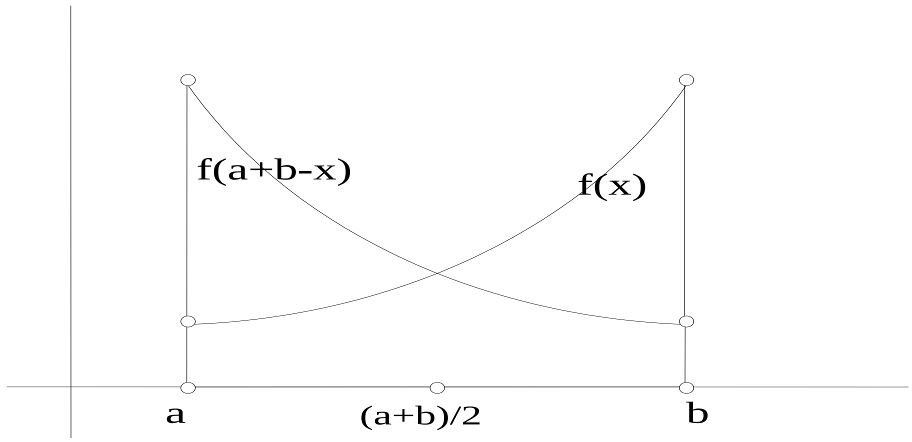
$$\int_a^b (a+b)f(a+b-x)dx - \int_a^b xf(a+b-x)dx$$

$$= (a+b)\int_a^b f(a+b-x)dx - \int_a^b xf(a+b-x)dx =$$

$$(a+b)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(a+b-x)dx \tag{6.16}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \int_a^b xf(a+b-x)dx \tag{6.17}$$



Σχήμα 6.37: Η απεικόνιση των $f(x)$ και $f(a+b-x)$.

Όμως ισχύει (το σταθερό πρόσημο των δυο συναρτήσεων, εύκολα προκύπτει από το ότι η $f(x)$ είναι αύξουσα, εξάλλου φαίνεται και στο Σχήμα 6.37,)

$$\begin{aligned}\int_a^b x[f(x)-f(a+b-x)]dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} x[\underbrace{f(x)-f(a+b-x)}_{\leq 0}]dx \\ &+ \int_{\frac{a+b}{2}}^b x[\underbrace{f(x)-f(a+b-x)}_{\geq 0}]dx.\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα της μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b x[f(x)-f(a+b-x)]dx &= \xi_1 \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x)-f(a+b-x)]dx \\ &+ \xi_2 \int_{\frac{a+b}{2}}^b [f(x)-f(a+b-x)]dx.\end{aligned}$$

Με αλλαγή μεταβλητής πάλι στο πρώτο ολοκλήρωμα του δευτέρου μέλους παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b x[f(x)-f(a+b-x)]dx &= \xi_1\int_{\frac{a+b}{2}}^b [f(a+b-x)-f(x)]dx\\ &+ \xi_2\int_{\frac{a+b}{2}}^b [f(x)-f(a+b-x)]dx\\ &= (\xi_2-\xi_1)\int_{\frac{a+b}{2}}^b [f(x)-f(a+b-x)]dx\\ &\geq 0.\end{aligned}$$

6.3.2 Αριθμητική ολοκλήρωση

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[a,b]$. Για ευκολία θέτουμε $a=x_0$, $b=x_1$, $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$ και $h=x_1-x_0$. Προσεγγίζοντας τη συνάρτηση f με την ευθεία

$$y=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)+y_0$$

θα έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx\approx\int_{x_0}^{x_1}\Big(\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)+y_0\Big)dx=\cdots=\frac{h}{2}(y_0+y_1).$$

Διαιρώντας το διάστημα $[a,b]$ σε n ισομήκη διαστήματα με τα σημεία $a=x_0,x_1,$ $x_2,\ldots,x_{n-1},x_n=b$, προκύπτει ο επόμενος τύπος, που είναι γνωστός ως **γενικευμένος κανόνας του τραπεζίου**

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx\approx\frac{h}{2}(y_0+2y_1+2y_1+\cdots+2y_{n-1}+y_n), \tag{6.18}$$

όπου $h=\frac{b-a}{n}$.

Παράδειγμα 6.6*Να υπολογίσετε το Ολοκλήρωμα*

$$\int_{1.5}^{2.5}\frac{x}{x^3-2}dx$$

χρησιμοποιώντας το γενικευμένο κανόνα του τραπεζίου (6.18), χωρίζοντας το διάστημα ολοκλήρωσης σε 10 υποδιαστήματα

Λύση Αφού θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του τραπεζίου για 10 διαστήματα, θα έχουμε $n = 10$ και $h = 0.1$, οπότε $x_0 = 1.5$ και $x_i = 1.5 + i \cdot h,\ i = 1(1)10$. Για τις τιμές των x_i βρίσκουμε τις αντίστοιχες y_i δηλαδή $y_0 = 0.763359, y_1 = 0.583591, y_2 = 0.469729, y_3 = 0.391027, y_4 = 0.333333, y_5 = 0.289216, y_6 = 0.254394, y_7 = 0.226222,\ y_8 = 0.202977, y_9 = 0.183486, y_{10} = 0.166923$. Από τον τύπο (6.18) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\int_{1.5}^{2.5} \frac{x}{x^3-3}dx &= \frac{0.1}{2}(0.763359 + 2\cdot 0.583591 + 2\cdot 0.469729 + 2\cdot 0.391027 \\ &+ 2\cdot 0.333333 + 2\cdot 0.289216 + 2\cdot 0.254394 + 2\cdot 0.226222 \\ &+ 2\cdot 0.202977 + 2\cdot 0.183486 + 0.166923) \\ &= 0.415105.\end{aligned}$$

6.4 Εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος

6.4.1 Το εμβαδόν

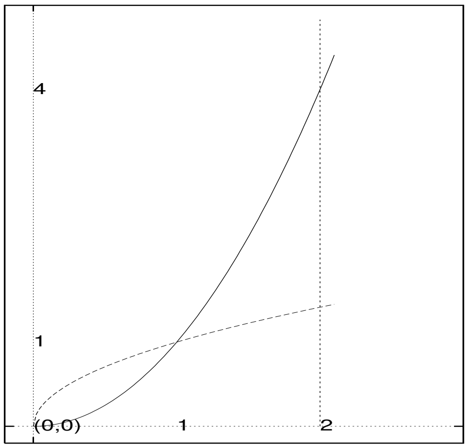
Ήδη έχουμε δει ότι με το ορισμένο ολοκλήρωμα μιας μη αρνητικής συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[a, b]$ υπολογίζουμε το εμβαδόν του χωρίου, που περιέχεται μεταξύ της καμπύλης του οριζόντιου άξονα και των ευθειών $x = a$ και $x = b$.

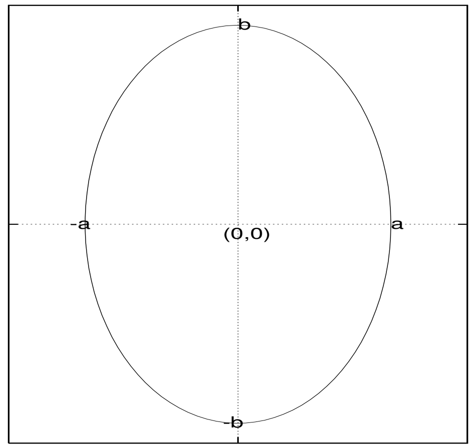
Όταν η συνάρτηση είναι μη θετική, τότε το χωρίο που ορίζεται από τη συνάρτηση f είναι συμμετρικό, ως προς τον οριζόντιο άξονα, με το χωρίο που ορίζεται από τη συνάρτηση $-f$ και ως εκ τούτου θα έχει το ίδιο εμβαδόν. Έτσι, στην περίπτωση αυτή το εμβαδόν θα υπολογίζεται από το $\int_a^b -f(x)dx$. Γενικά, λοιπόν, το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από μια συνάρτηση f, τον οριζόντιο άξονα και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$ θα υπολογίζεται από τον τύπο

$$E = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Φυσικά, λαμβάνοντας υπόψη μας τη γεωμετρία του σχήματος μπορούμε να υπολογίζουμε εμβαδά περιοχών μεταξύ δυο καμπύλων και των ευθειών $x = a$ και $x = b$.

Παράδειγμα 6.7*Να υπολογίσετε το εμβαδόν μεταξύ των συναρτήσεων* $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$ *και των ευθειών* $x = 0$ *και* $x = 2$.





Σχήμα 6.38: Η περιοχή μεταξύ δυο συναρτήσεων. Έλλειψη

Λύση Όπως μπορεί κανείς να δει στο Σχήμα 6.38, αριστερά, οι δυο καμπύλες τέμνονται στα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$ και στο διάστημα $[0,1]$ έχουμε $g(x) \geq f(x)$, ενώ στο διάστημα $[1,2]$ έχουμε $f(x) \geq g(x)$. Έτσι, το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx + \int_1^2 (x^2 - \sqrt{x})dx = \cdots = \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3}.$$

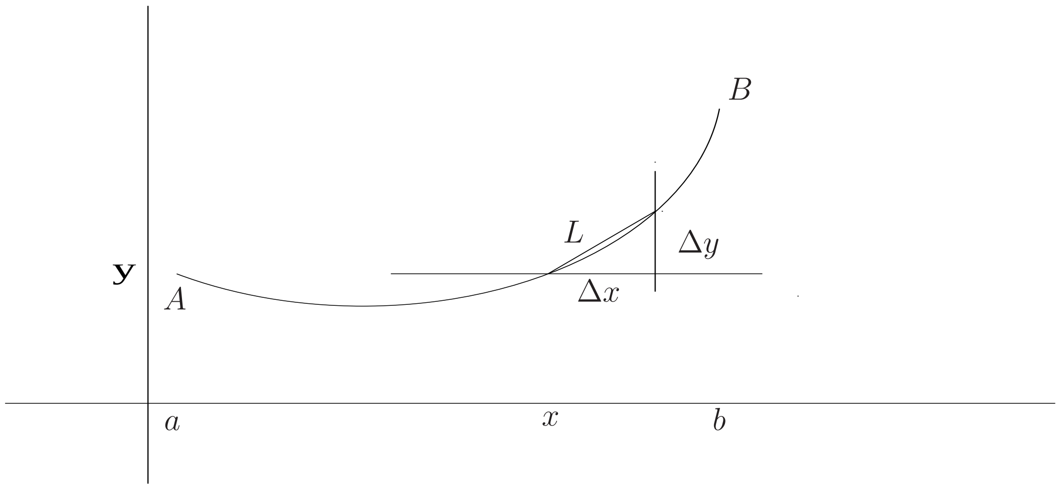
Στις περιπτώσεις που οι καμπύλες δίνονται με τις παραμετρικές εξισώσεις τους, ουσιαστικά πρόκειται για αλλαγή μεταβλητής, δηλ. ενώ είχαμε την $y = f(x)$, θέσαμε $x = x(t)$ και προέκυψε $y = f(x(t)) = y(t)$. Έτσι ισχύει η θεωρία της αλλαγής μεταβλητής, οπότε έχουμε:

$$E = \int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt. \tag{6.19}$$

Παράδειγμα 6.8*Να υπολογίσετε το εμβαδόν της έλλειψης (3.31) του Σχήματος 6.38* $x = a\sin\vartheta$, $y = b\cos\vartheta$ *και* $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

Λύση Χρησιμοποιώντας τον τύπο (6.19) και τις παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης στο πρώτο τεταρτημόριο βρίσκουμε

$$\frac{1}{4}E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)x'(t)d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} b\cos\vartheta a\cos\vartheta d\vartheta = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\vartheta d\vartheta =$$



Σχήμα 6.39: Η εφαπτομένη της $y = f(x)$.

$$ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(\cos 2\vartheta + 1) d2\vartheta = \frac{ab}{4}\Big[\sin(2\vartheta) + 2\vartheta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab\pi}{4}.$$

Έτσι έχουμε ότι το εμβαδόν της έλλειψης είναι $E = \pi ab$.

6.4.2 Το μήκος καμπύλης

Για να σκιαγραφήσουμε τον υπολογισμό του μήκους μιας καμπύλης σκεφτόμαστε ως εξής: Θεωρούμε ότι η καμπύλη μας χωρίζεται σε n τμήματα και κάθε ένα από αυτά τα προσεγγίζουμε με τη χορδή τους. Έτσι για το τμήμα PQ θα έχουμε

$$L_{PQ} \approx L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

οπότε για ολόκληρη την καμπύλη και υπό την προϋπόθεση ότι το όριο υπάρχει, καθώς το $n \to \infty$ έτσι ώστε και το $\Delta x \to 0$, θα ισχύει

$$L_{AB} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} L_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \tag{6.20}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Από το Θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού (4.8.6) θα έχουμε ότι $\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) = (x_{i+1} - x_i)f'(\xi_i) = \Delta x_i f'(\xi_i)$, οπότε η (6.20) γράφεται

$$L_{AB} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta x_i f'(\xi_i))^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i$$

ή τελικά

$$L_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \tag{6.21}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η καμπύλη δίνεται με τις παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$ με $t \in [t_1, t_2]$ και κάθε σημείο $P(x, y)$ της καμπύλης παίρνεται μόνο μια φορά, καθώς το t διανύει το $[t_1, t_2]$, και επί πλέον οι συναρτήσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$ είναι παραγωγίσιμες με συνεχείς παραγώγους· τότε πάλι από το Θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού (4.8.6) θα έχουμε

$$L_{AB} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(\xi_i'))^2\Delta t_i + (y'(\xi_i''))^2}\Delta t_i = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt. \tag{6.22}$$

Παράδειγμα 6.9*Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου (O, r) χρησιμοποιώντας α) τον τύπο (6.21) και β) τον τύπο (6.22).*

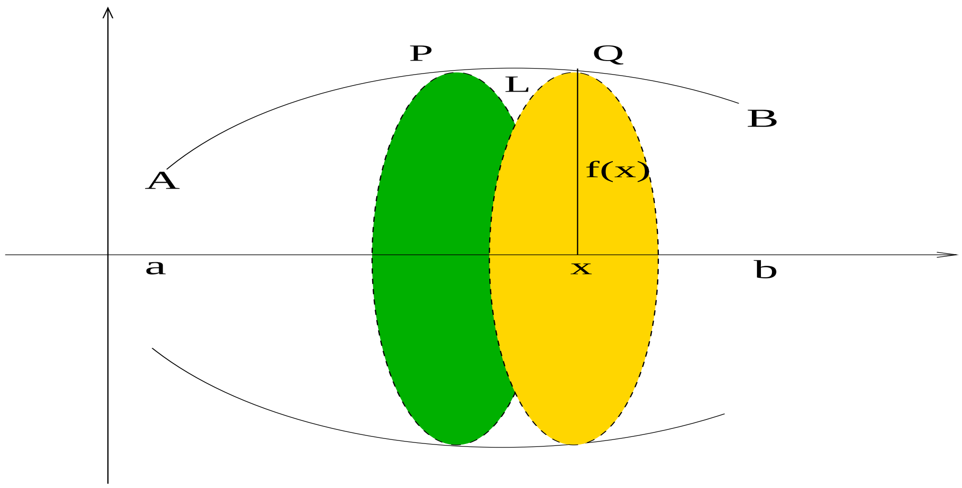
Λύση 1) Έστω $x^2 + y^2 = r^2$ ο κύκλος (O, r), οπότε το μήκος του ημικυκλίου $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ από τον τύπο (6.21) θα είναι

$$L = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \cdots = r\int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}dx = \cdots = \pi r.$$

2) Έστω, τώρα, $x = r\cos\vartheta,\ y = r\sin\vartheta$ με $\vartheta \in [0, 2\pi]$ ο κύκλος (O, r), οπότε το μήκος του ημικυκλίου ($\vartheta \in [0, \pi]$), από τον τύπο (6.22) θα είναι

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{(x'(\vartheta))^2 + (y'(\vartheta))^2}d\vartheta = r\int_0^{\pi} 1 d\vartheta = \pi r,$$

οπότε $L = 2\pi r$.



Σχήμα 6.40: Στοιχειώδης κύλινδρος εκ περιστροφής.

6.4.3 Επιφάνεια και όγκος στερεών εκ περιστροφής

Όταν μια συνεχής καμπύλη $y = f(x)$ περιστραφεί γύρω από τον άξονα $x'x$, δημιουργείται ένα στερεό, που ονομάζεται στερεό εκ περιστροφής. «Τεμαχίζοντας» το στερεό με επίπεδα κάθετα στον άξονα $x'x$ είναι δυνατόν, με μεθόδους που περιγράψαμε προηγουμένως, να βρούμε και να αποδείξουμε τύπους για τον υπολογισμό των όγκων και των επιφανειών των στερεών αυτών. Στη συνέχεια θα σκιαγραφήσουμε την εύρεση των σχετικών τύπων και όχι την απόδειξή τους. Ο φοιτητής που ενδιαφέρεται θα πρέπει να καταφύγει σε βιβλία Ανάλυσης π.χ. ([4]).

Ας θεωρήσουμε την καμπύλη AB του Σχήματος 6.40 και δυο επίπεδα που διέρχονται από τα σημεία P και Q και είναι κάθετα στον οριζόντιο άξονα $x'x$. Το στοιχειώδες αυτό στερεό το θεωρούμε στοιχειώδη κύλινδρο· με δεδομένο ότι ο όγκος ενός κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο $V = \pi r^2 h$, θα έχουμε ότι ο στοιχειώδης όγκος του θα είναι

$$dV = \pi[f(x)]^2 dx.$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε τον τύπο του όγκου του στερεού εκ περιστροφής, δηλ.

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \tag{6.23}$$

Αν πάλι το στοιχειώδες αυτό στερεό το θεωρήσουμε κόλουρο κώνο, με δεδομένη τη σχέση (6.20) και το ότι ο όγκος του κόλουρου κώνου είναι $V = \pi(r_1 + r_2)l$, όπου r_1 και r_2 είναι οι ακτίνες των βάσεων και l η γεννήτρια (για το ορισμό του κώνου πάλι χρησιμοποιείται η περιστροφή), θα έχουμε ότι η στοιχειώδης επιφάνεια θα είναι

$$\Delta S = \pi\big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\big)\Delta l = \pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\Delta x.$$

Από τη σχέση αυτή και χρησιμοποιώντας την έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας αποδεικνύεται ότι το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού εκ περιστροφής είναι

$$E = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx. \tag{6.24}$$

Παράδειγμα 6.10*Να υπολογίσετε τον όγκο και την επιφάνεια μιας σφαίρας με ακτίνα r.*

Λύση Η σφαίρα δημιουργείται από την περιστροφή του ημικυκλίου $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ γύρω από τον οριζόντιο άξονα. Έτσι από τους τύπους (6.23) και (6.24) έχουμε

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E = 2\pi \int_{-r}^{r} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + [\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}]^2}dx =$$

$$2\pi \int_{-r}^{r} r dx = 4\pi r^2.$$

6.4.4 Άλλες εφαρμογές

Ενδιαφέρον αποκτά ο τύπος του Taylor δια μέσου του ορισμένου ολοκληρώματος. Όταν λοιπόν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, έχουμε

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_0) \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f'(t)dt}_{R(x)}.$$

Αν η συνάρτηση είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, όπως και προηγούμενα, παίρνουμε

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = -\int_{x_0}^{x} (x-t)' f'(t)dt = -(x-t)f'(t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)dt,$$

οπότε με απλή αντικατάσταση στην προηγούμενη σχέση προκύπτει

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \underbrace{\int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)dt}_{R(x)}.$$

Ομοίως αν είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη

$$\int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)dt = -\int_{x_0}^{x} \Big(\frac{(x-t)^2}{2}\Big)' f''(t)dt = -\frac{(x-t)^2}{2}\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} (x-t)^2 f'''(t)dt$$

και πάλι με αντικατάσταση έχουμε

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \underbrace{\frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^2 f'''(t)dt}_{R(x)}.$$

Επαγωγικά μπορούμε πλέον να πάρουμε, υπό την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση είναι n φορές παραγωγίσιμη, τον τύπο του Taylor

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + R(x),$$

όπου το υπόλοιπο του τύπου του Taylor είναι

$$R(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt. \tag{6.25}$$

Ακόμη, το ορισμένο ολοκλήρωμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε ότι κάποιες συναρτήσεις είναι αναλυτικές, όπως στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.11 *Να δειχτεί ότι η συνάρτηση* $\arctan x$ *είναι αναλυτική.*

Λύση Σε προηγούμενο παράδειγμα, στη σχέση (4.25) είδαμε ότι η συνάρτηση $\arctan x$ έχει τη μορφή

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Επίσης είδαμε ότι η σειρά του δευτέρου μέλους συγκλίνει για κάθε x με $|x| \leq 1$. Θα δούμε στη συνέχεια ότι αυτή συγκλίνει στη συνάρτηση $\arctan x$.
Θεωρούμε τη σχέση

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \underbrace{(-1)^{n+1}\frac{t^{2n+1}}{1+t^2}}_{\text{όροι που απομένουν}}$$

Ολοκληρώνοντας αυτή στο διάστημα $[0, x]$, προκύπτει

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R,$$

όπου

$$R = \int_0^x (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+1}}{1+t^2} dt$$

Όμως αφού $1 + t^2 \geq 1$, για την απόλυτη τιμή αυτού θα ισχύει

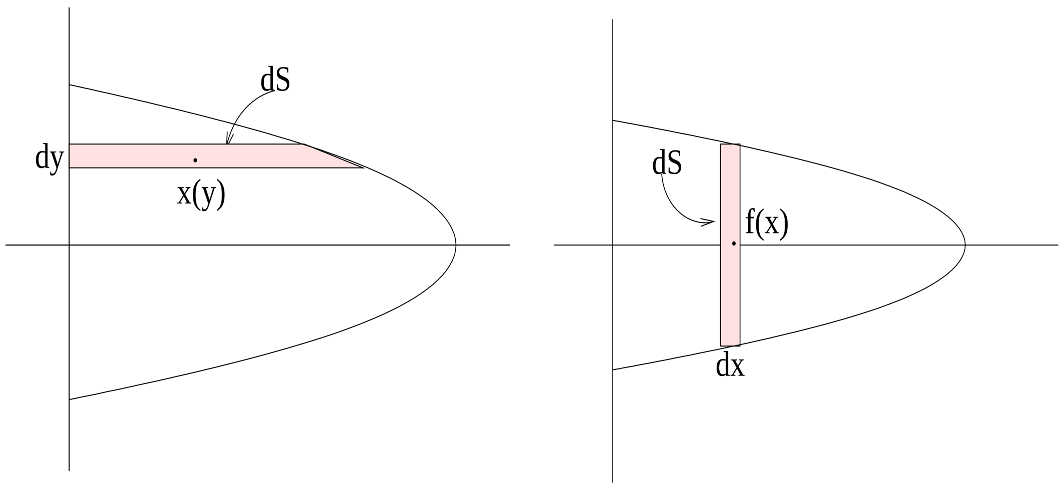
$$|R| = \int_0^x \frac{t^{2n+1}}{1+t^2} dt \leq \int_0^x t^{2n+1} dt = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

Πολλές είναι οι εφαρμογές που βρίσκει το ορισμένο ολοκλήρωμα στις Φυσικές επιστήμες π.χ. ροπή, κέντρο μάζας, έργο δύναμης, υδροστατική πίεση αλλά και στις άλλες επιστήμες, π.χ. πλεόνασμα του καταναλωτή ή πλεόνασμα του παραγωγού στην Οικονομία κ.λπ. Η λύση δίνεται, αφού λάβουμε υπόψη τη Θεωρία και τις τεχνικές που αναπτύχθηκαν αλλά και τη φύση του προβλήματος.

Παράδειγμα 6.12*Να βρεθεί το κέντρο μάζας ενός ομογενούς πλακιδίου που ορίζεται από την παραβολή $y^2 = 4 - x$ και τον οριζόντιο άξονα*

Λύση Στο Σχήμα 6.41 φαίνεται το πλακίδιο. Αφού το πλακίδιο είναι ομογενές και ο οριζόντιος άξονας είναι άξονας συμμετρίας, το κέντρο μάζας θα βρίσκεται



Σχήμα 6.41: Κέντρο μάζας: Οριζόντιες και κατακόρυφες λωρίδες.

σ' αυτόν, δηλ. $\bar{y} = 0$. Για τον προσδιορισμό του $\bar{x}$ χωρίζουμε το πλακίδιο ή σε οριζόντιες λωρίδες ή σε κατακόρυφες λωρίδες. Στη συνέχεια, θα λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τις οριζόντιες λωρίδες και ως άσκηση ο αναγνώστης ας χρησιμοποιήσει για την επίλυση τις κατακόρυφες.
Η στοιχειώδης μάζα μιας στοιχειώδους λωρίδας με σταθερή πυκνότητα δ και στοιχειώδη επιφάνεια είναι

$$dm = \delta ds = \delta x(y) dy \tag{6.26}$$

οπότε η συνολική μάζα του πλακιδίου θα είναι

$$M = \int_s \delta ds = \delta \int_{-2}^{2} x(y) dy = \delta \int_{-2}^{2} (4 - y^2) dy = \delta (4y - \frac{y^3}{3})\Big|_{-2}^{2} = \frac{32\delta}{3}. \tag{6.27}$$

Το κέντρο μάζας της στοιχειώδους λωρίδας, αφού αυτή είναι ομογενής, βρίσκεται στο κέντρο της, δηλ. έχει συντεταγμένες $(\frac{x(y)}{2}, y)$. Έτσι, η ροπή της λωρίδας ως προς τον κατακόρυφο άξονα θα είναι

$$dM_y = \frac{x(y)}{2} dm$$

και η ροπή όλων των λωρίδων μαζί είναι

$$M_y = \int_{-2}^{2} \frac{x(y)}{2} dm = \int_{-2}^{2} \frac{x(y)}{2} \delta x(y) dy = \frac{\delta}{2} \int_{-2}^{2} (4 - y^2)^2 dy = \frac{256\delta}{15}. \tag{6.28}$$

Αφού ως κέντρο μάζας θεωρούμε το σημείο που, αν βρισκόταν όλη η μάζα συγκεντρωμένη θα μας έδινε τη συνολική ροπή, θα έχουμε ότι

$$\bar{x}M = M_y \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{8}{5}.$$

Ασκήσεις

Άσκηση 6.1 *Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα*

$$1) \int_0^2 x dx, \quad 2) \int_0^1 x^3 dx, \quad 3) \int_0^1 x^2 dx$$

χρησιμοποιώντας εσωτερικά και εξωτερικά ορθογώνια, αφού πρώτα διαιρεθούν τα σχετικά διαστήματα σε n ισομήκη τμήματα.

Άσκηση 6.2 *Αφού πρώτα διαιρεθεί το διάστημα $[a, b]$ σε n τμήματα, τα σημεία του οποίου είναι όροι γεωμετρικής προόδου, π.χ. $x_0 = a, x_1 = a\omega,\ x_2 = a\omega^2,\ \ldots, x_n = a\omega^n = b$ (προφανώς $\omega = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ με $\lim_{n\to\infty} \omega = 1$), χρησιμοποιώντας εσωτερικά ορθογώνια, να δείξετε ότι*

$$\int_a^b x^m dx = \begin{cases} \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}, & m \neq -1 \\ \ln b - \ln a, & m = -1 \end{cases} .$$

Άσκηση 6.3 *Ερμηνεύστε το Θεώρημα 6.2.3 θεωρώντας την f ταχύτητα και το x χρόνο.*

Άσκηση 6.4 *Αν η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[a, b]$, η g παραγωγίσιμη και ορίζεται η σύνθεση $f \circ g$, να δειχτεί ότι*

$$\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t)dt = f(g(x))g'(x).$$

Άσκηση 6.5 *Να βρεθεί το x που μεγιστοποιεί το ολοκλήρωμα*

$$\frac{d}{dx} \int_x^{x+3} t(2-t)dt.$$

Άσκηση 6.6 *Να βρεθεί το όριο με τον κανόνα του De L' Hôpital*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\sin x}{x} dt.$$

Άσκηση 6.7 *Αν* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, *παρατηρήστε ότι α)* $I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$, *β)* $\lim \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$ *και αποδείξτε τον τύπο του Wallis*

$$\frac{\pi}{2} = \lim \Big[\Big(\frac{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 3} \Big)^2 \frac{1}{2n+1} \Big].$$

Άσκηση 6.8 *Να βρεθεί το εμβαδόν της ημιέλλειψης*

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad a, b > 0.$$

Άσκηση 6.9 *(Θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού) Ακολουθώντας τη λογική της απόδειξης του Θεωρήματος 6.2.3 δείξτε ότι, αν οι* f *και* g *δυο συνεχείς συναρτήσεις στο* $[a, b]$ *με* $g(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$, *τότε* $\exists \xi \in [a, b]$ *με*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Άσκηση 6.10 *Πολλές φορές είναι πιο εύκολο η ολοκλήρωση να γίνεται ως προς τη μεταβλητή* y. *Να βρεθεί έτσι το εμβαδόν που περικλείεται από τις παραβολές* $y^2 = 4 - x$ *και* $y^2 = 2x - 4$, *αφού πρώτα τις σχεδιάσετε.*

Άσκηση 6.11 *Να βρεθεί το εμβαδόν και ο όγκος της επιφάνειας που σχηματίζεται, όταν περιστρέφουμε την έλλειψη* $4x^2 + y^2 = 4$, *α) γύρω από τον οριζόντιο και β) γύρω από τον κατακόρυφο άξονα.*

Άσκηση 6.12 *Να βρεθεί το κέντρο μάζας του τριγώνου με κορυφές τα σημεία* $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ *και* $B(1, 2)$ *με την προϋπόθεση ότι το τρίγωνο είναι ομογενές, πυκνότητας* δ.

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

7.1 Γενικά

Μέχρι τώρα θεωρούσαμε τη συνάρτηση συνεχή σ' ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ με $a, b \in \mathbb{R}$, που σήμαινε ότι η συνάρτηση είναι επιπλέον και φραγμένη. Με την παρατήρηση (6.1.2) μπορούμε να απαντήσουμε και στην περίπτωση, όπου η συνάρτηση παραμένει φραγμένη σ' ένα ημιανοικτό διάστημα $(a, b]$.

Στις περιπτώσεις, όπου ένα τουλάχιστον από τα άκρα του διαστήματος είναι το άπειρο ή η συνάρτησή μας απειρίζεται σ' ένα από τα άκρα του διαστήματος $[a, b]$, το ολοκλήρωμα λέγεται **γενικευμένο ή καταχρηστικό**.
Στην πρώτη περίπτωση το γενικευμένο ολοκλήρωμα λέγεται Α′ είδους, ενώ στην άλλη περίπτωση λέγεται Β′ είδους. Όταν από το ένα άκρο της ολοκλήρωσης εμφανίζεται το Α′ είδος και από το άλλο το Β′ τότε έχουμε το μικτό γενικευμένο ολοκλήρωμα.

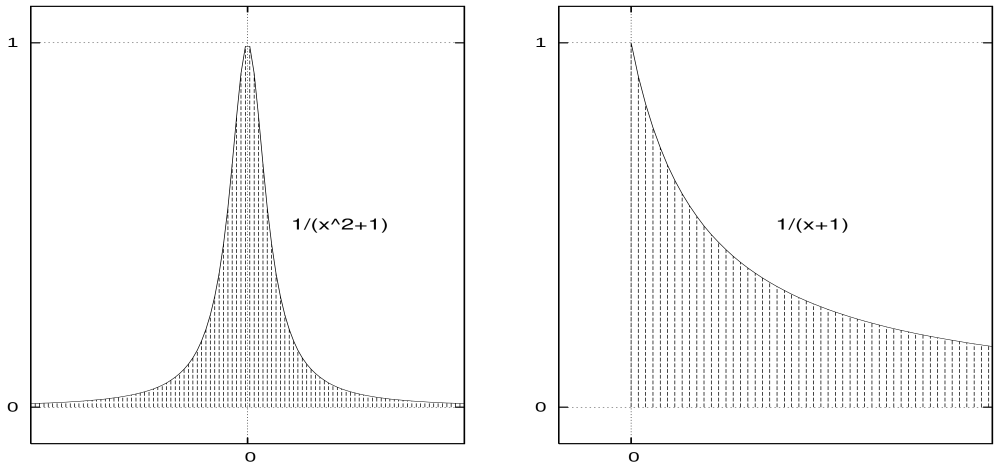
7.1.1 Γενικευμένο ολοκλήρωμα Α′ είδους

Το Γενικευμένο ολοκλήρωμα Α′ είδους έχει μια από τις επόμενες μορφές:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx, \quad \int_{a}^{\infty} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx. \tag{7.1}$$

Αντιμετωπίζεται και στις τρεις περιπτώσεις με την έννοια του ορίου. Έτσι, αν F είναι μια παράγουσα της f, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - \lim_{a \to -\infty} F(a),$$



Σχήμα 7.42: Οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ και $g(x) = \frac{1}{x+1}$.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a).$$

Παράδειγμα 7.1 *Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:*

$$i) \int_0^{\infty} \frac{1}{x+1}dx, \quad ii) \int_0^{\infty} \sin x dx, \quad iii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx.$$

Λύση Με εφαρμογή των τύπων παίρνουμε

$$i) \int_0^{\infty} \frac{1}{x+1}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{x+1}dx = \lim_{b\to\infty} \Big[\ln(1+x)\Big]_0^b = \infty$$

$$ii) \int_0^{\infty} \sin x dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \sin x dx = \lim_{b\to\infty} \Big[-\cos x\Big]_0^b = -\lim_{b\to\infty}(\cos b) + 1$$

Όμως το τελευταίο όριο δεν υπάρχει. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \sin x dx$ αποκλίνει.

$$iii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{b\to\infty} \arctan b - \lim_{a\to-\infty} \arctan a = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$$

Στο σχήμα (7.42) φαίνεται η περιοχή της οποίας το εμβαδόν εκφράζει το καθένα από τα ολοκληρώματα *i*) και *iii*).

Παρατήρηση 7.1.1*Η ύπαρξη των δυο ορίων, ανεξάρτητα του ενός από το άλλο, είναι ουσιώδης, αφού η θεώρηση*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)dx$$

οδηγεί σε κάτι διαφορετικό, γνωστό ως «πρωτεύουσα τιμή κατά Cauchy» (C.P.V.)

7.1.2 Γενικευμένο ολοκλήρωμα Β′ είδους

Το Γενικευμένο ολοκλήρωμα Β′ είδους έχει μια από τις επόμενες μορφές:

$$\int_a^b f(x)dx, \text{ με } \lim_{x\to a^+} = \pm\infty, \quad \int_a^b f(x)dx, \text{ με } \lim_{x\to b^-} = \pm\infty. \tag{7.2}$$

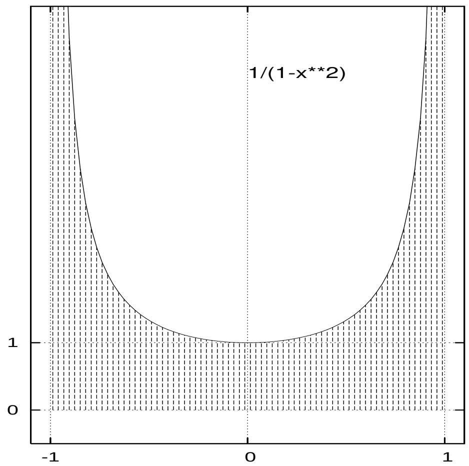
Αντιμετωπίζεται, όπως και προηγούμενα, με την έννοια του ορίου. Έτσι, αν F είναι μια παράγουσα της f, έχουμε

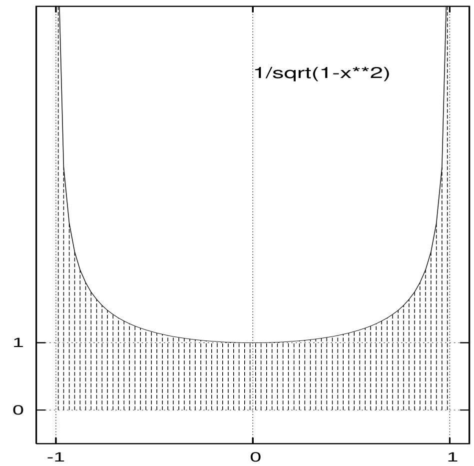
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = F(b) - \lim_{\varepsilon\to 0} F(a+\varepsilon)$$
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0}\int_{a}^{b-h} f(x)dx = \lim_{h\to 0} F(b-h) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)dx + \lim_{h\to 0}\int_{c}^{b-h} f(x)dx = \lim_{h\to 0} F(b-h) - \lim_{\varepsilon\to 0} F(a+\varepsilon).$$

Παράδειγμα 7.2*Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:*

$$i)\int_{-1}^{1}\frac{1}{1-x^2}dx, \quad ii)\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$





Σχήμα 7.43: Οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ και $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Λύση

$$i) \int_{-1}^{1} \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1-x}dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x}dx =$$

$$\frac{1}{2}\Big(-\lim_{h\to 0}\ln|1-x|\Big|_{-1}^{1-h}+\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|1+x|\Big|_{-1+\varepsilon}^{1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(2\ln 2+\infty\Big) = \infty$$

Θέτοντας $x = \sin\vartheta$, που σημαίνει $dx = \cos\vartheta d\vartheta$, παίρνουμε

$$ii) \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\arcsin(-1+\varepsilon)}^{c} d\vartheta + \lim_{h\to 0}\int_{c}^{\arcsin(1-h)} d\vartheta = \pi.$$

Στο σχήμα (7.43) φαίνεται η περιοχή της οποίας το εμβαδόν εκφράζει το καθένα από τα ολοκληρώματα $i)$ και $ii)$.

7.2 Κριτήρια σύγκλισης

Πολλές φορές είμαστε αναγκασμένοι να αποφανθούμε σχετικά με την ύπαρξη ή μη ενός γενικευμένου ολοκληρώματος και ήδη έχουμε δει ότι δεν είναι πάντοτε εύκολη ή δυνατή η εύρεση μιας παράγουσας αυτού. Σε τέτοιες περιπτώσεις προσπαθούμε να δώσουμε απάντηση με διαφορετικές προσεγγίσεις του θέματος, μερικές εκ των οποίων θα δούμε στη συνέχεια.

7.2.1 Για το Α′ είδους

Θα θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και μη αρνητική και θα εξετάσουμε την περίπτωση $\int_a^\infty f(x)dx$, αφού η περίπτωση $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ αντιμετωπίζεται παρόμοια, αρκεί να κάνουμε αλλαγή μεταβλητής θέτοντας $-t$ αντί x. Έχουμε ήδη δει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα εκφράζει το όριο ενός εμβαδού, δηλ.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\int_a^x f(t)dt}_{E(x)} = \lim_{x\to\infty} E(x). \tag{7.3}$$

Επί πλέον, από το γεγονός $E'(x) = f(x) \geq 0$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $E(x)$ είναι μια αύξουσα συνάρτηση και επομένως ή θα έχει όριο έναν πραγματικό αριθμό (όταν θα φράσσεται, δες και άσκηση (3.10)) ή θα απειρίζεται. Έτσι, το επόμενο Θεώρημα φαίνεται ως φυσική συνέπεια αυτού.

Θεώρημα 7.2.1 *Έστω δυο συνεχείς συναρτήσεις f και g με $g(x) \geq f(x) \geq 0$, τότε*

$$\int_a^\infty g(x)dx \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \int_a^\infty f(x)dx \in \mathbb{R}, \tag{7.4}$$
$$\int_a^\infty f(x)dx = \infty \;\Rightarrow\; \int_a^\infty g(x)dx = \infty. \tag{7.5}$$

Απόδειξη: Να γίνει ως άσκηση. □

Παράδειγμα 7.3 *Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση το ολοκλήρωμα.* $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$

Λύση Το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί με τα όρια, αφού έχουμε πει ότι δεν εκφράζεται με απλές συναρτήσεις. Έτσι έχουμε

$$x > 1 \Rightarrow x^2 > x \Rightarrow -x^2 < -x \Rightarrow e^{-x^2} < e^{-x}$$
$$\text{όμως} \int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_1^b = \frac{1}{e}, \in \mathbb{R}$$

οπότε και το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty e^{-x^2}dx \in \mathbb{R}$.

Το Θεώρημα 7.2.1 μπορούμε να το εκμεταλλευτούμε κατάλληλα και να πάρουμε το επόμενο πολύ σημαντικό Θεώρημα που, εξετάζοντας κάποιο όριο, δίνει ένα κριτήριο σύγκλισης.

Θεώρημα 7.2.2 *Αν δυο, μη αρνητικές, συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς και επιπλέον*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lambda, \quad 0<\lambda<\infty, \tag{7.6}$$

τότε τα ολοκληρώματα

$$\int_a^\infty f(x)dx, \quad \int_a^\infty g(x)dx$$

συμπεριφέρονται το ίδιο, δηλ. όταν συγκλίνει το ένα συγκλίνει και το άλλο, όχι όμως, γενικά, στο ίδιο όριο. Επί πλέον

$$\text{αν } \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0, \text{ τότε } \int_a^\infty g(x)dx \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx \in \mathbb{R}$$

ενώ

$$\text{αν } \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty, \text{ τότε } \int_a^\infty g(x)dx = \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx = \infty.$$

Απόδειξη: Από την ισότητα (7.6) μπορούμε να πάρουμε ένα ε θετικό και να βρούμε $x_0>0$, έτσι ώστε $0<\lambda-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<\lambda+\varepsilon$ για κάθε $x>x_0$. Αφού $g(x)>0$, ισχύει

$$(\lambda-\varepsilon)g(x) < f(x) < (\lambda+\varepsilon)g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\lambda+\varepsilon} < g(x) < \frac{f(x)}{\lambda-\varepsilon}, \ \forall x>x_0. \tag{7.7}$$

Η ολοκλήρωση της απόδειξης να γίνει ως άσκηση. □

Το προηγούμενο Θεώρημα ισχύει για μια γενική συνάρτηση g και θα ήταν μάλλον δύσχρηστο, αν δεν συνοδευόταν και από μια κατάλληλη συνάρτηση για χρήση. Ευτυχώς μια τέτοια συνάρτηση που δίνει λύση σε ένα μεγάλο αριθμό προβλημάτων υπάρχει και το γενικευμένο ολοκλήρωμά της δίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 7.4 *Να αποδειχτεί ότι, αν $a>0$, τότε*

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \frac{a^{1-p}}{p-1} \in \mathbb{R}, & p>1 \\ \infty, & p\le 1 \end{cases}.$$

Λύση α) Έστω $p = 1$.

$$\int_a^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\Big[\ln x\Big]_a^b = \lim_{b\to\infty}\ln b - \ln a = \infty.$$

β) Έστω $p \neq 1$.

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{(1-p)}}{1-p}\right]_a^b = \begin{cases} \lim_{b\to\infty}\frac{b^{(1-p)}}{1-p} - \frac{a^{(1-p)}}{1-p} = \frac{a^{p-1}}{p-1}, \text{ αν } p > 1 \\ \lim_{b\to\infty}\frac{b^{(1-p)}}{1-p} - \frac{a^{(1-p)}}{1-p} = \infty, \text{ αν } p < 1 \end{cases}.$$

Έτσι αποδείχτηκε ότι

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \text{συγκλίνει, αν} \quad p > 1 \\ \infty, \quad \text{αν } p \leq 1 \end{cases}.$$

Παράδειγμα 7.5*Να εξετάσετε αν τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληρώματα συγκλίνουν:*

$$a)\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}dx, \quad b)\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^4+1}}dx.$$

Λύση α) Θεωρώντας ως βοηθητική συνάρτηση την $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+1}} = 1$$

και συμπεραίνουμε ότι το πρώτο ολοκλήρωμα απειρίζεται., αφού έτσι συμπεριφέρεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα της g.
β) Θεωρώντας ως βοηθητική συνάρτηση την $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$, υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3}\sqrt{x}}{\sqrt{x^4+1}} = 1$$

και συμπεραίνουμε ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα συγκλίνει, αφού έτσι συμπεριφέρεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα της g.

7.2.2 Για το B′ είδους

Για τα γενικευμένα ολοκληρώματα B′ είδους, εκείνα δηλ. που η συνάρτηση απειρίζεται στο ένα άκρο του διαστήματος $[a, b]$, μπορεί κάποιος να παρατηρήσει ότι αυτά εύκολα μετατρέπονται σε γενικευμένα ολοκληρώματα A′ είδους. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνεχή συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού $[a, b)$ και $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$, τότε με το μετασχηματισμό $b - x = \frac{1}{t}$, έχουμε ότι $x \to b^- \Leftrightarrow t \to \infty$ και $-dx = -\frac{1}{t^2}dt$, οπότε σχετικά με το γενικευμένο ολοκλήρωμα παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} \frac{1}{t^2} f(b - \frac{1}{t})dt.$$

Ενώ αν θεωρήσουμε τη συνεχή συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού $(a, b]$ και $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, τότε με το μετασχηματισμό $x - a = \frac{1}{t}$, έχουμε ότι ισχύει το $x \to a^+ \Leftrightarrow t \to \infty$ και $dx = -\frac{1}{t^2}dt$, οπότε σχετικά με το γενικευμένο ολοκλήρωμα παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\infty}^{\frac{1}{b-a}} -\frac{1}{t^2} f(a + \frac{1}{t})dt = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} \frac{1}{t^2} f(a + \frac{1}{t})dt.$$

Ολόκληρη η θεωρία που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο ισχύει κι εδώ. Έτσι, παραθέτουμε τα σχετικά Θεωρήματα και παραδείγματα εφαρμογής.

Θεώρημα 7.2.3*Έστω δυο συνεχείς συναρτήσεις f και g, με πεδίο ορισμού $[a, b)$ (ή $(a, b]$) και $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to b^-} g(x) = \infty$ (ή $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$) και $g(x) \geq f(x) \geq 0$, τότε*

$$\int_a^b g(x)dx \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}, \tag{7.8}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g(x)dx = \infty. \tag{7.9}$$

Παράδειγμα 7.6*Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα*

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

Λύση Αφού στο $(0,1]$, ισχύει $0 < \frac{\sin x}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ και

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a\to 0} \left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = 2 - 0 = 2,$$

συμπεραίνουμε ότι το εν λόγω ολοκλήρωμα συγκλίνει εν $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 7.2.4 *Αν δυο, μη αρνητικές, συναρτήσεις f και g, με πεδίο ορισμού $[a,b)$ (ή $(a,b]$) και $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to b^-} g(x) = \infty$ (ή $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$) είναι συνεχείς και επιπλέον*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty, \tag{7.10}$$

τότε τα ολοκληρώματα

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b g(x)dx$$

συμπεριφέρονται το ίδιο, δηλ. όταν συγκλίνει το ένα συγκλίνει και το άλλο, όχι όμως, γενικά, στο ίδιο όριο. Επί πλέον

$$\text{αν } \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \text{ τότε } \int_a^b g(x)dx \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R},$$

ενώ

$$\text{αν } \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty, \text{ τότε } \int_a^b g(x)dx = \infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \infty.$$

Η συνάρτηση που δίνει λύση τώρα, σε ένα μεγάλο αριθμό προβλημάτων είναι η $|x-r|^{-p}$, όπου r είναι το άκρο στο οποίο υπάρχει το πρόβλημα και p κατάλληλη δύναμη και ένα γενικευμένο ολοκλήρωμά της δίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 7.7 *Να αποδειχτεί ότι, αν $a > 0$, τότε*

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} \in \mathbb{R}, & 0 < p < 1 \\ \infty, & p \geq 1 \end{cases}.$$

Λύση α) Έστω $p = 1$.

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}dx = \lim_{t\to b}\Big[-\ln(b-x)\Big]_a^t = -\lim_{b\to\infty}\ln(b-t) + \ln(b-a) = \infty.$$

β) Έστω $p \neq 1$.

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}dx = \lim_{t\to b}\Big[-\frac{(b-x)^{(1-p)}}{1-p}\Big]_a^t = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & \text{αν } 0 < p < 1 \\ \infty, & \text{αν } p > 1 \end{cases}.$$

Έτσι αποδείχτηκε ότι

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}dx = \begin{cases} \text{συγκλίνει, αν} & 0 < p < 1 \\ \infty, & \text{αν } p \geq 1 \end{cases}.$$

Παράδειγμα 7.8*Να εξετάσετε, ως προς τη σύγκλιση, τα παρακάτω ολοκληρώματα*

$$a)\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2-4}dx, \quad b)\int_1^5 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}}dx.$$

Λύση α) Στο άκρο $a = 2$ δημιουργείται πρόβλημα. Θεωρούμε λοιπόν ως βοηθητική συνάρτηση την $g(x) = \frac{1}{x-2}$ και παίρνουμε

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2+1)(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2+1)}{x+2} = \frac{5}{4},$$

οπότε το ολοκλήρωμα συμπεριφέρεται όπως το $\int_2^3 g(x)dx$, όμως από την άσκηση (7.3) συμπεραίνουμε ότι τελικά απειρίζεται.

β) Στο άκρο $b = 5$ δημιουργείται πρόβλημα. Θεωρούμε αρχικά ως βοηθητική συνάρτηση την $g(x) = \frac{1}{5-x}$ και παίρνουμε

$$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 5}\frac{(5-x)\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}} = \lim_{x\to 5}\sqrt{5-x}\sqrt{x} = 0.$$

Όμως το Θεώρημα 7.2.3 δεν μπορεί να εφαρμοστεί, αφού $\int_2^3 g(x)dx = \infty$. Θεωρούμε τώρα ως βοηθητική συνάρτηση την $g(x) = \frac{1}{\sqrt{5-x}}$, οπότε

$$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)}{g(x)} = \cdots = \sqrt{5},$$

οπότε, αφού το $\int_2^3 g(x)dx$ συγκλίνει, το ίδιο θα συμβαίνει και για το δεύτερο ολοκλήρωμα της άσκησης.

7.3 Γενικευμένο ολοκλήρωμα και σειρές

Μια στενή σχέση υπάρχει μεταξύ του γενικευμένου ολοκληρώματος και της σειράς, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη, συνεχή και φθίνουσα στο διάστημα $[1, \infty)$. Για την εν λόγω συνάρτηση ισχύει:

$$f(i+1) \leq f(x) \leq f(i),\ \forall x \in [i, i+1].$$

Ολοκληρώνοντας από i μέχρι $i+1$ έχουμε

$$f(i+1) \leq \int_i^{i+1} f(x)dx \leq f(i),\ \forall i \geq 1. \tag{7.11}$$

Αθροίζοντας τώρα από 1 μέχρι n, προκύπτει

$$\sum_{i=1}^{n} f(i+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i). \tag{7.12}$$

Αφήνοντας το n να τείνει στο άπειρο, η σχέση (7.12) μας δίνει

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(i+1) \leq \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$$

ισοδύναμα

$$-f(1) + \sum_{i=1}^{\infty} f(i) \leq \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{\infty} f(i). \tag{7.13}$$

Έτσι, από τη δεύτερη ανισότητα της σχέσης (7.13), όταν συγκλίνει η σειρά εν $\mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι και το ολοκλήρωμα συγκλίνει, ενώ όταν απειρίζεται το ολοκλήρωμα, συμπεραίνουμε ότι και η σειρά απειρίζεται. Επίσης από την πρώτη ανισότητα της σχέσης (7.13), όταν απειρίζεται η σειρά εν $\mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι και το ολοκλήρωμα απειρίζεται, ενώ όταν συγκλίνει το ολοκλήρωμα συμπεραίνουμε ότι και η σειρά συγκλίνει. Αποδείξαμε λοιπόν το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 7.3.1*Αν a_n μια ακολουθία θετικών όρων και $a_n = f(n)$, όπου f μια συνεχής, φθίνουσα, μη αρνητική συνάρτηση, τότε $\forall x \geq N$ η σειρά $\sum_{i=N}^{\infty} f(i)$ και το ολοκλήρωμα $\int_N^{\infty} f(x)dx$ θα συμπεριφέρονται το ίδιο.*

Παράδειγμα 7.9*Να εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:*

$$1) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{i^2+1}, \quad 2) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{i}}.$$

Λύση 1) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$. Αυτή είναι συνεχής, φθίνουσα και μη αρνητική για $x \geq 1$ (γιατί;) Αφού

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \cdots = 2\frac{\pi}{4} \in \mathbb{R},$$

η σειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

2) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}+1}$. Αυτή είναι συνεχής, φθίνουσα και μη αρνητική για $x \geq 1$ (γιατί;) Επειδή με βοηθητική συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 1 \text{ και } \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \infty,$$

συμπεραίνουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ απειρίζεται, οπότε και η σειρά απειρίζεται.

Το αριστερό μέλος της σχέσης (7.12) θα μπορούσε να πάρει τη μορφή

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) - \int_1^{n} f(x)dx \leq f(1). \tag{7.14}$$

Αυτό σημαίνει ότι η διαφορά του ορίου του γενικευμένου ολοκληρώματος από το όριο της σειράς βρίσκεται μεταξύ του μηδενός και του $f(1)$. Ειδικά για την $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει υπολογιστεί ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \int_1^{n} \frac{1}{x}dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n = \gamma = 0.5772156649\ldots$$

Το υπόλοιπο γ λέγεται σταθερά του Euler, μέχρι σήμερα έχουν υπολογιστεί 263 δεκαδικά ψηφία ([5]) και δεν έχει αποδειχθεί ακόμη αν είναι ή όχι άρρητος.

Ασκήσεις

Άσκηση 7.1 *Υπολογίστε τα γενικευμένα ολοκληρώματα*

$$1)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{1+e^x}dx,\quad 2)\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx.$$

Άσκηση 7.2 *Αν η f συνεχής και φραγμένη και $p>1$, δείξτε ότι*

$$\int_a^{\infty}\frac{f(x)}{x^p}dx \ \in\mathbb{R}.$$

Άσκηση 7.3 *Να αποδειχτεί ότι, αν $a,b>0$, τότε*

$$\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}dx=\begin{cases}\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}\in\mathbb{R}, & 0<p<1\\ \infty, \quad p\geq 1\end{cases}.$$

Άσκηση 7.4 *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τα ολοκληρώματα*

$$1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x}dx,\quad 2)\int_1^e\frac{x}{\ln x}dx,\quad 3)\int_1^3\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}dx.$$

Άσκηση 7.5 *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{i+1},\quad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sqrt{i}}{i+\sqrt{i}}.$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

8.1 Γενικά

Το πρόγραμμα Gnuplot 4.0 είναι ένα από τα καλύτερα προγράμματα στο σχεδιασμό γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων αλλά και δεδομένων. Διατίθεται δωρεάν στο διαδύκτιο και μπορεί κάποιος να το βρει στη διεύθυνση:

`www.gnuplot.info`

Μετά την αποσυμπίεση τρέχει με διπλό «κλικ», όπως όλα τα προγράμματα και περιμένει την εντολή μας.

Παράδειγμα 8.1*Σχεδιάζοντας με το πρόγραμμα.*

```
>plot sin(x)
>plot [-pi:pi] sin(x)
>plot [-pi:pi] [-1:1] sin(x)
>plot [:] [-1:1] sin(x)
```

Στο παράδειγμα όλες οι εντολές κάνουν την ίδια δουλειά, δηλ. σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση (γ.π.) της $f(x) = \sin x$, η πρώτη εξ αυτών με τα εξ ορισμού όρια του προγράμματος και οι υπόλοιπες με όρια που είτε ορίζονται και τα δυο είτε ορίζεται το ένα εξ αυτών.

Το gnuplot 4.0 από μόνο του υπολογίζει 100 ενδιάμεσα σημεία και τα ενώνει με ευθύγραμμα τμήματα. Για μεγαλύτερη ακρίβεια χρησιμοποιούμε την εντολή `>set samples N`, όπου N το πλήθος των ενδιάμεσων σημείων.

Παράδειγμα 8.2*Ορίζοντας τα όρια εξωτερικά.*

```
>set samples 1000
>set xrange [-pi:pi]
>set yrange [-1.1:1.1]
>plot sin(x), cos(x)
```

Οι παραπάνω εντολές ορίζουν τα όρια εξωτερικά και κάνουν τη γ.π. των δυο συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων με μεγαλύτερη ακρίβεια.

Οι γ.π. μπορούν να γίνουν με διάφορους τρόπους, π.χ. με την εντολή

```
>plot sin(x) w l lt 3 lw 2
```

η γ.π. γίνεται με γραμμή τύπου 3 και βάθους 2 (w(with) l(lines) lt(linetype) 3 lw(linewidth) 2). Με την εντολή

```
>plot sin(x) w d lt 3 lw 2
```

η γ.π. γίνεται με στιγμές τύπου 3 και βάθους 2 (w(with) d(dots) lt(linetype) 3 lw(linewidth) 2). Με την εντολή

```
>plot sin(x) w p pt 3 ps 2
```

η γ.π. γίνεται με σημεία τύπου 3 και μεγέθους 2 (w(with) p(point) pt(pointstype) 3 ps(pointsize) 2). Με την εντολή

```
>plot sin(x) w lp pt 3 ps 2 lw 3 lt 4
```

η γ.π. γίνεται με σημεία τύπου 3 και μεγέθους 2 και γραμμές βάθους 3 και τύπου 4 (w(with) lp(linespoint) pt(pointstype) 3 ps(pointsize) 2).
Με την εντολή

```
>plot sin(x) with something
```

μπορούμε να δημιουργήσουμε ακόμη πιο πολλές γ.π., αντικαθιστώντας τη λέξη `something` με μια από τις ακόλουθες: `impulses, steps, fsteps, histeps, boxes, errorbars, errorlines.`

8.2 Ετικέτες, άξονες και πλέγματα

Παράδειγμα 8.3*Βάζοντας τίτλους στο γράφημα.*

```
>set title "My first graph"
>set xlabel "Time in years \n 1980 - 2001"
>set ylabel "Cost"
>unset key
>set key t l
>set key box
```

Δίνεται τίτλος στη γ.π. και ετικέτες στους άξονες, ενώ με το key αναφέρεται ή δεν αναφέρεται η κάθε συνάρτηση στη θέση t(top) l(left).

Παράδειγμα 8.4*Γράφοντας ετικέτες.*

```
>set label 1 "f(x)" at x1, y1 font "Arial, 16" tc lt 1
>set label 2 "g(x)" at x2, y2 rotate font "Arial, 18" tc lt 5
>unset label n
```

Μπορούμε να γράψουμε ο,τιδήποτε και πολλές φορές μέσα στο γράφημα στις θέσεις (x_i, y_i) με χρώμα tc(textcolor), όπως στη lt(linetype) n ή να αναιρέσουμε τα παραπάνω. Το `>set label` χωρίς αριθμό εξ ορισμού είναι 1 ενώ το `>unset label` χωρίς αριθμό εξ ορισμού είναι όλα.

Παράδειγμα 8.5*Θέτοντας τιμές στους άξονες.*

```
>set xtics axis (""-pi,"" -2,  0, 2, "pi" 3.14, "3*pi/2" 3*pi/2)
>set ytics border -1,0.25,1
>unset xtics
>unset ytics
```

Εξ ορισμού το πρόγραμμα θέτει κάποιες τιμές στους άξονες και μάλιστα στο πλαίσιο (border), ανάλογα με τη γ.π. της συνάρτηση την οποία δημιουργεί. Με το `>set xtics` και το `>unset xtics` μπορούμε να ελέγξουμε την κατάσταση και να θέσουμε τις τιμές στους άξονες ή να τις αφαιρέσουμε, να τις θέσουμε με μια καινούργια αρχή και ένα καινούργιο βήμα. Βέβαια η οριοθέτηση των αξόνων παίζει ένα σπουδαίο ρόλο στο grid που κάνουμε.

Παράδειγμα 8.6*Δημιουργώντας άξονες.*

```
>set zeroaxis lt 5
>set grid lt 7
>unset zeroaxis
>unset grig
```

Για να θέσουμε άξονες ή για να τους αφαιρέσουμε χρησιμοποιούμε το `>(un)set zeroaxis`, ενώ για να δημιουργήσουμε ένα πλέγμα με ορθογώνιες και κατακόρυφες ευθείες το `>(un)set grig`. Το πλέγμα δημιουργείται στα σημεία που επιλέξαμε με τα xtics, ytics.

Τελεστές πράξεων		
σύμβολο	παράδειγμα	επεξήγηση
+	$a+b$	πρόσθεση
-	$a-b$	αφαίρεση
*	$a*b$	πολλαπλασιασμός
/	a/b	διαίρεση[α']
%	$a\%b$	υπόλοιπο
**	$a**b$	δύναμη
!	$a!$	παραγοντικό
&&	$a\&\&b$	Λογικό και
==	$a==b$	Λογικό =
||	$a\|\|b$	Λογικό ή
!=	$a!=b$	Λογικό $\neq$
!	$!a$	Λογικό όχι

πράξεις	
σύμβολο	επεξήγηση
$exp(x)$	e^x
$\cos(x)$	συνημίτονο
$\sin(x)$	ημίτονο
$\tan(x)$	εφαπτομένη
$log(x)$	$\ln x$
$log10(x)$	$\ln_{10} x$
$cosh(x)$ κ.λπ.	υπερβολικές
$acos(x)$ κ.λπ.	αντίστροφες τριγωνομετρικές
$sgn(x)$	πρόσημο
$floor(x)$	ακέραιο μέρος
$int(x)$	αποκοπή δεκαδικού

[α'] Όταν οι αριθμοί a, b είναι ακέραιοι το αποτέλεσμα είναι κι αυτό ακέραιο, ενώ όταν ένας από τους δυο είναι πραγματικός το αποτέλεσμα είναι πραγματικό. Έτσι έχουμε $\frac{1}{2}=0$ ενώ $\frac{1.}{2}=0.5$

Πίνακας 8.2: Συχνά χρησιμοποιούμενοι τελεστές και συναρτήσεις

8.3 Πράξεις και συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις μπορούν να δημιουργηθούν εύκολα χρησιμοποιώντας τις λεγόμενες «απλές συναρτήσεις» και τους γνωστούς τελεστές πράξεων π.χ.

Παράδειγμα 8.7*Δημιουργώντας συναρτήσεις.*

```
>f(x)=(x+1)/sqrt(x**2+1)+exp(x/3)
>g(x)= (x > 2) ? 2 : (x < -2) ? -2 : x
>h(x)= (x < -1) ? -2*x : (x > 1) ? x**2 : 1/0
```

Στο παράδειγμα δημιουργούνται συναρτήσεις απλού, αλλά και πολλαπλού τύπου. Στο παράδειγμα είναι οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+e^{\frac{x}{3}},\quad g(x)=\begin{cases} 2, & \text{αν } x>2 \\ x, & \text{αλλού} \quad , \\ -2, & \text{αν } x<-2 \end{cases} \quad h(x)=\begin{cases} -2x, & \text{αν } x<1 \\ x^2, & \text{αν } x>-1 \end{cases} .$$

Η συνάρτηση $h(x)$ δεν ορίζεται στο διάστημα $[-1,1]$. Αυτό στο παράδειγμα δηλώνεται με το $\mathbf{1/0}$.

Στον πίνακα (8.2) φαίνονται οι πιο γνωστοί τελεστές (λογικοί και πράξεων) και οι πιο γνωστές απλές συναρτήσεις.

8.4 Παραμετρικές, πολικές και δεδομένα

Παράδειγμα 8.8*Παραμετρικές εξισώσεις.*

```
>set parametric
>plot [-pi:pi] [-3:3] [-2:2] 2*sin(t), cos(t)
>unset parametric
```

Όταν οι καμπύλες δίνονται με παραμετρικές εξισώσεις, μπορούμε πάλι να κάνουμε τη γ.π. με το Gnuplot. Τώρα η μεταβλητή είναι η t και οι συναρτήσεις οι $x(t)$ και $y(t)$. Υποχρεωτικά γίνεται δήλωση με το `>(un)set parametric`. Σημαντικό είναι ότι τώρα μπορούμε να σχεδιάσουμε και καμπύλες που δεν αντιστοιχούν σε συναρτήσεις· παραπάνω σχεδιάζεται μια έλλειψη. Όσα έχουμε πει για γ.π., σχετικά με το πλήθος των σημείων, με το στυλ, τα χρώματα κ.λπ., ισχύουν και τώρα.

Παράδειγμα 8.9*Πολικές συντεταγμένες.*

```
>set grid polar
>set polar
>set angles radians
>plot [0:pi] 2*sin(t), sin(t)
>unset polar
```

Όταν οι καμπύλες δίνονται με πολικές εξισώσεις, μπορούμε πάλι να κάνουμε τη γ.π. με το Gnuplot. Πάλι η μεταβλητή είναι η t. Υποχρεωτικά γίνεται δήλωση με το `>set polar` και επαναφορά με το `>unset polar`. Επιπλέον, μπορούμε να θέσουμε και πολικό πλέγμα, όπως παρατηρεί κάποιος. Στο παράδειγμα είναι δυο κύκλοι. Εξ ορισμού η γωνία είναι σε radians, μπορεί όμως να αλλάξει με την (`>set angles degrees`).

Παράδειγμα 8.10*Γραφικές παραστάσεις με δεδομένα.*

```
>plot "c:/gnu_plot/mydata/data.dat" with points
>set data style linespoints
>replot "c:/gnu_plot/mydata/data.dat" using 1:3
```

Ιδιαίτερα εύκολα γίνονται γ.π. δεδομένων, όπως φαίνεται στο παράδειγμα. Όταν τα δεδομένα είναι στον τρέχοντα κατάλογο, προφανώς δε χρειάζεται ολόκληρη η διαδρομή. Η εξ ορισμού σχεδίαση είναι της πρώτης (x) και δεύτερης (y) στήλης. Ωστόσο, αυτό μπορεί να ανατραπεί με το `using`. Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο έλεγχος των σημείων γίνεται με το γνωστό τρόπο των γραμμών ήτοι με `pt 4 ps 1 lw 2 lt 3`. Γραμμές που ξεκινάνε με το # αγνοούνται ως σχόλια. Η εντολή `replot` είναι ιδιαίτερα σημαντική αφού μας επιτρέπει να βάζουμε στο ίδιο σχέδιο πολλές γ.π. του ίδιου τύπου.

Παράδειγμα 8.11*Πίνακας με δεδομένα.*

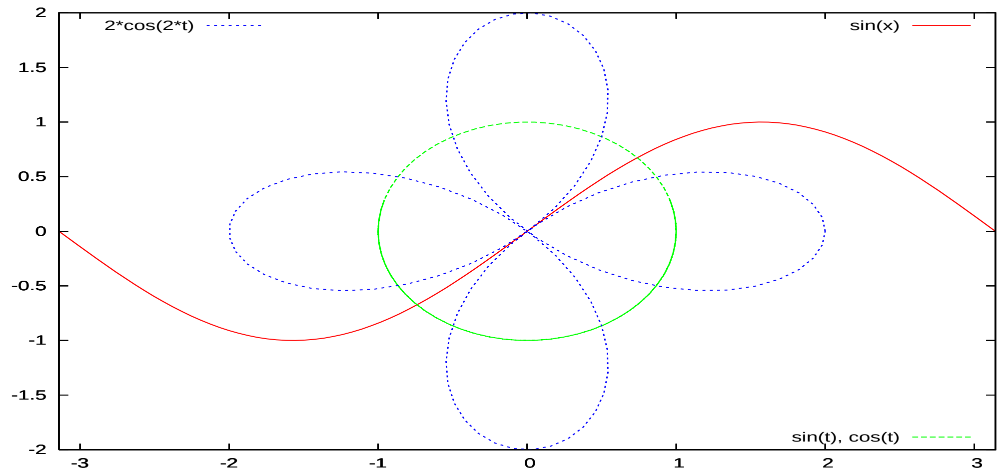
```
# Typiko paradeigma pinaka
# x   x**2    5*x
  1    1       5
  2    4      10
  3    9      15
  4   16      20
  5   25      25
  6   36      30
  7   49      35
  8   64      40
```

8.5 Πολλαπλά γραφήματα

Η ανάμειξη διαφορετικών τύπων γ.π. εν γένει δεν επιτρέπεται. Μπορούμε, ωστόσο να αναμείξουμε διαφορετικούς τύπους με την εντολή `>(un)set multiplot`. Στο παρακάτω παράδειγμα, στο ίδιο σύστημα αξόνων γίνεται η γ.π. τριών διαφορετικών καμπύλων και με τους τρεις διαφορετικούς τύπους σχεδίασης.

Παράδειγμα 8.12*Πολλαπλές γραφικές παραστάσεις Ι.*

```
>set multiplot
>set yrange [-2:2]
>set xrange [-pi:pi]
>plot sin(x) lt 1
>set key bottom right
>set parametric
```



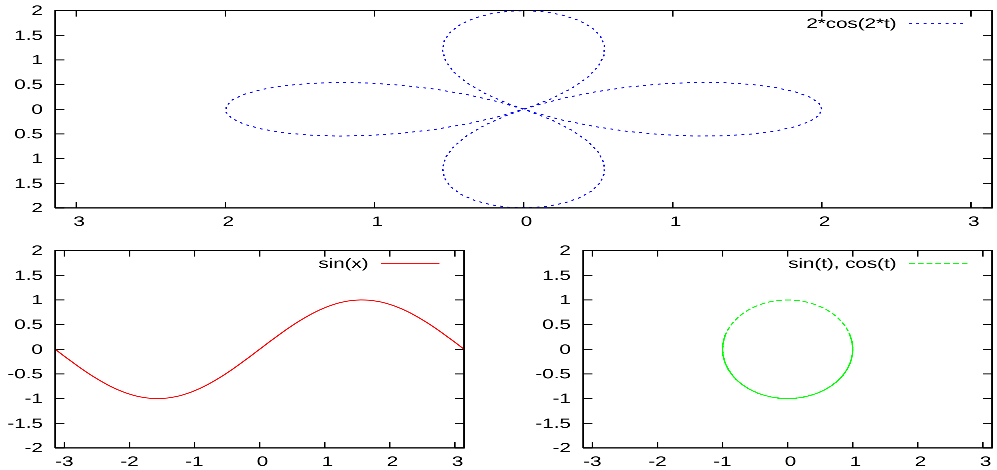
Σχήμα 8.44: Ο σχεδιασμός των τριών διαφορετικών καμπύλων Ι.

```
>plot sin(t), cos(t) lt 2
>unset parametric
>set key top left
>set polar
>plot 2*cos(2*t) lt 3
>unset polar
>unset multiplot
```

Ο σχεδιασμός των παραστάσεων φαίνεται στο Σχήμα 8.44. Ο σχεδιασμός αυτός είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι τρία διαφορετικά σχέδια του ίδιου μεγέθους τα θέσαμε ακριβώς το ένα πάνω στο άλλο. Το μέγεθος ελέγχεται με την εντολή `>set size a,b`, ενώ η θέση με την `>set origin x,y`. Αρχή για κάθε εικόνα θεωρείται η κάτω αριστερή γωνία και αρχή για το σχέδιο επίσης η κάτω αριστερή γωνία με τιμές (0,0)

Παράδειγμα 8.13*Πολλαπλές γραφικές παραστάσεις ΙΙ.*

```
>set multiplot
>set yrange [-2:2]
>set xrange [-pi:pi]
# H prwti sxediasi
>set size 0.5,0.5
>set origin 0,0
```



Σχήμα 8.45: Ο σχεδιασμός των τριών διαφορετικών καμπύλων ΙΙ.

```
>plot sin(x) lt 1
# H deyteri sxediasi
>set size 0.5,0.5
>set origin 0.5,0
>set parametric
>plot sin(t), cos(t) lt 2
>unset parametric
# H triti sxediasi
>set size 1,0.5
>set origin 0,0.5
>set polar
>plot 2*cos(2*t) lt 3
>unset polar
>unset multiplot
```

Στο Σχήμα 8.45 φαίνεται η καινούργια σχεδίαση. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι τόσο τα a, b στην `>set size a,b`, όσο και τα x, y στην `>set origin x,y` παίρνουν τιμές στο $[0, 1]$· τιμές εκτός των ορίων έχει ως αποτέλεσμα σχεδίαση εκτός σχεδίου.

8.6 Έξοδος του γραφήματος

Το σχέδιο μπορεί εύκολα να μεταφερθεί για επεξεργασία στο πρόγραμμα paint των windows και να το σώσουμε ως .bmp αρχείο. Επίσης, μπορούμε να το μεταφέρουμε, ως εικόνα, σε έγγραφο του Word. Η μεταφορά γίνεται ως εξής:
1) Κάνουμε «κλικ» στην πάνω αριστερή γωνία του σχεδίου
2) Κάνουμε «κλικ» στο Options
3) Κάνουμε «κλικ» στο Copy to clipboard
Η συνέχεια είναι να κάνουμε "paste" στο πρόγραμμα που επιλέξαμε.

Πολλοί χρησιμοποιούν για τα κείμενά τους το LaTeXκαι θέλουν ως έξοδο αρχεία τύπου .ps ή .pdf, έτσι θέλουν τα σχέδιά τους σε .eps μορφή. Αυτό μπορούν να το πετύχουν προσθέτοντας στο πρόγραμμά τους τις δυο επόμενες γραμμές:

```
>set terminal postscript color eps
>set output "c:/mydir/filename.eps"
```

Εξ ορισμού ο προσδιορισμός του τερματικού είναι μονόχρωμος. Η επαναφορά γίνεται με την `>set terminal windows`.

Έγινε μια προσπάθεια για μια εισαγωγή στο σχεδιασμό γ.π. στις δυο διαστάσεις με το Gnuplot. Ωστόσο το Gnuplot δημιουργεί εξ ίσου πολύ καλά σχέδια και στις τρεις διαστάσεις. Με την εμπειρία που απέκτησε ο αναγνώστης είναι πλέον ικανός να εξερευνήσει το θαυμάσιο αυτό εργαλείο και να το προσαρμόσει στον εαυτό του, χρησιμοποιώντας την βοήθεια του προγράμματος.

Τέλος και πριν κλείσουμε αυτή την εισαγωγή στο Gnuplot, θα δώσουμε δυο τρόπους για τη χρήση του προγράμματος, εκτός αυτού της «γραμμής διαταγής» που μάλλον είναι ο τρόπος που απωθεί το χρήστη. Πάντα μιλάμε για περιβάλλον "Windows".
Ο πρώτος είναι ο εξής: Πληκτρολογούμε το πρόγραμμα σε ένα text editor. Προτείνουμε το Crimson Editor, ο οποίος διατίθεται δωρεάν στο διαδύκτιο στη διεύθυνση http://www.crimsoneditor.com/, και αφού το σώσουμε με κάποιο όνομα, το επιλέγουμε ολόκληρο και το αντιγράφουμε (Copy). Στη συνέχεια πηγαίνουμε στο Gnuplot και κάνουμε επικόλληση (Paste) από το δεξί πλήκτρο του ποντικιού. Αυτό είναι όλο!
Ο δεύτερος στηρίζεται στη δυνατότητα που δίνει ο Crimson Editor για να τρέχει το πρόγραμμα μέσα από αυτόν. Παραθέτουμε τις οδηγίες από τη βοήθεια του προγράμματος.
1. Open Preferences dialog box and select User Tools page

2. Select an empty slot and fill with the following arguments.
- Menu Text: Gnuplot
- Command: `C:\gnuplot_x\bin\wgnuplot.exe`
- Argument: $(FileName)
- Initial dir: $(FileDir)
- Hot key: None
- Close on exit: Yes
- Save before execute: Yes

Apply

Προσοχή! Για να μένει η εικόνα στην οθόνη θα πρέπει το πρόγραμμα να τελειώνει πάντα με την εντολή `>pause -1`.

Βιβλιογραφία

[1] **Σ. Ανδρεαδάκης, κ.α.**: *Αλγεβρα Β΄ Εν. Λυκείου*, ΟΕΔΒ, Αθήνα 2004

[2] **Σ. Ντούγιας**: *απειροστικός λογισμος 1*, Τόμος Ι, Ιωάννινα 1996

[3] **Σ. Ντούγιας**: *απειροστικός λογισμος 2*, Τόμος ΙΙ, Ιωάννινα 1996

[4] **Β. Στάικος**: *Μαθήματα απειροστικού λογισμού*, Ιωάννινα 1980

[5] **L. Brand**: *Μαθηματική Άναλυση*, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα 1984.

[6] **G. Strang**: *Γραμμική Άλγεβρα*, Παν/κες εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 1996.

[7] **M. Spivak**: *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός λογισμός*, Παν/κες εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 1996.

[8] **G. Thomas, R. Finney**: *Απειροστικός Λογισμός*, Τόμος Ι, Παν/κες εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 1993

[9] **G. Thomas, R. Finney**: *Απειροστικός Λογισμός*, Τόμος ΙΙ, Παν/κες εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 1993

[10] **Α. Χατζηδήμος**: *Αριθμητική Ανάλυση Ι και ΙΙ*, Δεύτερη Έκδοση, Ιωάννινα 1981

Ευρετήριο