

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΚΕΝΤΡΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ**

**ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ  
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΑΘΗΝΑ 1998**

**Ομάδα Σύνταξης**

*Συντονιστές:* Κοθάλη - Κολοκούρη Ευπραξία, Σχολική Σύμβουλος

Σίδερης Πολυχρόνης, Σχολικός Σύμβουλος

*Μέλη:* Γεωργακάκος Ηλίας, Μαθηματικός Δ.Ε.  
Καπετάνου Σταθούλα, Μαθηματικός Δ.Ε.  
Κουτσανδρέας Γεράσιμος, Μαθηματικός Δ.Ε.  
Χριστοπούλου Κατερίνα, Μαθηματικός Δ.Ε.  
Χριστόφιλος Ευγένιος, Μαθηματικός Δ.Ε.

*Εποπτεία:* Σταύρος Παπασταυρίδης,  
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

ISBN: 960-541-014-1

## ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

Σημαντικές καινοτομίες που αφορούν το περιεχόμενο της διδασκαλίας και τη μεθοδολογία της καθώς και τον τρόπο αξιολόγησης των μαθητών εισάγονται με την πρόσφατη εκπαιδευτική μεταρρύθμιση στο Ενιαίο Λύκειο. Σκοπός των αλλαγών αυτών είναι η ποιοτική αναβάθμιση της διδακτικής πράξης, η μετάθεση της έμφασης από τη στείρα απομνημόνευση στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης και της δημιουργικής ικανότητας των μαθητών και η γενικότερη προσαρμογή του Λυκείου στις σύγχρονες κοινωνικές, οικονομικές, πολιτιστικές και επιστημονικές εξελίξεις.

Το Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, θέλοντας να συμβάλει ενεργώς στην προσπάθεια αυτή και να διευκολύνει το έργο των εκπαιδευτικών που καλούνται να διαδραματίσουν πρωταγωνιστικό ρόλο στην υλοποίηση των παραπάνω αλλαγών, ετοίμασε ειδικά τεύχη με μεθοδολογικές οδηγίες και ενδεικτικά παραδείγματα ερωτήσεων και δοκιμασιών αξιολόγησης των μαθητών σε πολλά σχολικά μαθήματα.

Τα τεύχη αυτά διανεμήθηκαν κατά το περασμένο σχολικό έτος σε όλα τα Λύκεια της χώρας και έγιναν ευμενώς δεκτά από τους καθηγητές που δίδαξαν πέρυσι στην Α΄ τάξη του Ενιαίου Λυκείου. Το υποστηρικτικό αυτό υλικό, αφού βελτιώθηκε με βάση τις παρατηρήσεις και τα σχόλια των εκπαιδευτικών, επανεκδίδεται φέτος. Για να είναι η εργασία αυτή εύχρηστη στην καθημερινή διδακτική πράξη, ακολουθήσαμε στην παρουσίαση των διαφόρων ερωτήσεων και ασκήσεων τη διάταξη που υπάρχει στα αντίστοιχα σχολικά βιβλία της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας. Στην επόμενη έκδοση της θα λάβουμε υπόψη και το νέο βιβλίο της Γεωμετρίας.

Παραδίνοντας τα νέα τεύχη στους εκπαιδευτικούς επιθυμώ να τονίσω ότι όσα περιλαμβάνονται σ' αυτά έχουν συμβουλευτικό χαρακτήρα και στοχεύουν στο να τους βοηθήσουν να χρησιμοποιούν στη διδακτική πράξη ποικιλία τρόπων και μεθόδων αξιολόγησης των μαθητών, από την οποία προκύπτει πιο έγκυρο και πιο αξιόπιστο αποτέλεσμα. Αυτό σημαίνει ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα να τροποποιούν τις ερωτήσεις που περιλαμβάνονται στο παρόν βιβλίο με στόχο την προσαρμογή τους στις ιδιαιτερότητες των τμημάτων στα οποία διδάσκουν. Ευνόητο είναι, επίσης, ότι μπορούν να εκπονούν και ερωτήσεις που δεν υπάρχουν στο βιβλίο αυτό. Οι εποικοδομητικές παρατηρήσεις και προτάσεις τους για τη βελτίωση του περιεχομένου του παρόντος βιβλίου και του τρόπου αξιολόγησης των μαθητών γενικότερα εξακολουθούν και φέτος να είναι και αναγκαίες και ευπρόσδεκτες.

Ιδιαίτερα θέλω να τονίσω ότι στόχος μας είναι η ποιοτική βελτίωση της αξιολόγησης και όχι η αύξηση του εξεταστικού φόρτου των μαθητών. Για το λόγο αυτόν η χρήση τόσο των ολιγόλεπτων και ωριαίων κριτηρίων αξιολόγησης, όσο και η ανάθεση εργασιών στο σχολείο και στο σπίτι πρέπει να γίνονται με σύνεση και φειδώ. Η αξιολόγηση δεν είναι αυτοσκοπός. Πρέπει να υπηρετεί τη διδακτική διαδικασία, μέσα από τη συνεχή ανατροφοδότησή της, να συνεισφέρει στη βελτίωσή της και, κυρίως, να προωθεί τη μάθηση.

Μ' αυτό το πνεύμα πρέπει να αξιοποιηθεί και το περιεχόμενο του βιβλίου αυτού. Για την καλύτερη χρήση του έχομε την πρόθεση να πραγματοποιήσουμε ειδικά σεμινάρια για τους εκπαιδευτικούς που καλούνται να εφαρμόσουν στη σχολική πράξη όσα προτείνουμε.

Τελειώνοντας τον πρόλογο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι κατά τη διάρκεια του προηγούμενου σχολικού έτους είχαν την καλοσύνη να μας στείλουν σχόλια και παρατηρήσεις, τα οποία προσπαθήσαμε να αξιοποιήσουμε στο μέτρο του δυνατού.

Ευχαριστώ ακόμη την πολιτική ηγεσία του Υπουργείου Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων για την ηθική και ουσιαστική στήριξη της προσπάθειάς μας καθώς και τις αρμόδιες Διευθύνσεις του ΥΠΕΠΘ και ιδιαίτερα τη Διεύθυνση του Κοινοτικού Πλαισίου Στήριξης από την οποία χρηματοδοτείται το έργο της εκπόνησης νέων τρόπων αξιολόγησης των μαθητών.

Περισσότερο, όμως, από όλους επιθυμώ να ευχαριστήσω τους εκλεκτούς συνεργάτες μου στο Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, οι οποίοι με αξιέπαινο ζήλο εργάστηκαν για τη σύνταξη των τευχών αυτών. Η καλύτερη αναγνώριση της εργασίας τους θα είναι η αξιοποίησή της στην καθημερινή διδακτική πράξη.

Αθήνα, Ιούλιος 1998

Ο Πρόεδρος του Κ.Ε.Ε.  
Καθηγητής Μιχάλης Κασσωτάκης

## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όλα τα είδη ερωτήσεων που αναφέρονται στο «Γενικό Οδηγό για την Αξιολόγηση των μαθητών στην Α΄ Λυκείου» μπορούν να χρησιμοποιηθούν στα Μαθηματικά, τόσο στην προφορική διδασκαλία/εξέταση, όσο και στις γραπτές εξετάσεις.

Η φύση όμως του μαθήματος των Μαθηματικών, η ακριβολογία και η σαφήνεια που απαιτεί, μας επιβάλλουν να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί στη διατύπωση των ερωτήσεων όλων των μορφών, προπαντός όμως σ' εκείνες, οι οποίες χρησιμοποιούνται για πρώτη φορά.

Ο εκπαιδευτικός οφείλει να έχει υπόψη του ότι οι ερωτήσεις που χρησιμοποιεί για την εξέταση των μαθητών του πρέπει να είναι:

- ποικίλες έτσι ώστε τα μειονεκτήματα του ενός τύπου ερωτήσεων να αντισταθμίζονται με τα πλεονεκτήματα του άλλου,
- συνάρτηση των στόχων του μαθήματος, του χρόνου εξέτασης, του τρόπου βαθμολόγησης των γραπτών και της ερμηνείας των σχετικών αποτελεσμάτων, και
- σύμφωνες με το πλαίσιο της διδασκαλίας που προηγήθηκε.

Επειδή βασικοί σκοποί του μαθήματος των Μαθηματικών (βλέπε Οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου) είναι η άσκηση των μαθητών στην ορθολογική σκέψη, στην αφαίρεση, στην ανάλυση, στη γενίκευση και στην εφαρμογή, η αξιολόγηση δεν πρέπει να αναφέρεται μόνο στην απομνημόνευση πληροφοριών, αλλά οφείλει να ελέγχει και το βαθμό, στον οποίο επιτεύχθηκαν και οι λοιπές επιδιώξεις του μαθήματος.

Στα Μαθηματικά, το ζήτημα της ερώτησης κρίσης έχει ήδη αντιμετωπισθεί. Στις ως τώρα εξεταστικές δοκιμασίες περιλαμβάνονται, εκτός των ερωτήσεων θεωρίας, και θέματα κρίσης με τη μορφή ασκήσεων και προβλημάτων. Για το λόγο αυτό δε θα επιμείνουμε περισσότερο στο παραπάνω ζήτημα. Η προσπάθειά μας συνίσταται, κυρίως, στο να αξιοποιήσουμε και στα Μαθηματικά ερωτήσεις νέου τύπου και να τις συνδυάσουμε με τις παραδοσιακές μεθόδους εξέτασης αλλά και με τους ιδιαίτερους τρόπους έκφρασης της μαθηματικής επιστήμης (τύπους, σύμβολα, κτλ.). Για το σκοπό αυτό δίνουμε στη συνέχεια μερικές πληροφορίες για τα διάφορα είδη ερωτήσεων εξειδικεύοντας στα Μαθηματικά όσα έχουν ήδη αναφερθεί στο Γενικό Οδηγό Αξιολόγησης των μαθητών.

## 2. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Στις παραδοσιακές μεθόδους εξέτασης, όπου επικρατεί κυρίως η άσκηση και κατά δεύτερο το πρόβλημα, ο μαθητής απαντά με συνεχή λόγο σε ερωτήσεις **ανοιχτού τύπου**, οι οποίες δέχονται είτε μακροσκελή είτε σύντομη απάντηση. Στο υποκεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε μόνο στις πρώτες, οι οποίες είναι ευρύτερα γνωστές ως ερωτήσεις ανάπτυξης.

Ως πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της χρήσης των ερωτήσεων ανάπτυξης στα Μαθηματικά μπορούν να θεωρηθούν τα παρακάτω:

### *Πλεονεκτήματα:*

- δίνουν πληρέστερη εικόνα των ικανοτήτων των εξεταζομένων,
- προωθούν τη συνθετική και δημιουργική ικανότητα του μαθητή,
- καθιστούν δυνατό τον έλεγχο των εσφαλμένων αντιλήψεών του και των λαθών στη λογική διαδικασία που ακολουθεί για να λύσει ένα πρόβλημα,
- αποκαλύπτουν καλύτερα τα προβλήματα κατανόησης των μαθηματικών εννοιών.

### **Μειονεκτήματα:**

- αξιολογούνται υποκειμενικά,
- ελέγχουν μικρό τμήμα της εξεταστέας ύλης,
- απαιτούν αρκετό χρόνο για την απάντηση από το μαθητή και για τη διόρθωσή τους από τον καθηγητή,
- υπάρχει, τέλος, κίνδυνος να μην αποδίδεται σωστά αυτό που έχουν κατανοήσει, από μαθηματική άποψη, οι μαθητές, λόγω γλωσσικών δυσκολιών.

Ερωτήσεις ανάπτυξης μπορεί να είναι:

- η απόδειξη ενός θεωρήματος, ενός τύπου, μιας σχέσης,
- ο υπολογισμός ή μετασχηματισμός παραστάσεων,
- η επίλυση εξίσωσης, ανίσωσης, συστήματος, τριγώνου,
- η μελέτη συνάρτησης,
- η επίλυση προβλήματος, κτλ.

Στις ερωτήσεις ανάπτυξης χρησιμοποιούνται συνήθως διάφορες εκφράσεις όπως: να λύσετε, να αποδείξετε, να κατασκευάσετε, να απλοποιήσετε, να υπολογίσετε, να βρείτε κτλ., οι οποίες προσδιορίζουν τις ενέργειες που καλείται να κάμει ο μαθητής και την πορεία την οποία οφείλει να ακολουθήσει.

Η πλειονότητα των ασκήσεων και των προβλημάτων, που περιέχονται στο σχολικό βιβλίο (ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 1998), ανήκουν στην κατηγορία αυτή. (Βλ. για παράδειγμα τις ασκήσεις Α και Β ομάδας της § 1.4 και 1.5 (σελ. 35, 36, 37 του παραπάνω βιβλίου)

Το ίδιο ισχύει και για το σχολικό βιβλίο ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 1998

### 3. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

Στον τύπο αυτό εντάσσονται οι ερωτήσεις εκείνες στις οποίες ζητείται από το μαθητή να γράψει κάτι πολύ συγκεκριμένο και σύντομο, όπως π.χ. ένα ορισμό, μια ιδιότητα, ένα σύμβολο, μια σχέση δύο μεγεθών, την εκφώνηση ενός θεωρήματος και άλλα παρόμοια.

#### ***Πλεονεκτήματα:***

Οι ερωτήσεις σύντομης απάντησης:

- διατυπώνονται εύκολα και γρήγορα,
- εξετάζουν μεγάλο φάσμα διδακτικών εννοιών,
- χρειάζονται σχετικά περιορισμένο χρόνο για εξέταση και βαθμολόγηση,
- εξασφαλίζουν υψηλότερη αντικειμενικότητα στη βαθμολογία των απαντήσεων σε σχέση με τις ερωτήσεις ανάπτυξης,
- επηρεάζονται από τον παράγοντα τύχη λιγότερο από ό,τι οι κλειστές ή οι αντικειμενικού τύπου ερωτήσεις,
- ασκούν τους μαθητές στο να διακρίνουν το ουσιώδες από το επουσιώδες

#### ***Μειονεκτήματα:***

Έχουν όμως τα εξής μειονεκτήματα:

- εξετάζουν αποσπασματικά στοιχεία της ύλης,
- δεν επιτρέπουν το συνολικό έλεγχο του τρόπου σκέψης του μαθητή,
- απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή στη διατύπωσή τους και κυρίως στον προσδιορισμό των στοιχείων που ζητούνται από τους εξεταζομένους, και
- δεν προσφέρονται για τον έλεγχο πολύπλοκων αποδεικτικών διαδικασιών στα Μαθηματικά.

#### **Παραδείγματα ερωτήσεων σύντομης απάντησης**

1. Τι ονομάζουμε ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού;
2. Πόσες μοίρες είναι το άθροισμα των γωνιών ενός πενταγώνου;
3. Ποια σχέση συνδέει τις δυο απέναντι γωνίες ενός ισοσκελούς τραπεζίου;
4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις (να γραφούν χωρίς ριζικά):

$$\sqrt{(2x)^2}, \quad \sqrt{\frac{x^4}{9}}, \quad \sqrt{(-20)^2}$$

5. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού  $x$  με  $|x| \geq 5$ .
6. Πότε η εξίσωση  $ax + \beta = 0$  με άγνωστο το  $x$  είναι ταυτότητα;
7. Αν  $\alpha, \beta$  είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει η ισότητα  $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ ;
8. Για ποιους φυσικούς αριθμούς  $n$  ισχύει η ισοδυναμία:  $x^n = \alpha^n \Leftrightarrow x = \alpha$  ή  $x = -\alpha$ ;
9. Σε ποιο σημείο τέμνει τον άξονα  $\psi\psi'$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^2 + x - 2$ ;
10. Για ποιους πραγματικούς αριθμούς ισχύει η ισότητα  $\sqrt{x^2} = -x$ ;



11. Ποιες λύσεις έχει η εξίσωση  $(2x + 3)^0 = 1$ ;  
Ως ερωτήσεις σύντομης απάντησης μπορούν να θεωρηθούν και όλες οι ερωτήσεις του 1<sup>ου</sup> κεφαλαίου (σελ. 33 - 34) του σχολικού βιβλίου ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ έκδοση 1998

#### 4. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ Ή ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

Με τις ερωτήσεις του τύπου αυτού καλείται ο εξεταζόμενος να επιλέξει την ορθή απάντηση από περιορισμένο αριθμό προτεινόμενων απαντήσεων ή να συσχετίσει μεταξύ τους διάφορα στοιχεία ή να τα διατάξει ή να τα συμπληρώσει.

Οι ερωτήσεις αυτές διακρίνονται σε:

- α) ερωτήσεις διαζευκτικής απάντησης ή της μορφής: «Σωστό - Λάθος»,
- β) ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής,
- γ) ερωτήσεις σύζευξης ή αντιστοίχισης,
- δ) ερωτήσεις διάταξης, και
- ε) ερωτήσεις συμπλήρωσης.

Οι ερωτήσεις αυτές δεν δίνουν την ευκαιρία στον εξεταζόμενο να οργανώσει τη σκέψη του, όπως ο ίδιος θέλει. Ο μαθητής καλείται να αναγνωρίσει τη σωστή απάντηση κι όχι να τη δημιουργήσει ο ίδιος.

Για το λόγο αυτό οι ερωτήσεις επικρίνονται συχνά. Θεωρούνται ότι εξετάζουν νοητικές ικανότητες χαμηλού κυρίως επιπέδου. Το πόσο ευσταθεί η άποψη αυτή, εξαρτάται από την κατασκευή των ερωτήσεων και των απαντήσεων που δίνονται σ' αυτές. Μία καλά διατυπωμένη ερώτηση αντικειμενικού τύπου, απαιτεί όχι μόνο την ανάκληση πληροφοριών, αλλά και άλλες ανώτερες δεξιότητες. Δεν υπάρχει όμως αμφιβολία ότι οι ερωτήσεις αυτές, όπως άλλωστε και οι προηγούμενες, έχουν ποικίλα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα τα οποία έχουν αναφερθεί αλλού (βλ. Γενικό Οδηγό). Υπενθυμίζουμε τα σημαντικότερα από αυτά.

##### ***Πλεονεκτήματα:***

- είναι σύντομες στη δομή τους,
- μπορούν να εξετάζουν ευρύτερο και αντιπροσωπευτικότερο τμήμα της ύλης,
- μπορούν να δίνονται συγχρόνως σε μεγάλο αριθμό εξεταζομένων,
- βαθμολογούνται και αξιολογούνται γρήγορα,
- δίνουν αντικειμενική βαθμολογία,
- απαιτούν λίγο χρόνο κατά τη διόρθωση.

##### ***Μειονεκτήματα:***

- συντάσσονται δυσκολότερα από τις ερωτήσεις σύντομης απάντησης,
- υπάρχει κίνδυνος παράλειψης ουσιωδών στοιχείων ενός κειμένου,
- δεν προσφέρονται για την αξιολόγηση της συνθετικής και δημιουργικής ικανότητας του μαθητή καθώς και για άλλους σύνθετους διδακτικούς στόχους,
- σωστές απαντήσεις μπορούν να δοθούν στην τύχη,

- η συνεννόηση μεταξύ των μαθητών, όταν χρησιμοποιούνται για όλους οι ίδιες ερωτήσεις/απαντήσεις, είναι πιο εύκολη από ό,τι σε άλλου τύπου ερωτήσεις, και τέλος
- απαιτούν μέσα και έξοδα (φωτοτυπικό, χαρτί κ.τ.λ.) για την αναπαραγωγή τους.

Για τη μείωση των αδυναμιών των ερωτήσεων αυτών προτείνονται τα εξής:

- να μη χρησιμοποιείται αυτοτελώς μικρός αριθμός κλειστού τύπου ερωτήσεων,
- οι ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου να συνδυάζονται και με άλλα είδη ερωτήσεων,
- καλό είναι στην ίδια τάξη να χρησιμοποιούνται κριτήρια, στα οποία οι ερωτήσεις και οι απαντήσεις έχουν τεθεί σε διαφορετική σειρά.

Για τον περιορισμό της πιθανότητας να επιλέξουν οι μαθητές κατά τύχη τη σωστή απάντηση, αλλά και για την αύξηση της εγκυρότητας της εξέτασης με ερωτήσεις κλειστού τύπου, μπορεί να ζητείται από το μαθητή:

- να δικαιολογεί την επιλογή της συγκεκριμένης απάντησης,
- να γράφει υπό ποίους όρους ή προϋποθέσεις ισχύει η απάντηση που επέλεξε,
- να προεκτείνει την απάντησή του συμπληρώνοντας την, όπου αυτό είναι δυνατό, με ένα παράδειγμα ή κάτι συναφές.

Οι συνδυασμοί αυτοί μπορούν εύκολα να γίνουν όταν τα κριτήρια εκπονούνται από τους εκπαιδευτικούς και διορθώνονται από αυτούς.

Οι διδάσκοντες θα πρέπει, τέλος, να μη λησμονούν ότι οι Έλληνες μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με τις παραπάνω ερωτήσεις και για το λόγο αυτό είναι απαραίτητο να δίνονται παραδείγματα του τρόπου απάντησης καθώς και όποιες άλλες επεξηγήσεις θεωρούνται αναγκαίες.

#### 4.1. Ερωτήσεις διαζευκτικής απάντησης ή του τύπου «Σωστό - Λάθος»

Οι ερωτήσεις αυτές αποτελούνται, συνήθως, από μια πρόταση, για την οποία ζητείται από το μαθητή να απαντήσει αν είναι σωστή ή λανθασμένη. Φαίνονται εύκολες στη διατύπωση, αλλά πολλές φορές στην πράξη αποδεικνύονται δύσκολες, γιατί δεν μπορούμε πάντοτε στα Μαθηματικά να βρίσκουμε προτάσεις που χαρακτηρίζονται, πάντα χωρίς επιφύλαξη ως αληθείς ή ψευδείς. Ιδιαίτερος, πρέπει να αποφεύγονται όροι που δεν κατανοούνται το ίδιο από όλους. Αν κάποια διευκρίνιση θεωρείται αναγκαία πρέπει να αναγράφεται.

Επειδή η πιθανότητα να απαντήσουν σωστά στην τύχη κάποιοι μαθητές είναι μεγάλη, η εγκυρότητα μιας τέτοιας εξέτασης αμφισβητείται. Γι αυτό δεν θα πρέπει οι ερωτήσεις αυτού του τύπου να έχουν μεγάλη βαρύτητα στην ατομική αξιολόγηση του μαθητή, αλλά περισσότερο στην αξιολόγηση της διδασκαλίας.

Ένα κριτήριο με Σ-Λ μπορεί να δοθεί στην αρχή μιας ενότητας για τον έλεγχο προαπαιτούμενων γνώσεων αλλά κυρίως στο τέλος της ενότητας για έλεγχο κατανόησης.

- *Παράδειγμα (α)*

Ισχύει η ισότητα:  $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$                       Σωστό (Σ)                      Λάθος (Λ)

Αν δεν έχει οριστεί το σύνολο αναφοράς, η πλήρης απάντηση θα ήταν: «Η σχέση που δόθηκε αληθεύει για κάθε  $x$ , που είναι διάφορο του 1 και του -1». Με τη μορφή όμως που δόθηκε, νοούμε ότι αν αληθεύει για όλα τα  $x \in \mathbb{R}$  άρα πρέπει να δεχθούμε σαν απάντηση το Λάθος.

- *Παράδειγμα (β)*

Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $x$ , ώστε να ισχύει:  $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$                       Σ                      Λ

Δεχόμαστε ως απάντηση το Σ

• *Παράδειγμα (γ)*

Η ερώτηση: Με  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει πάντα  $\sqrt{x^2} = x$  Σ    Λ

Δέχεται απάντηση το Λ. Ενώ η ερώτηση:

Για κάθε μη αρνητικό πραγματικό αριθμό  $x$  ισχύει  $\sqrt{x^2} = x$  Σ    Λ

δέχεται ως απάντηση το Σ.

• *Παράδειγμα (δ)*

Η ερώτηση: Οι απέναντι πλευρές τραπέζιου είναι παράλληλες Σ    Λ

δέχεται ως απάντηση το Λ, ενώ η ερώτηση:

Στο τραπέζιο υπάρχουν απέναντι πλευρές που είναι παράλληλες Σ    Λ

δέχεται ως απάντηση το Σ.

Άλλο τρόπο διάταξης των απαντήσεων σ' αυτού του τύπου τις ερωτήσεις δίνει ο παρακάτω πίνακας.

Ερώτηση		Απάντηση	
	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ	ΔΕΝ ΞΕΡΩ
$(-3)^2 = 9$	.....	.....	.....
$a^{-3} = \frac{1}{a^3}, a \neq 0$	.....	.....	.....
$\sqrt{25} = -5$	.....	.....	.....
.....			

Οι εξεταζόμενοι σημειώνουν για κάθε ερώτηση ένα X σε μία απ' τις τρεις στήλες του πίνακα (Σωστό, Λάθος, Δεν ξέρω). Η προσθήκη της τρίτης στήλης δίνει περισσότερες πληροφορίες και περιορίζει τον παράγοντα τύχη, ιδιαίτερα αν σ' αυτήν ζητούνται συμπληρωματικά στοιχεία από το μαθητή, όπως π.χ.: συνθήκες ή όροι κάτω από τους οποίους η ερώτηση είναι σωστή ή λανθασμένη, αιτιολογήσεις του λάθους ή κάτι άλλο συναφές. Ο διδάσκων μπορεί να προσθέσει και τέταρτη στήλη, αν το θεωρεί απαραίτητο. Είναι προφανές ότι σε μια τέτοια περίπτωση πρέπει να ληφθεί υπόψη η επιμήκυνση του χρόνου που απαιτείται για την απάντηση στις ερωτήσεις αυτές και η αύξηση της βαρύτητάς τους στη βαθμολογία.

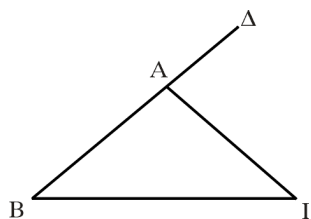
Τέλος, οι απαντήσεις στις ερωτήσεις διαζευκτικού τύπου μπορούν να δίνονται και με άλλους τρόπους, όπως: ναι-όχι, ισχύει-δεν ισχύει και άλλα παρόμοια.

**Παραδείγματα ερωτήσεων του τύπου «Σωστό - Λάθος»**

1. Με δεδομένες τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$ ,  $g$  και  $h$  της άσκησης 11 (σελ. 95 σχολικού βιβλίου ΟΕΔΒ Άλγεβρα Α' Λυκείου), μπορούν να δοθούν οι ερωτήσεις:

α) Η καμπύλη $\psi = f(x)$ παριστάνει γραφική παράσταση συνάρτησης που είναι άρτια	<b>Σ</b>	<b>Λ</b>
β) Η καμπύλη $\psi = g(x)$ παριστάνει γραφική παράσταση συνάρτησης που δεν είναι άρτια ούτε περιττή	<b>Σ</b>	<b>Λ</b>
γ) Η καμπύλη $\psi = h(x)$ παριστάνει γραφική παράσταση συνάρτησης που είναι άρτια	<b>Σ</b>	<b>Λ</b>

2. Αν στο σχήμα το τρίγωνο είναι ισοσκελές ( $AB = AI$ ), τότε είναι:



α)  $\hat{\Gamma\hat{A}\Delta} = \hat{B\hat{A}\Gamma} + \hat{B\hat{\Gamma}A}$      $\Sigma$      $\Lambda$

β)  $\hat{\Gamma\hat{B}A} = 90^\circ - \hat{B\hat{A}\Gamma}$      $\Sigma$      $\Lambda$

γ)  $\hat{A\hat{\Gamma}B} = \frac{1}{2} \hat{\Gamma\hat{A}\Delta}$      $\Sigma$      $\Lambda$

3. Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{3x}{x^2+4}$  ορίζεται στο  $\mathbb{R}$      $\Sigma$      $\Lambda$

4. Δύο αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές     $\Sigma$      $\Lambda$

5.  $|x-3| = |3-x|$      $\Sigma$      $\Lambda$

6. Αν  $|x| > 1$  τότε  $x > 1$  ή  $x < -1$      $\Sigma$      $\Lambda$

7.  $\left| \frac{3+x^2}{3+x^2} \right| = \left| \frac{1}{3+x^2} \right|$      $\Sigma$      $\Lambda$

8.  $|-3+2| = |-3| + |2|$      $\Sigma$      $\Lambda$

9. Η εξίσωση  $|x-3|+4=0$  είναι αδύνατη     $\Sigma$      $\Lambda$

10. Αν  $|x|+|y|=0$ , τότε  $x=0$  ή  $y=0$      $\Sigma$      $\Lambda$

11.  $|a| \geq a$      $\Sigma$      $\Lambda$

12.  $||x+3| = |x|+3$      $\Sigma$      $\Lambda$

13.  $||x|| = |x|$  Σ Λ
14. Αν  $x \leq 5$ , τότε  $|x-5| = 5-x$  Σ Λ
15. Αν  $\alpha = \beta$ , τότε  $\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta$  Σ Λ

#### 4.2. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Κάθε ερώτηση πολλαπλής επιλογής αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος υπάρχουν τα δεδομένα (η υπόθεση) και στο δεύτερο μια σειρά από τέσσερις συνήθως ή πέντε πιθανές απαντήσεις, από τις οποίες μία μόνο είναι σωστή.

Οι ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής θεωρούνται ως το καλύτερο είδος ερωτήσεων αντικειμενικού τύπου και χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά αρκετά συχνά. Υπάρχει όμως δυσκολία στο να βρίσκονται πάντοτε στα Μαθηματικά τέσσερις ή πέντε αληθοφανείς και ισοπίθανες απαντήσεις. Γι' αυτό απαιτείται ιδιαίτερη προσπάθεια και προσοχή κατά τη σύνταξή τους.

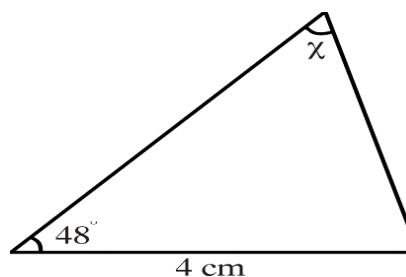
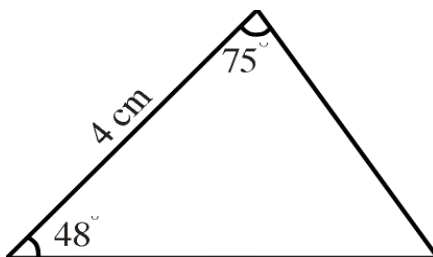
Στις ερωτήσεις αυτές η απάντηση μπορεί να προκύπτει από μια σύντομη από μνήμης απόδειξη ή υπολογισμό. Αν όμως ο προσδιορισμός της σωστής απάντησης απαιτεί μεγάλη αποδεικτική ή υπολογιστική διαδικασία, τότε σίγουρα δεν είναι αυτός ο καταλληλότερος τρόπος διατύπωσης μιας ερώτησης. Ο μαθητής μπορεί να εντοπίσει τη σωστή απάντηση με μια διαδικασία αποκλεισμού των άλλων απαντήσεων, η οποία μπορεί μερικές φορές να είναι και η διαδικασία της δοκιμής των λύσεων. Η σειρά με την οποία αποκλείει ο μαθητής κάποιες απαντήσεις δεν είναι υποχρεωτικά αυτή με την οποία δίνονται οι πιθανές απαντήσεις.

Καλό πάντως είναι και οι ερωτήσεις αυτές να συνδυάζονται με άλλα είδη ερωτήσεων.

#### Παραδείγματα ερωτήσεων πολλαπλής επιλογής

Μελετήστε τις παρακάτω ερωτήσεις και βάλτε σε κύκλο το γράμμα της απάντησης που θεωρείτε ορθή.

1. Τα παρακάτω τρίγωνα είναι ίσα. Τα μέτρα μερικών πλευρών και γωνιών των δύο τριγώνων φαίνονται στα σχήματα:



Η τιμή του  $x$  είναι:

A.  $75^\circ$

B.  $48^\circ$

Γ.  $27^\circ$

Δ.  $57^\circ$

Ε.  $67^\circ$

2. Το σχήμα απεικονίζει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ . Οι τιμές των  $\beta$  και  $\gamma$  είναι αντίστοιχως:

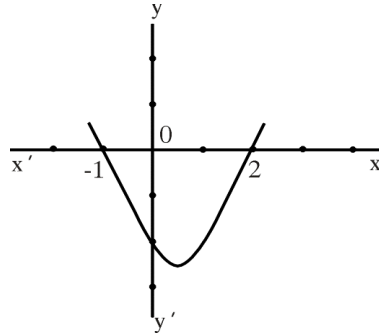
A. 1 και -2

B. 0 και 2

Γ. -1 και -

Δ. -2 και 2

Ε.  $\frac{1}{2}$  και  $-\frac{5}{2}$

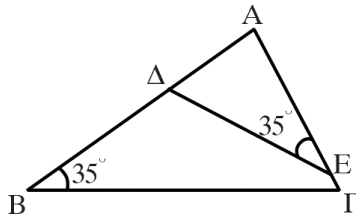




3. Αν  $x = -\psi$ , τότε η τιμή της παράστασης  $x^2 - \psi^2$  ισούται με:  
 Α.  $2x$                       Β.  $2\psi$                       Γ.  $x - \psi$                       Δ. 0                      Ε.  $x + \psi$

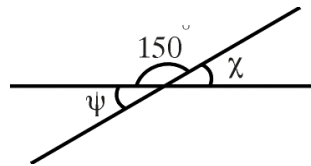
4. Το σύστημα  $\begin{cases} x-\psi=5 \\ x+3\psi=9 \end{cases}$  έχει λύση το ζεύγος  $(x, \psi)$  που ισούται με:  
 Α.  $(-1, 6)$     Β.  $(1, 6)$     Γ.  $(-1, -6)$     Δ.  $(1, -6)$     Ε.  $(6, 1)$

5. Αν στο σχήμα είναι  $AB = 6 \text{ cm}$ ,  $AE = 3 \text{ cm}$ ,  $DE = 4 \text{ cm}$  και  $\hat{B} = \hat{E} = 35^\circ$ , τότε η πλευρά  $B\Gamma$  είναι:



- Α.  $\frac{25}{8} \text{ cm}$     Β.  $7 \text{ cm}$     Γ.  $\frac{35}{4} \text{ cm}$     Δ.  $8 \text{ cm}$     Ε.  $\frac{25}{3} \text{ cm}$

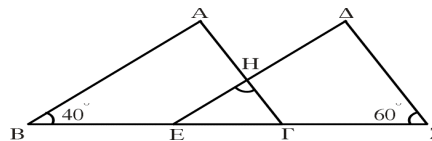
6. Στο σχήμα είναι δύο τεμνόμενες ευθείες :  
 Το μέτρο του αθροίσματος  $\hat{x} + \hat{\psi}$  είναι :



- Α.  $15^\circ$                       Β.  $30^\circ$                       Γ.  $60^\circ$   
 Δ.  $180^\circ$                       Ε.  $200^\circ$

7. Στο σχήμα τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $ΔEZ$  είναι ίσα και  $B\Gamma = EZ$ .  
 Η γωνία  $\hat{E}\hat{H}\hat{\Gamma}$  είναι:

- Α.  $20^\circ$                       Β.  $40^\circ$                       Γ.  $\epsilon$   
 Δ.  $80^\circ$                       Ε.  $100^\circ$



8. Αν  $x = \sqrt{\alpha}$  με  $\alpha > 0$ , τότε ισχύει:  
 Α.  $\alpha^2 = x$                       Β.  $x^2 = -\alpha$                       Γ.  $\alpha = x^2$                       Δ.  $\alpha = x^{1/2}$                       Ε.  $\alpha^2 = -x$

9. Η ισότητα  $x + 1 + \sqrt{(x-1)^2} = 2x$  είναι σωστή αν:  
 Α.  $x > -1$                       Β.  $x \geq 1$                       Γ.  $x < 1$                       Δ.  $x \leq 1$   
 Ε.  $x$  οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός\*

\* Ανάλογο θέμα υπάρχει και στο σχολικό βιβλίο ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 1998, άσκηση. 6, σελ. 50.

10. Αν  $x < 1$  τότε η παράσταση:  $|x-1|+|x-2|-|x-3|$  ισούται με:  
 Α.  $2x - 1$     Β. 3    Γ.  $x - 2$     Δ.  $-x$     Ε. 0
11. Αν  $x^2 = x + 3$ , τότε το  $x^3$  ισούται με:  
 Α.  $x + 6$     Β.  $4x + 3$     Γ.  $4x^2 + 3$     Δ.  $x^2 + 3x + 3$     Ε.  $x^2 + 27$
12. Αν  $\psi = \frac{8}{x-3}$ , τότε για ποια τιμή του  $x$  ο  $\psi$  παίρνει την τιμή  $-1$ ;  
 Α. 8    Β.  $-5$     Γ. 3    Δ.  $-8$     Ε. 11
13. Αν  $x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ , τότε η τιμή της παράστασης  $\sqrt{36x^4 + 12x^2 + 1}$  είναι:  
 Α.  $-6$     Β. 6    Γ. 0    Δ. 2    Ε. 4
14. Αν οι εξισώσεις  $(\lambda - 2)x = \lambda + 2$  και  $\lambda^2x - \lambda = 4x + 5$  είναι συγχρόνως αδύνατες, τότε η τιμή του  $\lambda$  είναι:  
 Α. 2    Β.  $-4$     Γ. 4    Δ.  $-2$   
 Ε. οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός

15. Αν μια γωνία  $\omega$  είναι τα  $\frac{2}{3}$  της συμπληρωματικής της, τότε ισούται με:  
 A.  $20^\circ$       B.  $36^\circ$       Γ.  $90^\circ$       Δ.  $15^\circ$       E.  $100^\circ$
16. Αν μια γωνία  $\omega$  είναι τριπλάσια της παραπληρωματικής της, τότε ισούται με:  
 A.  $15^\circ$       B.  $90^\circ$       Γ.  $150^\circ$       Δ.  $135^\circ$       E.  $120^\circ$
17. Αν  $1 \leq x \leq 2$ , τότε η τιμή της παράστασης  $(\sqrt{x-1})^2 + \sqrt{(x-2)^2}$  ισούται με:  
 A. 3      B. -3      Γ. 0      Δ. 2      E. 1
18. Αν  $x, \psi \in \mathbb{R}$  και  $\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(\psi-3)^2} = 0$ , τότε ισχύει:  
 A.  $x = -1$  και  $\psi = 3$       B.  $x = 0$  και  $\psi = 3$       Γ.  $x = -1$  και  $\psi = -3$   
 Δ.  $x = 2$  και  $\psi = -2$       E.  $x = 1$  και  $\psi = 3$
19. Ένας γάιδαρος μεταφέρει 15 σακιά αλάτι και 2 κιλά ελιές. Ένα μουλάρι μεταφέρει 2 σακιά αλάτι και 40 κιλά ελιές. Ο γάιδαρος διαμαρτύρεται αναστενάζοντας. Τι διαμαρτύρεσαι, (του απαντά το μουλάρι) - το ίδιο βάρος μεταφέρουμε. Αν η ποσότητα σε κιλά ενός σάκου αλάτι είναι  $x$ , και το μουλάρι λέει την αλήθεια, ποια από τις παρακάτω εξισώσεις αποδίδει το πρόβλημα;  
 A.  $40x - 15 = 2$       B.  $15(x - 2) = 40x$       Γ.  $15x + 2 = 2x + 40$   
 Δ.  $2x + 40 = 2(x + 15)$       E.  $40(x + 2) = 15x$
20. Κατά τη διάρκεια των προπονήσεων για το Μαραθώνιο ο Ηλίας ξεκινά από το Μαραθώνα με ταχύτητα 9 km/h. Ο φίλος του ο Γεράσιμος που θέλει να τον φθάσει ξεκινά μια ώρα αργότερα με ταχύτητα 12 km/h. Αν  $x$  είναι ο χρόνος που θα χρειαστεί ο Γεράσιμος για να φθάσει τον Ηλία, ποια από τις παρακάτω εξισώσεις αποδίδει το πρόβλημα;  
 A:  $12x - 9 = 1$       B:  $9(x + 1) = 12x$       Γ:  $9x + 1 = x + 1$   
 Δ:  $x + 12 = 2(9 + x)$       E:  $12(x + 1) = 9x$

### 4.3 Ερωτήσεις σύζευξης ή αντιστοίχισης

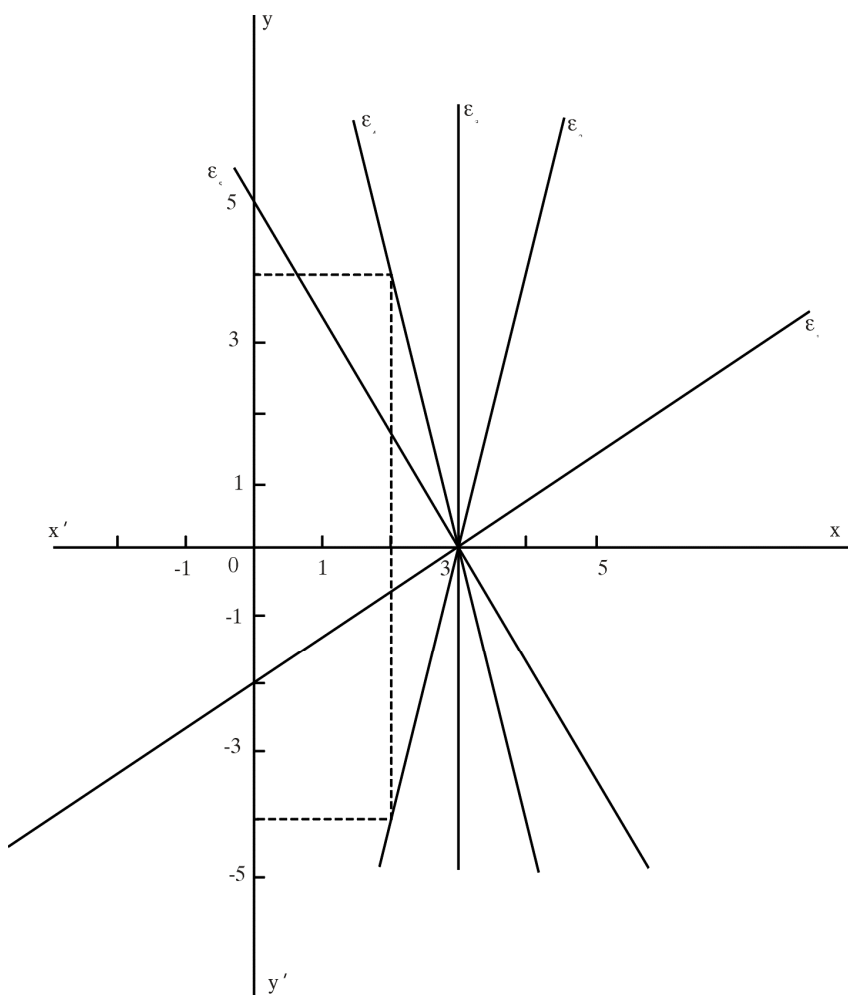
Στις ερωτήσεις αντιστοίχισης δίνονται δύο ή περισσότερες στήλες καθεμιά από τις οποίες μπορεί να περιέχει μαθηματικούς όρους, σχέσεις, ορισμούς, τύπους, κανόνες, σύμβολα, γραφικές παραστάσεις κ.τ.λ. Ο εξεταζόμενος καλείται να αντιστοιχίσει, με βάση ένα συγκεκριμένο κριτήριο, κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης με ένα μόνο στοιχείο των άλλων στηλών. Ο μαθητής απαντά στις ερωτήσεις συνδέοντας με γραμμές τα στοιχεία που συσχετίζονται ή γράφοντας μπροστά από τα στοιχεία της πρώτης στήλης τους αριθμούς ή τα γράμματα των αντίστοιχων στοιχείων της δεύτερης στήλης ή των άλλων στηλών, εάν υπάρχουν περισσότερες της μιας.

Οι ερωτήσεις αντιστοίχισης προσφέρονται περισσότερο για συσχέτιση γραφικών παραστάσεων με τύπους, πεδία ορισμού, σύνολα τιμών, ονομασίες σχημάτων, μεταφορές δεδομένων από τη φυσική γλώσσα στη μαθηματική γλώσσα κ.τ.λ. Όπως και στις προηγούμενες κατηγορίες, δεν θα πρέπει ο μαθητής να καταλήγει στην απάντηση μετά από μεγάλη αποδεικτική ή υπολογιστική διαδικασία.

## Ενδεικτικά παραδείγματα ερωτήσεων αντιστοίχισης

### Παράδειγμα 1

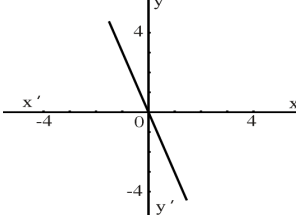
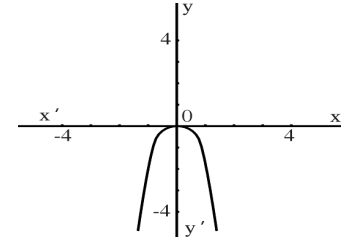
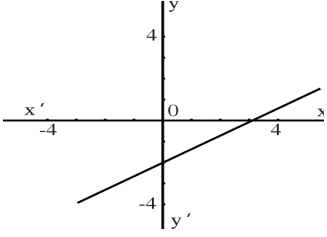
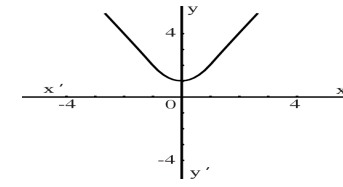
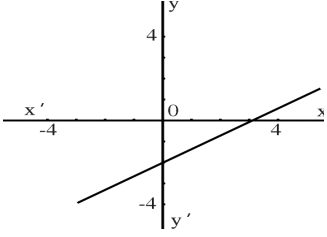
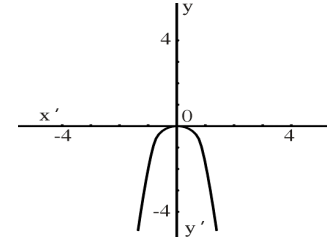
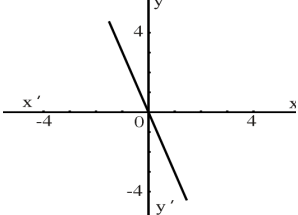
Παρατηρώντας το σχήμα, συνδέστε με μια γραμμή κάθε ευθεία της στήλης (Α) με την αντίστοιχη εξίσωσή της στη στήλη (Β) στον πίνακα της επόμενης σελίδας.



Στήλη (A) Ευθεία του σχήματος	Στήλη (B) Εξίσωση ευθείας
$\epsilon_1$	$3x - 2\psi = 6$
	$4x - \psi = 12$
$\epsilon_2$	$4x + 3\psi = 12$
	$2x - 3\psi = 6$
$\epsilon_3$	$x = 3$
$\epsilon_4$	$\psi = 3$
$\epsilon_5$	$4x + \psi = 12$ $5x + 3\psi = 15$

Παράδειγμα 2

Συνδέστε κάθε γραφική παράσταση της στήλης (Α) με τον αντίστοιχο τύπο της στη στήλη (Β).

στήλη (Α) γραφική παράσταση	στήλη (Β) τύπος συνάρτησης
	$f(x) = \frac{2}{3}x - 2$
	$h(x) = -2x^2$
	$\sigma(\chi) = -3\chi$
	$\varphi(x) = x^2 + 1$
	$\pi(x) = 3x - 2$
	$t(x) = 3x$
	$\rho(x) = -2x + 3$

Παράδειγμα 3

Συνδέστε με μια γραμμή κάθε στοιχείο της στήλης (A) με το αντίστοιχο της στήλης (B).

στήλη (A) σχέση που ικανοποιεί ο $x \in \mathbb{R}$	Στήλη (B) τιμές του $x$
$ x-4  < 1$	$1 < x < 3$
	$3 < x < 5$
$d(x, 2) < 1$	$-3 < x < -1$
$d(1,x) \geq 2$	$x \leq -1$ ή $x \geq 3$
	$-1 \leq x \leq 3$
$ x+2  > 5$	$x > 3$ ή $x < -7$



Παράδειγμα 4

Στήλη (A) Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $\omega$	Στήλη (B) Τεταρτημόριο που λήγει η γωνία $\omega$
$\eta\mu\omega = -\frac{1}{2}$	πρώτο ή τέταρτο
$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$	πρώτο ή τρίτο
$\epsilon\phi\omega = -\sqrt{3}$	δεύτερο ή τέταρτο
	δεύτερο ή τρίτο
	τρίτο ή τέταρτο
	πρώτο ή δεύτερο

Παράδειγμα 5

Συνδέστε με μια γραμμή κάθε ταυτότητα της στήλης (A) με το ανάπτυγμά της στη στήλη (B).

Στήλη (A) ταυτότητα	Στήλη (B) ανάπτυγμα
$(x - \frac{1}{x})^2$	$(x - 1)(x + 1)$
	$x^2 - \frac{1}{x^2}$
$x^2 - 1$	$(1 - x)(1 + x)$
	$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$
$(1 - 2x)^2$	$4x^2 - 4x + 1$
	$1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$
$(1 - \frac{1}{x})^2$	$\frac{x^2 - 1}{x^2}$

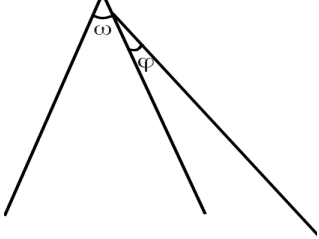
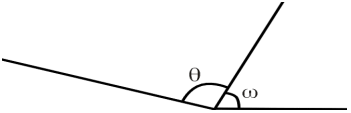
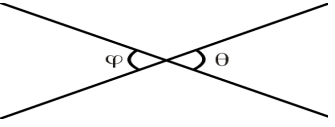
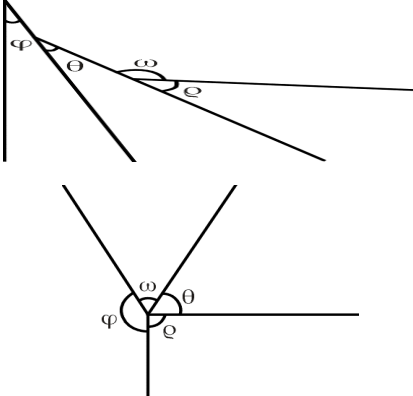
Παράδειγμα 6

Συνδέστε με μια γραμμή κάθε παράσταση της στήλης (A) με την αριθμητική της τιμή στη στήλη (B).

Στήλη (A) παράσταση του x με $1 < x < 5$	Στήλη (B) αριθμητική τιμή παράστασης
$A = \frac{2(x-1)}{ x-1 }$	2
	$-\frac{1}{6}$
$B = \frac{ x-1  - x}{ x+1  +  5-x }$	$\frac{13}{2}$
	$\frac{7}{13}$
$\Gamma = \frac{-x +  7+x }{13}$	$-\frac{1}{2}$
$\Delta = \frac{ x-5 }{2x-10}$	-2

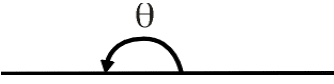
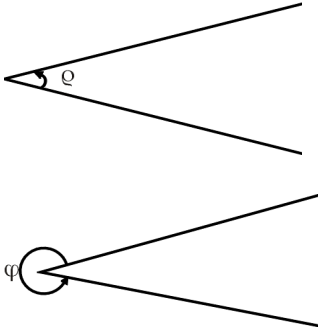
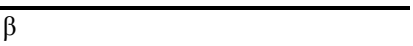
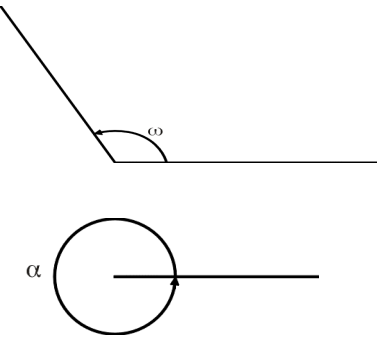
Παράδειγμα 7

Συνδέστε με μια γραμμή κάθε στοιχείο της στήλης (A) με το αντίστοιχο σχήμα της στήλης (B).

Στήλη (A) είδη γωνιών	Στήλη (B) Σχήμα
κατά κορυφήν γωνίες	
εφεξής γωνίες	
	
Διαδοχικές γωνίες	

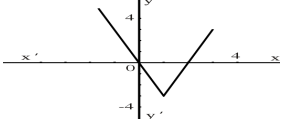
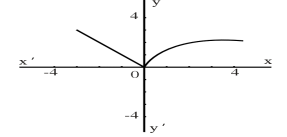
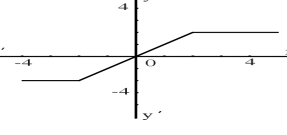
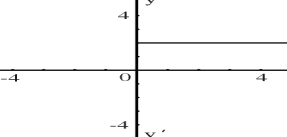
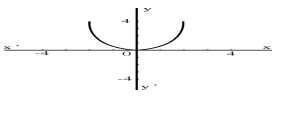
Παράδειγμα 8

Συνδέστε με μια γραμμή κάθε στοιχείο της στήλης (A) με το αντίστοιχο σχήμα της στήλης (B).

Στήλη (A) γωνία	Στήλη (B) Σχήμα
	
ευθεία γωνία	
Πλήρης γωνία	
μη κυρτή γωνία	
Μηδενική γωνία	

Παράδειγμα 9

Συνδέστε κάθε συνάρτηση της στήλης (A) με τη γραφική της παράσταση στη στήλη (B).

Στήλη (A) συνάρτηση	Στήλη (B) γραφική παράσταση
	
<p>Άρτια συνάρτηση</p> <p>Περιττή συνάρτηση</p> <p>Σταθερή συνάρτηση</p>	   

#### 4.4 Ερωτήσεις διάταξης

Στις ερωτήσεις διάταξης δίνονται:

- μία σειρά από διάφορα στοιχεία και
- μία πρόταση / κανόνας ή οδηγία

και ζητείται να διαταχθούν τα στοιχεία με βάση την πρόταση αυτή.

Οι ερωτήσεις διάταξης αξιολογούν την ικανότητα των εξεταζομένων να ιεραρχούν σκοπούς, έννοιες, μαθηματικά μεγέθη, κτλ. Οι ερωτήσεις διάταξης δύσκολα κατασκευάζονται λόγω της φύσης τους. Μπορούν όμως να τεθούν ως εξής :

Να δίνονται προτάσεις που αποδεικνύουν, υπολογίζουν κάποιο ερώτημα σε διαφορετική σειρά και να ζητείται να τοποθετηθούν στη σωστή σειρά ώστε να προκύπτει η απόδειξη, ο υπολογισμός ή η ζητούμενη λύση.

#### Ενδεικτικά παραδείγματα ερωτήσεων διάταξης

1. Η άσκηση Α7i της σελίδας 36 του σχολικού βιβλίου ΑΛΓΕΒΡΑ Α' Λυκείου έκδοση 1998.

2. Αν  $0 < \alpha < 1$  να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\frac{1}{\alpha}, \frac{\alpha+1}{2}, 0, \alpha-1, 1, \alpha$$

3. Αν  $A_1, A_2, A_3, A_4$  είναι αντιστοίχως τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων  $f(x) = 3x - 2$ ,

$$h(x) = \frac{1}{3x-2}, \quad g(x) = \sqrt{2x-3},$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}, \text{ να γράψετε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων σε μια σειρά ώστε}$$

καθένα να είναι υποσύνολο εκείνου που γράφεται δεξιά του.

$$4. \text{ Αν: } f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x < 1 \\ -x+3, & 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Να διατάξετε από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις τιμές:

$$f(-1), f\left(\frac{1}{2}\right), f(5), f(6), f(2)$$

5. Αν  $f$  συνάρτηση γνησίως αύξουσα με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , να διατάξετε από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις τιμές:

$$f(0), f(-1,5), f(-1), f\left(\frac{7}{6}\right), f\left(\frac{3}{5}\right)$$

6. Αν  $f$  συνάρτηση γνησίως φθίνουσα με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και  $0 < \alpha < \beta$  να διατάξετε από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις τιμές:

$$f(\beta), \quad f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right), \quad f(0), \quad f(\alpha), \quad f(\alpha-\beta)$$

7. Αν  $\alpha > 1$  να διατάξετε από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις τιμές:

$$\frac{1}{\alpha}, \quad \alpha^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\alpha}{\sqrt[3]{\alpha^2}}, \quad \sqrt[4]{\alpha}, \quad \sqrt[6]{\alpha}, \quad \alpha$$

#### 4.5 Ερωτήσεις συμπλήρωσης

Με τις ερωτήσεις αυτές δίνονται στον εξεταζόμενο προτάσεις ή μαθηματικές σχέσεις, στις οποίες λείπουν ορισμένες λέξεις, αριθμοί, σύμβολα, παραστάσεις κλπ, και καλείται αυτός να τις συμπληρώσει.

Οι ερωτήσεις του παραπάνω τύπου επηρεάζονται λιγότερο από τον παράγοντα «τύχη» σε σύγκριση προς τις άλλες ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου και μπορούν να χρησιμοποιηθούν με επιτυχία στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών.

Οι ερωτήσεις συμπλήρωσης είναι γνωστές στον μαθητή από το Γυμνάσιο, από τη συμπλήρωση όρων σε ταυτότητες, τη συμπλήρωση πινάκων κ.τ.λ. Μπορούμε ακόμα να χρησιμοποιούμε τις ερωτήσεις αυτές σε ορισμούς όταν λείπουν φράσεις κλειδιά, σε ελλιπείς γραφικές παραστάσεις, στη συμπλήρωση σχέσεων, στην εξαγωγή συμπερασμάτων κ.τ.λ.

##### **Ενδεικτικά παραδείγματα ερωτήσεων συμπλήρωσης.**

1. Η άσκηση 12 στις σελίδες 42-43 του σχολικού βιβλίου ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ Λυκείου ΟΕΔΒ έκδοση 1998.

2. Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού  $x$ , συμβολίζεται με ..... και είναι μη ..... αριθμός.

3. Αν ισχύει  $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ , τότε οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι .....

4. Η απόσταση δύο αριθμών  $\alpha$  και  $\beta$  συμβολίζεται με ..... και είναι ίση με .....

5. Αν  $\mu, \nu$  είναι φυσικοί αριθμοί μεγαλύτεροι ή ίσοι του 2 και  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  με  $\alpha, \beta \geq 0$ , τότε σύμφωνα με γνωστές ιδιότητες έχουμε:

$$\sqrt[\mu]{\alpha} \sqrt[\nu]{\beta} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt[\mu]{\alpha^\nu \cdot \beta} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \dots\dots\dots$$

6. Να συμπληρωθούν τα κενά:

i)  $x^2 - \dots = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right)$



ii)  $(x + \dots)^2 = \dots + 2x + \dots$

iii)  $(\frac{x}{3} - \dots)^2 = \dots - 2x + \dots$

7. Αν η συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  είναι γνησίως φθίνουσα και για οποιουδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει  $x_1 < x_2$  τότε ισχύει και .....

8. Οι διχοτόμοι δύο γωνιών που είναι εφεξής και παραπληρωματικές σχηματίζουν ..... γωνία.

1. Σε κάθε τρίγωνο οι τρεις διάμεσοι διέρχονται από το ίδιο σημείο που λέγεται ..... του τριγώνου.

Το σημείο αυτό απέχει από κάθε κορυφή τα ..... της αντίστοιχης διαμέσου.

Σε κάθε τρίγωνο οι τρεις ..... διέρχονται από το ίδιο σημείο που λέγεται έκκεντρο.

Σε κάθε τρίγωνο τα τρία ύψη του διέρχονται από το ίδιο σημείο που λέγεται .....

2. Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda - 2)x = \lambda^2 - 4$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

Τιμές του $\lambda$	Λύση της εξίσωσης
$\lambda = 3$	$x = \dots$
$\lambda = 2$	.....
$\lambda = -2$	.....
$\lambda = 0$	.....
$\lambda \neq 2$	.....

Γενικά, θα πρέπει να τονιστεί ότι οι ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου έρχονται να συνεισφέρουν στην ανάπτυξη δεξιοτήτων, που είναι στόχος του Ενιαίου Λυκείου, στην ικανότητα του μαθητή να παρατηρεί, να διαπιστώνει, να διακρίνει, να επιλέγει, να απορρίπτει και να αποφασίζει. Οι παραπάνω δεξιότητες είναι αναγκαίες για την αντιμετώπιση των συχνών αλλαγών, που συντελούνται στο κοινωνικό γίγνεσθαι, για την αντιμετώπιση της πολυμορφίας και της πολυπλοκότητας της καθημερινής ζωής, καθώς και του «απροσδόκητου» που είναι το χαρακτηριστικό της εποχής μας.

## **ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Η λύση ενός μαθηματικού προβλήματος απαιτεί από το μαθητή συστηματική εξέταση, ανάλυση και κατανόηση των δεδομένων και των ζητούμενων του προβλήματος καθώς και σχεδιασμό των βημάτων που θα ακολουθήσει για να απαντήσει σε ό,τι του ζητείται. Αυτό σημαίνει ότι η επίλυση ενός προβλήματος συμβάλλει άμεσα στον έλεγχο επίτευξης του στόχου των Μαθηματικών, που αναφέρεται στην οργάνωση της σκέψης και της πράξης στη ζωή. Γι' αυτό είναι αυτονόητη η σημαντική θέση που οφείλει να κατέχει το πρόβλημα τόσο στη διδασκαλία όσο και στις διάφορες μορφές αξιολόγησης των μαθητών στα Μαθηματικά.

Ένα πρόβλημα καλό είναι να αναλύεται σε δύο ή περισσότερα ερωτήματα - βήματα που βοηθούν το μαθητή να βρει τη λύση του και διευκολύνουν ταυτόχρονα τον καθηγητή να τον βαθμολογήσει δικαιότερα. Στο σχολικό βιβλίο ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ ΟΕΔΒ 1998 υπάρχουν πολλά τέτοια παραδείγματα (π.χ. πρόβλημα 5, σελ. 80), τα οποία ο διδάσκων μπορεί να αξιοποιήσει.

Η απάντηση σε ένα μαθηματικό πρόβλημα μπορεί κάλλιστα να συνδυαστεί και με ερωτήσεις κλειστού ή αντικειμενικού τύπου. Η χρήση των ερωτήσεων αυτών όχι μόνο δεν υποβαθμίζει το ρόλο και τη σημασία του μαθηματικού προβλήματος, αλλά αντίθετα ενισχύει τις διάφορες κατηγορίες προβλημάτων και δημιουργεί ποικιλία στον τρόπο απαντήσεων.

Τα παραδείγματα που ακολουθούν δείχνουν ότι θέματα με τα ίδια δεδομένα και με παραπλήσιους στόχους μπορούν να αξιολογηθούν, τόσο με ερωτήσεις ανάπτυξης όσο και με ερωτήσεις άλλων τύπων.

### Παράδειγμα 1ο.

- Πρόβλημα διατυπωμένο με τη μορφή ερώτησης ανάπτυξης:

Η εκτύπωση ευχετήριων καρτών συμπεριλαμβάνει μια σταθερή χρέωση 300 δρχ. καθώς και 65 δρχ. για κάθε κάρτα που τυπώνεται. Σύμφωνα με τα παραπάνω, να βρείτε τη συνάρτηση που αποδίδει κάθε φορά το κόστος της εκτύπωσης σε σχέση με τον αριθμό των καρτών.

- Πρόβλημα διατυπωμένο με τη μορφή ερώτησης πολλαπλής επιλογής:

Το κόστος  $\psi$  για την εκτύπωση ευχετήριων καρτών συμπεριλαμβάνει μια σταθερή χρέωση 300 δρχ. καθώς και 65 δρχ. για κάθε κάρτα που τυπώνεται. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να προσδιορίσουμε το κόστος  $\psi$  της εκτύπωσης  $x$  καρτών;

A.  $\psi = 300x + 65$

B.  $\psi = 365x$

Γ.  $\psi = 600x + 65$

Δ.  $\psi = 300 + 65x$

E.  $\psi = 365 + x$

### Παράδειγμα 2ο.

- Άσκηση με τη μορφή ερώτησης ανάπτυξης:

Αν  $x$  οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

i)  $\sqrt[4]{x^6}$

ii)  $\sqrt[6]{x^{18}}$

iii)  $\sqrt[3]{x^6}$

iv)  $\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ ,  $x \neq 0^*$

---

Σε όλα τα παραδείγματα που ακολουθούν, οι περιορισμοί όπου δεν αναφέρονται ρητά, εννοούνται.

- Άσκηση με τη μορφή ερωτήσεων του τύπου «Σωστό - Λάθος»:

Ελέγξτε αν καθεμιά από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστή ή λάθος. Αν είναι σωστή, κυκλώστε το Σ, αν είναι λάθος, το Λ.

Αν  $x$  οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, τότε ισχύει:

- |      |                            |   |   |
|------|----------------------------|---|---|
| i)   | $\sqrt[4]{x^6} = x^2$      | Σ | Λ |
| ii)  | $\sqrt[6]{x^{18}} = x^3$   | Σ | Λ |
| iii) | $\sqrt[3]{x^6} = x^2$      | Σ | Λ |
| iv)  | $\frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$ | Σ | Λ |

### Παράδειγμα 3ο.

- Ερωτήσεις ανάπτυξης:

Τα παρακάτω κλάσματα να τραπούν σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

$$i) \frac{15}{\sqrt{3}} \quad ii) \frac{10}{\sqrt{5}-1} \quad iii) \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{75}} \quad iv) \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \quad v) \frac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$$

- Ερωτήσεις αντιστοίχισης

Συνδέστε με μια γραμμή κάθε κλάσμα της στήλης (Α) με το ισοδύναμό του που είναι γραμμένο στη στήλη (Β):

Στήλη (Α)	Στήλη (Β)
$\frac{15}{\sqrt{3}}$	$\frac{5(\sqrt{5}+1)}{2}$
$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{75}}$	$5\sqrt{3}$
$\frac{10}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$	$\frac{2\sqrt{3}-7}{5}$
$\frac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$	$2-\sqrt{3}$
	$\sqrt{7}+\sqrt{5}$
	$3(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

## 5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΔΟΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ

Κριτήριο (τεστ) αξιολόγησης είναι ένα σύνολο ερωτήσεων - θεμάτων διαφόρων τύπων που επιλέγονται με βάση:

- τους στόχους που αξιολογούνται,
- το χρόνο που διατίθεται για την εξέταση,
- τα μέσα που υπάρχουν και τις ειδικές συνθήκες που επικρατούν.

Η βαθμολόγηση ενός κριτηρίου είναι συνάρτηση της διδασκαλίας που προηγήθηκε, των στόχων που έθεσε ο διδάσκων και, τέλος, της σύνθεσης των διαφόρων τύπων ερωτήσεων. Η βαρύτητα των ερωτήσεων ενός κριτηρίου στη βαθμολόγηση είναι δυνατό να διαφοροποιείται. Φυσικό είναι **οι ερωτήσεις ανάπτυξης να έχουν μεγαλύτερη βαθμολογική βαρύτητα σε σχέση με μεμονωμένες ερωτήσεις κλειστού τύπου**. Ο βαθμός συμμετοχής των ερωτήσεων ενός κριτηρίου στην τελική βαθμολογία, πρέπει να γνωστοποιείται στον εξεταζόμενο. Για το λόγο αυτό το πόσο βαθμολογείται η απάντηση κάθε ερώτησης αναγράφεται είτε στο φυλλάδιο του τεστ είτε στο φύλλο απαντήσεων, όπου αυτό χρησιμοποιείται.

Στη συνέχεια παρατίθενται μερικά ενδεικτικά παραδείγματα κριτηρίων αξιολόγησης, με βάση τα οποία οι διδάσκοντες μπορούν να εκπονήσουν τα δικά τους εξεταστικά μέσα. Στην εκπόνηση των κριτηρίων αυτών μπορούν να βοηθηθούν οι συνάδελφοι από τη συλλογή ερωτήσεων που περιλαμβάνονται στο βιβλίο αυτό, από τις ασκήσεις και τα προβλήματα των σχολικών βιβλίων και από προσωπική τους συλλογή ερωτήσεων.

## 5. 1 Ενδεικτικό\* κριτήριο αξιολόγησης του μαθητή στη Γεωμετρία

Διδακτική ενότητα : § 1.11 - 1.12 (γωνίες - πράξεις - είδη) Γεωμ. Α' Λυκείου ΟΕΔΒ  
1998

### Α. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΤΗ

- 1.Όνομα ..... 2. Επώνυμο .....  
3.Όνομα πατέρα ..... 4.Σχολείο .....  
5.Τάξη ..... 6. Τμήμα ..... 7. Ημερομηνία .....  
8. Μάθημα .....

*Διάρκεια: 1 διδακτική ώρα*

### Β. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

#### ΜΕΡΟΣ Ι

1. Να κατασκευάσετε δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες και να φέρετε τις διχοτόμους τους. Τι είδους γωνία σχηματίζουν οι διχοτόμοι αυτές; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

(4 μονάδες)\*\*

\* Η οριστικοποίηση της έκτασης, της δυσκολίας, της διάρθρωσης και του περιεχομένου των παραδειγμάτων των κριτηρίων αξιολόγησης που περιλαμβάνονται στο τεύχος αυτό θα γίνει μετά την δοκιμαστική εφαρμογή τους. Εξυπακούεται ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα να προσαρμόσουν τα παραδείγματα στις ιδιαίτερες συνθήκες που επικρατούν στις τάξεις τους.

\*\* Οι βαθμολογικές μονάδες είναι ενδεικτικές.

2. Τρεις γωνίες  $x$ ,  $\psi$ ,  $\omega$  είναι διαδοχικές και αποτελούν μια πλήρη γωνία. Αν τα μέτρα τους είναι ανάλογα των αριθμών 2, 3, 5 αντίστοιχως, να βρεθούν τα μέτρα τους σε μοίρες.

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

(4 μονάδες)

1. Ποια γωνία λέγεται οξεία και ποια αμβλεία;

.....  
.....

(2 μονάδες)

1. Ποιες γωνίες λέγονται κατά κορυφήν και ποια σχέση έχουν αυτές μεταξύ τους;

.....  
.....

(2 μονάδες)

1. Μία γωνία  $\varphi$  είναι  $27^\circ$ . Να βρείτε πόσο είναι η συμπληρωματική της και πόσο η παραπληρωματική της.

.....  
.....  
.....

(2 Μονάδες)



## ΜΕΡΟΣ ΙΙ

1. Να βάλετε σε κύκλο το γράμμα της σωστής απάντησης σε κάθε ερώτηση

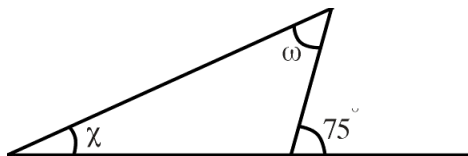
α) Μια γωνία  $\varphi$  είναι  $36^\circ$ . Η παραπληρωματική της είναι:

- A.  $134^\circ$       B.  $124^\circ$       Γ.  $144^\circ$       Δ.  $54^\circ$       E.  $64^\circ$

(1 μονάδα)

β) Στο σχήμα η γωνία  $\omega$  είναι διπλάσια από τη γωνία  $x$ . Η γωνία  $x$  ισούται με:

- A.  $15^\circ$       B.  $25^\circ$       Γ.  $35^\circ$   
Δ.  $12^\circ$       E.  $45^\circ$



(1 μονάδα)

γ) Αν  $\varphi$  είναι η συμπληρωματική και  $\omega$  η παραπληρωματική μιας γωνίας  $x$ , τότε η γωνία  $(\omega - \varphi)$  είναι:

- A.  $90^\circ$       B.  $100^\circ$       Γ.  $80^\circ$       Δ.  $110^\circ$       E.  $70^\circ$

(1 μονάδα)

δ) Δύο ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  τέμνονται στο σημείο O. Αν μια από τις σχηματιζόμενες γωνίες είναι οξεία τότε οι υπόλοιπες τρεις γωνίες θα είναι:

- A. 2 οξείες και 1 αμβλεία,      B. 1 ορθή και 2 οξείες,  
Γ. 3 οξείες,      Δ. 2 αμβλείες και 1 οξεία  
E. 3 αμβλείες

(1 μονάδα)

ε) Αν η παραπληρωματική μιας γωνίας  $\omega$  είναι τριπλάσια από την συμπληρωματική της, τότε η γωνία  $\omega$  είναι:

- A.  $30^\circ$       B.  $60^\circ$       Γ.  $90^\circ$       Δ.  $120^\circ$       E.  $45^\circ$

(1 μονάδα)

στ) Αν η γωνία  $\omega$  ισούται με την παραπληρωματική της, τότε είναι:

- A.  $30^\circ$       B.  $45^\circ$       Γ.  $60^\circ$       Δ.  $90^\circ$       E.  $120^\circ$

(1 μονάδα)

5.2. 1<sup>ο</sup> ενδεικτικό κριτήριο αξιολόγησης του μαθητή στην Άλγεβρα

Διδακτική Ενότητα: § 1.2 (δυνάμεις) Άλγεβρα Α΄ Λυκείου ΟΕΔΒ 1998

## Α. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΤΗ

1.Όνομα ..... 2. Επώνυμο .....  
3.Όνομα πατέρα ..... 4.Σχολείο .....  
5.Τάξη ..... 6. Τμήμα ..... 7. Ημερομηνία .....  
8. Μάθημα .....

Διάρκεια: 1 διδακτική ώρα

### ΜΕΡΟΣ Ι

1. Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις

α) Αν  $k$  άρτιος αριθμός, να δείξετε ότι:

$$1^k + (-1)^{k+1} + 1^{k+2} + (-1)^{k+3} = 0$$

.....  
.....

(2 μονάδες)

β) Για ποια τιμή του  $k$  η παράσταση  $a^{k+1} \cdot b^{2k}$  γράφεται με μορφή δύναμης βάσης ( $ab$ );

.....  
.....

(2 μονάδες)

2. Από ένα κομμάτι πάγου, κάθε ώρα λιώνει η μισή του ποσότητα.

α) Μετά από πόσες ώρες θα έχει απομείνει το  $\frac{1}{64}$  της αρχικής του ποσότητας;

.....  
.....

(2 μονάδες)

β) Αν μετά από 4 ώρες έχουν απομείνει 100 γραμμάρια πάγου, πόσο ζύγιζε το κομμάτι του πάγου αρχικά (πριν αρχίσει να λιώνει);

.....  
.....

(2 μονάδες)

γ) Πόσο ζύγιζε το κομμάτι του πάγου που απέμεινε, 2 ώρες αφότου άρχισε να λιώνει;

.....  
.....

(2 μονάδες)

### ΜΕΡΟΣ ΙΙ

1. Ελέγξτε αν καθεμιά απ' τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή (Σ) ή λάθος (Λ). Βάλτε σε κύκλο το αντίστοιχο γράμμα, όπως δείχνει το παράδειγμα :

- Για κάθε πραγματικό αριθμό  $a \neq 0$  ισχύει:  $[(-a)^1]^0 = 1$       **Σ**      Λ
- α) Για κάθε πραγματικό αριθμό  $a \neq 0$  ισχύει:  $[(-a)^1]^2 = -1$       Σ      Λ
- β)  $[(-3)^3]^4 = [(-3)^4]^3$       Σ      Λ
- γ) Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι ίσοι, τότε:  
 $\alpha^k = \beta^k$ , για κάθε ακέραιο αριθμό  $k$ .      Σ      Λ
- δ) Αν  $\alpha^k = \beta^k$  και  $\alpha, \beta \neq 0$ , τότε ισχύει πάντα:  $\alpha = \beta$       Σ      Λ
- ε) Αν  $\alpha, \beta \neq 0$ , τότε ισχύει:  $[(\alpha, \beta)^v]^{-1} = [(\beta, \alpha)^{-1}]^v$       Σ      Λ
- στ) Αν  $\alpha, \beta \neq 0$  και  $v$  φυσικός αριθμός, τότε:  $(\frac{\alpha}{\beta})^v = (\frac{\beta}{\alpha})^{-v}$       Σ      Λ
- ζ) Αν  $k$  περιττός αριθμός με  $a \neq 0$  και  $a \neq \pm 1$ , τότε:  $a^k = a^{-k}$       Σ      Λ
- η) Αν  $k$  άρτιος αριθμός και  $a \neq 0$ , τότε:  $-a^k = (-a)^k$       Σ      Λ
- θ) Το γινόμενο  $(0,1 \cdot 10^{-6}) \cdot (0,3 \cdot 10^{13}) \cdot (0,1 \cdot 10^4)$   
 ισούται με τρία δισεκατομύρια      Σ      Λ
- ι) Αν  $(\alpha^k)^2 = (\beta^2)^k$  και  $\alpha\beta \neq 0$ , τότε  $\alpha^2 = \beta^2$       Σ      Λ

(0,4X10 = 4 μονάδες)

Δικαιολογήστε την απάντησή σας στις (δ) και (η) ερωτήσεις με ένα κατάλληλο παράδειγμα για καθεμιά.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(2 μονάδες)

2. Κάθε ισότητα της στήλης (Α) αληθεύει για μία μόνο τιμή του  $k$  που υπάρχει στη στήλη (Β).

Συνδέστε με μια γραμμή κάθε ισότητα της στήλης (Α) με το αντίστοιχο της στήλης (Β).

στήλη (Α) ισότητα	στήλη (Β) τιμή του $k$
$(\alpha^{-2})^{k+1} = \alpha^8$	3
	-3
$(\frac{\alpha}{\beta})^{-k} = 1$	-5
	0

$[(\alpha.\beta)^k]^{-1} = (\beta.\alpha)^3$	5
	- 6
$\alpha^5 (\alpha^{k-2})^{-1} = \alpha^2$	6

(4 μονάδες)

### 5.3 2<sup>ο</sup> ενδεικτικό κριτήριο αξιολόγησης στην Άλγεβρα

## Διδακτική Ενότητα - § 1.2 (δυνάμεις), Άλγεβρα Α΄

### Λυκείου ΟΕΔΒ 1998

Διάρκεια: ολιγόλεπτη

#### A. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΤΗ

- 1.Όνομα .....2. Επώνυμο .....  
 3.Όνομα πατέρα ..... 4.Σχολείο .....  
 5.Τάξη ..... 6. Τμήμα ..... 7. Ημερομηνία .....  
 8. Μάθημα .....

#### B. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Οι απαντήσεις στις ερωτήσεις που ακολουθούν θα γραφούν στο συνημμένο φύλλο απαντήσεων.\*

#### ΜΕΡΟΣ Ι

##### Ερωτήσεις σύντομης απάντησης

1. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α)  $(0,5)^{15} \cdot 5^{-15} \cdot 10^{15}$  (3 μονάδες)

β)  $2^4 \cdot 48 \cdot 3^{-1}$  (3 μονάδες)

γ)  $(\frac{1}{2})^{-1} \cdot 3 \cdot (\frac{1}{6})^2$  (3 μονάδες)

\* Οι απαντήσεις μπορούν να σημειώνονται πάνω στα φυλλάδια των κριτηρίων. Αν όμως ο εκπαιδευτικός επιθυμεί να ξαναχρησιμοποιήσει το φυλλάδιο σε άλλη εξέταση έχει τη δυνατότητα να κάνει χρήση χωριστού φύλλου απαντήσεων. Για το σκοπό αυτό δίνουμε στη συγκεκριμένη περίπτωση ένα υπόδειγμα φύλλου απάντησης.

## ΜΕΡΟΣ ΙΙ

1. Βάλτε σε κύκλο το γράμμα της απάντησης που θεωρείτε σωστή σε κάθε μια από τις παρακάτω ερωτήσεις.

α) Αν  $k$  περιττός ακέραιος αριθμός, τότε η παράσταση  $(\alpha - \beta)^k + (\beta - \alpha)^k$  ισούται με:

A.  $2\alpha^k$ ,    B.  $-2\alpha^k$ ,    Γ. 0,    Δ.  $\alpha^k + \beta^k$ ,    E.  $2\beta^k$

(1 μονάδα)

β) Αν  $k$  άρτιος ακέραιος αριθμός, τότε η τιμή της παράστασης

$1^k + (-1)^{k+1} + 1^{k+2} + (-1)^{k+3}$  είναι:

A. 4,    B. -4,    Γ. 3,    Δ. 0,    E. 2

(1 μονάδα)

γ) Αν  $x = 0,02$  και  $\psi = 0,0001$ , τότε η τιμή της παράστασης  $10^8 \cdot x^2 \cdot \psi$  είναι:

A.  $4 \cdot 10^8$ ,    B. 4,    Γ. 100,    Δ. 8,    E. 10

(1 μονάδα)

δ) Αν ισχύει  $\frac{9^v}{3^{v+1}} = 27$ , τότε η τιμή του φυσικού αριθμού  $v$  είναι:

A. 2,    B. 3,    Γ. 5,    Δ. 4,    E. 9

(1 μονάδα)

ε) Αν ισχύει  $10^{-5a} \cdot 10^{6a} = 10^{1000000}$ , τότε ο  $a$  ισούται με :

A.  $10^3$     B. 1000    Γ. ένα εκατομμύριο    Δ. 20.000    E.  $10^{-8}$

(1 μονάδα)

στ) Να αιτιολογήσετε την επιλογή της απάντησής σας στις ερωτήσεις γ και δ κάνοντας τις πράξεις

.....  
.....

(2X3 =6 μονάδες)

## ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ

### A. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΤΗ.

1. Όνομα.....2. Επώνυμο.....  
3. Όνομα πατέρα.....4. Σχολείο.....  
5. Τάξη.....6. Τμήμα.....7. Ημερομηνία.....  
8. Μάθημα.....

### B. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

## ΜΕΡΟΣ I

### Ερώτηση 1.

α).....  
.....

(Μονάδες 3)

β).....  
.....

(Μονάδες 3)

γ).....  
.....

(Μονάδες 3)

## ΜΕΡΟΣ II

### Ερώτηση 1

- |    |   |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|---|
| α) | A | B | Γ | Δ | E |
| β) | A | B | Γ | Δ | E |
| γ) | A | B | Γ | Δ | E |
| δ) | A | B | Γ | Δ | E |
| ε) | A | B | Γ | Δ | E |

Μονάδες 5 (1 κάθε ερώτηση)

Ερώτηση 2

γ).....

.....

.....

.....

.....

δ).....

.....

.....

.....

Μονάδες 6 (3 για το κάθε υποερώτημα)

**5.4. 3<sup>ο</sup> ενδεικτικό κριτήριο αξιολόγησης του μαθητή στην Άλγεβρα**

**Διδακτική Ενότητα:**

- Διάταξη πραγματικών αριθμών
- Οι ανισώσεις  $ax + \beta > 0$  και  $ax + \beta < 0$

**A. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΤΗ**

- 1.Όνομα ..... 2. Επώνυμο .....
- 3.Όνομα πατέρα ..... 4.Σχολείο .....
- 5.Τάξη ..... 6. Τμήμα ..... 7. Ημερομηνία .....
8. Μάθημα .....

**B. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ**

*Διάρκεια: 1 διδακτική ώρα*

**ΜΕΡΟΣ Ι**

1. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού  $x$  για τις οποίες ισχύει:

$$\frac{2x - 1}{3} + 1 \leq 2 - \frac{3 - 2x}{2}$$

.....  
.....  
.....

2. Τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί έχουν άθροισμα μεγαλύτερο του 12 και μικρότερο του 17. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.

.....  
.....  
.....

(4 μονάδες)



**ΜΕΡΟΣ ΙΙ: ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΤΥΠΟΥ**

1. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $x, \psi$  για τους οποίους ισχύει  $2 < x < \psi$ . Να γράψετε σε μία σειρά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$x^2, \quad (x - 1)^2, \quad \psi^2, \quad (\psi + 1)^2$$

.....  
 .....  
 .....

(3 μονάδες)

2. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, όπως φαίνεται στην πρώτη γραμμή:

Ανισότητα που ικανοποιεί ο πραγματικός αριθμός $x$	Διάστημα στο οποίο ανήκει ο πραγματικός αριθμός $x$
$1 < x \leq 3$	$x \in (1, 3]$
.....	$x \in [2, +\infty)$
$x \leq 8$	.....
.....	$x \in (-3, 2)$
$-1 \leq x \leq 0$	.....
$-5 \leq x < 5$	.....

(0.6X5=3 μονάδες)

3. Ελέγξτε αν καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή ( $\Sigma$ ) ή λανθασμένη ( $\Lambda$ ).

Βάλτε σε κύκλο το αντίστοιχο γράμμα όπως δείχνει το παράδειγμα:

Αν  $x - \psi > 0$ , τότε  $x > \psi$

$\Sigma$       $\Lambda$

α) Αν  $2 < x < \psi$ , τότε  $x\psi > 0$

$\Sigma$       $\Lambda$

β) Αν  $2 < x < \psi$ , τότε  $x\psi - \psi^2 > 0$

$\Sigma$       $\Lambda$

γ) Αν  $x > 1$ , τότε  $x^3 > 1$

$\Sigma$       $\Lambda$

δ) Αν  $x > 1$ , τότε  $x^{-2} > 1$

$\Sigma$       $\Lambda$

ε) Αν  $0 < x < \psi$ , τότε  $\frac{1}{x} < \frac{1}{\psi}$

$\Sigma$       $\Lambda$

στ) Αν  $0 < x < 1$  και  $\kappa > \lambda$  ( $\kappa, \lambda$  φυσικοί),

τότε  $x^\kappa < x^\lambda$

$\Sigma$       $\Lambda$



## 6. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ:

«Κεφάλαιο 2ο – Συναρτήσεις, Άλγεβρα Α΄ Λυκείου, ΟΕΔΒ 1998»

Στις σελίδες που ακολουθούν περιλαμβάνονται συμπληρωματικά παραδείγματα ερωτήσεων όλων των τύπων, τα οποία βασίζονται στο κεφάλαιο των συναρτήσεων του σχολικού βιβλίου της Άλγεβρας. Ο μαθηματικός έχει τη δυνατότητα να επιλέξει από αυτές και από τα θέματα που περιέχονται στο σχολικό βιβλίο ορισμένες ερωτήσεις και προσθέτοντας σ' αυτές και τις δικές του μπορεί να φτιάξει το κριτήριο αξιολόγησης που τον εξυπηρετεί καλύτερα.

Η σύνταξη ενός κριτηρίου αξιολόγησης είναι ευκολότερη, όταν οι ερωτήσεις αντλούνται από οργανωμένη τράπεζα ερωτήσεων γιατί αυτές έχουν εκ των προτέρων ελεγχθεί, έχουν σταθμισθεί και ταξινομηθεί κατά διδακτικούς στόχους και βαθμό δυσκολίας. Η προεργασία αυτή δίνει την ευχέρεια στον εκπαιδευτικό να επιλέξει τα θέματα των εξετάσεων με μεγαλύτερη σιγουριά. Εξυπακούεται ότι μια Τράπεζα Ερωτήσεων πρέπει να εμπλουτίζεται και να ανανεώνεται συνεχώς με νέα δεδομένα και με καινούργιες ερωτήσεις.

Μικρές ατομικές τράπεζες ερωτήσεων μπορούν να εκπονούν και οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί με βάση τις ερωτήσεις, τις ασκήσεις και τα προβλήματα που χρησιμοποιούν καθημερινά στο σχολείο τους. μεγαλύτερων απαιτήσεων τράπεζες ερωτήσεων φτιάχνονται από εκπαιδευτικά ιδρύματα, παιδαγωγικά και ερευνητικά κέντρα.

## ΜΕΡΟΣ Ι

### Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Σε μια κοινότητα όλοι οι καταναλωτές νερού πληρώνουν:

- 500 δρχ. πάγιο κάθε μήνα, ανεξαρτήτως αν καταναλώνουν ή όχι νερό
- Για τα πρώτα 12 κυβικά μέτρα ( $m^3$ ) νερού πληρώνουν 40 δρχ./ $m^3$ .
- Για κάθε  $m^3$  πάνω από τα 12 πληρώνουν 60 δρχ./ $m^3$ .

Να γράψετε μια συνάρτηση  $\psi = f(x)$  που να δίνει το κόστος του νερού σε καθεμιά απ' τις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) Ένας καταναλωτής έλειπε ταξίδι όλο το μήνα.
- β) Ένας καταναλωτής ξόδεψε  $x m^3$  όπου  $x \leq 12$
- γ) Ένας καταναλωτής ξόδεψε  $x m^3$  όπου  $x > 12$

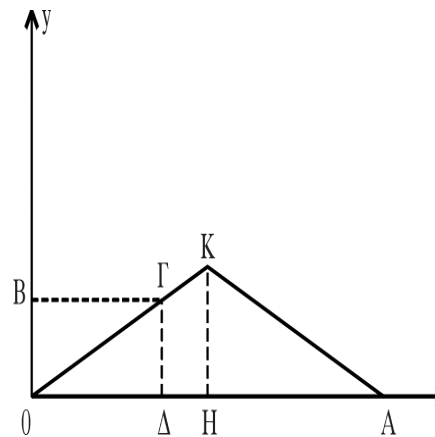
2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \lambda x + 2$ ,  $\lambda < 0$ . Να βρείτε:

- α) Τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες.
- β) Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση και τους άξονες.

- γ) Την τιμή του  $\lambda$ , ώστε το εμβαδόν του παραπάνω τριγώνου να είναι 2 τετραγωνικές μονάδες.
3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - \lambda(x - 3) - 2x + 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι για όλα τα  $\lambda \in \mathbb{R}$  οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων διέρχονται από ένα σταθερό σημείο το οποίο και να προσδιορίσετε.
  4. Η κορυφή  $\Gamma$  ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^3$ . Οι άλλες κορυφές είναι τα σημεία  $A(1, 0)$  και  $B(0, 1)$ . Ποιες είναι οι συντεταγμένες του  $\Gamma$  όταν το  $AB\Gamma$  γίνεται ισοσκελές;
  5. Η συνάρτηση  $f(x)$  έχει πεδίο ορισμού το  $A$ , είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό και  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να εξετάσετε αν η  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο  $A$  και γιατί.
  6. Η συνάρτηση  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και είναι άρτια. Στο  $[a, \beta]$  με  $0 < a < \beta$  είναι γνησίως αύξουσα. Να εξεταστεί η μονοτονία της στο  $[-\beta, -a]$ .
  7. Η συνάρτηση  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$  είναι άρτια.
  8. Η συνάρτηση  $f(x) = -3x + 4$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = [-1, 2]$ . Να βρείτε τα ακρότατα της  $f$ .
  9. Να αποδείξετε ότι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση δεν μπορεί να είναι άρτια.
  10. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε ένα το πολύ σημείο.
  11. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f(x) = x^3 - x$  και  $g(x) = x^2 - 1$ .
  12. Δύο ευθείες με εξισώσεις  $\varepsilon_1: x = x_0$  όπου  $x_0 > 0$  και  $\varepsilon_2: \psi = \psi_0$  όπου  $\psi_0 > 0$  κινούνται παράλληλα προς τους άξονες  $\psi'\psi$  και  $x'x$  αντίστοιχα, έτσι ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τις ευθείες και τους άξονες να έχει εμβαδόν 5 τετραγωνικές μονάδες. Πάνω σε ποια γραμμή κινείται το σημείο τομής των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ ;

13. Εξετάστε αν υπάρχει συνάρτηση που να είναι συγχρόνως άρτια και περιττή. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
14. Αν η συνάρτηση  $f(x)$  είναι περιττή με πεδίο ορισμού  $A$ , να εξεταστεί αν η συνάρτηση  $g(x) = |f(x)|$  είναι άρτια στο  $A$ .
15. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης που είναι ορισμένη στο  $(-a, a)$ ,  $a > 0$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

15. Ένας αρχιτέκτονας σχεδιάζοντας τη τριγωνική στέγη μιας οικοδομής, όπως δείχνει το σχήμα, άφησε μια τρύπα  $\Gamma$  σε ύψος  $\Gamma\Delta = 1,5$  m από τη βάση της στέγης, προκειμένου να περάσει το καλώδιο τηλεόρασης. Η στέγη είναι ισοσκελές τρίγωνο με βάση  $OA = 10$  m και ύψος  $KH = 2$  m. Θεωρώντας το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  $xOy$  να βρείτε:
- Την εξίσωση της ευθείας  $OK$ .
  - Το μήκος του οριζόντιου καλωδίου  $B\Gamma$ .



## ΜΕΡΟΣ ΙΙ

### Ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου

Α. Ερωτήσεις τύπου «σωστό-λάθος»

ΟΔΗΓΙΕΣ: Κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή ή λάθος. Αν η πρόταση είναι σωστή, κυκλώστε το γράμμα Σ, αν είναι λάθος κυκλώστε το Λ. Η πρώτη πρόταση έχει απαντηθεί για παράδειγμα.

Π.χ.: Ο αριθμός 12 είναι φυσικός

⊙ Σ

Λ

1.  $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\} = \left\{x/x = \frac{1}{v}, v \in \mathbb{N}^*\right\}$ .

Σ

Λ

2. Ο τύπος  $f(x) = \sqrt{1+4x^2}$  ορίζει συνάρτηση

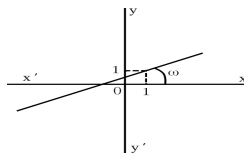
Σ

Λ

3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της  $\varepsilon$  είναι  $\omega$ .

Σ

Λ



4. Οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  με εξισώσεις  $\psi = -3x + 4$  και  $\psi = -3x + 5$  αντίστοιχα είναι κάθετες.

Σ

Λ

5. Το πεδίο ορισμού της  $f(x) = \frac{x}{x^2+x}$  είναι το  $\mathbb{R}$ .

Σ

Λ

6. Το σύνολο τιμών της  $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ ,  $x \neq 3$  είναι  $\{-1, 1\}$ .

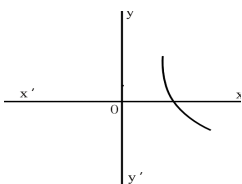
Σ

Λ

7. Στο σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης.

Σ

Λ



8. Αν η περιττή συνάρτηση  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , τότε  $f(0) = 0$ .

Σ

Λ

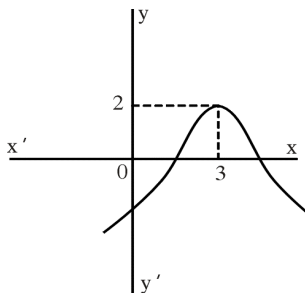
9. Το κενό σύνολο συμβολίζεται:  $\{0\}$ . Σ    Λ

10. Η συνάρτηση  $f(x) = |x - 3| + 2$  έχει ελάχιστο. Σ    Λ

11. Αν  $f(x) = x^2 - 4x + 7$  τότε  $f(3x) = 9x^2 - 12x + 7$ . Σ    Λ

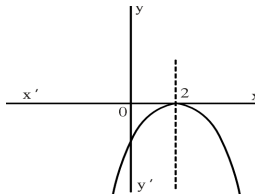
12. Μία συνάρτηση  $f: A \rightarrow B$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}$  και  $B \subseteq \mathbb{R}$   
λέγεται πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής. Σ    Λ

13. Στο σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας  
συνάρτησης που έχει μέγιστο το 3. Σ    Λ



14. Τα σημεία A (α, β) και B (-α, -β) του καρτεσιανού επιπέδου είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Σ Λ

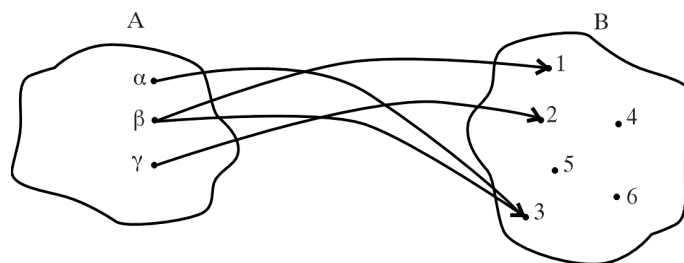
15. Η συνάρτηση g της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα είναι άρτια. Σ Λ



16. Ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων λέγεται ορθοκανονικό, αν οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος. Σ Λ

17. Έχουμε τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ . Όταν ο x τείνει προς το  $+\infty$ , τότε f(x) τείνει στο 0. Σ Λ

18. Το σχήμα παριστάνει συνάρτηση. Σ Λ



19. Η συνάρτηση  $f(x) = -3x^4 + 5x^2 + 4$  είναι άρτια. Σ Λ

20. Η συνάρτηση  $g(x) = -5x^7 + x^3$  είναι περιττή. Σ Λ

**B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής**

1. Βάλτε σε κύκλο το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.  
 Ποιος Μαθηματικός είναι ο θεμελιωτής της θεωρίας συνόλων;  
 Α. Καντόρ Β. Νεύτωνας Γ. Ευκλείδης Δ. Αρχιμήδης  
 Ε. Πυθαγόρας



2. Η τομή των συνόλων  $K = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  και  $\Lambda = \{\beta, \gamma, \delta\}$  είναι:  
 Α.  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  Β.  $\{\alpha\}$  Γ.  $\{\delta\}$  Δ.  $\{\beta, \gamma\}$   
 Ε.  $\{\beta, \gamma, \delta\}$
3. Αν  $K = \{0, 3, 5\}$ ,  $\Lambda = \{0\}$ ,  $M = \{3, 5\}$ ,  $N = \{5, 3\}$  τότε είναι:  
 Α.  $K \subseteq \Lambda$  Β.  $\Lambda \subseteq M$  Γ.  $M \subseteq \Lambda$  Δ.  $N \subset K$   
 Ε.  $N \subseteq \Lambda$
4. Αν Α και Β δύο σύνολα το  $A \cup B$  συμβολίζει:  
 Α. την τομή των συνόλων  
 Β. το συμπληρωματικό του Α  
 Γ. το βασικό σύνολο  
 Δ. το συμπληρωματικό του Β  
 Ε. την ένωση των συνόλων
5. Η απόσταση (ΑΒ) των σημείων Α (- 5, 7) και Β (3, 7) είναι:  
 Α. 10 Β.  $\sqrt{12}$  Γ. 8 Δ. - 11 Ε. 14
6. Αν για τη συνάρτηση  $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f(\sqrt{2}) = 6$ , τότε το  $f(-\sqrt{2})$  ισούται με:  
 Α. -1 Β.  $\sqrt{2}$  Γ. 0 Δ. 5 Ε. 6
7. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας:  
 Α.  $x'x$  Β.  $y'y$  Γ. Την ευθεία  $y = -x$   
 Δ. Την ευθεία  $y = x$  Ε. Την ευθεία  $y = 2$
8. Η ευθεία  $x = 5$  έχει συντελεστή διεύθυνσης:  
 Α. 0 Β. 5 Γ. 1 Δ. 0,5 Ε. Δεν ορίζεται
9. Η ευθεία  $\epsilon$  έχει εξίσωση  $y = 5x + 4$ . Ποια από τις παρακάτω ευθείες είναι παράλληλη της  $\epsilon$ ;  
 Α.  $y = -5x + 4$  Β.  $y = \frac{1}{5}x + 4$  Γ.  $y = \frac{5}{4}x + 3$  Δ.  $y = -\frac{1}{5}x + 2$   
 Ε.  $y = 5x + 7$
10. Η γραφική παράσταση της  $f(x) = -\frac{3}{x}$  έχει ασύμπτωτες συγχρόνως:  
 Α. Τους ημιάξονες  $0x, 0y, 0x', 0y'$  Β. Τους ημιάξονες  $0x', 0y'$   
 Γ. Τους ημιάξονες  $0x, 0x'$  Δ. Τους ημιάξονες  $0x, 0y$   
 Ε. Τους ημιάξονες  $0y, 0y'$

11. Η συνάρτηση  $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$  έχει πεδίο ορισμού:

A.  $[1, +\infty)$

B.  $(1, +\infty)$

Γ.  $\mathbb{R}$

Δ.  $(-\infty, 1)$

E.  $(-\infty, 1]$

12. Ο πίνακας τιμών

x	-1	2	3	-2
ψ	-2	1	6	1

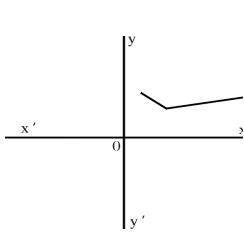
αντιστοιχεί στη συνάρτηση:

A.  $y = 2x$     B.  $y = x + 3$     Γ.  $y = x^2 - 3$     Δ.  $y = x - 1$     E.  $y = -x - 3$

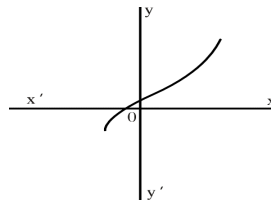
13. Μία άρτια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  στο  $x_0 = 2$  έχει μέγιστο το  $f(2) = 5$ . Η τιμή της  $f$  στο  $-2$  είναι:

A. 4    B. -2    Γ. 5    Δ. -1    E. 2

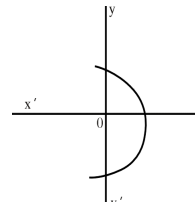
14. Ποια από τις παρακάτω γραμμές **δεν** αντιστοιχεί σε γραφική παράσταση συνάρτησης:



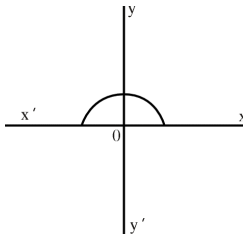
A



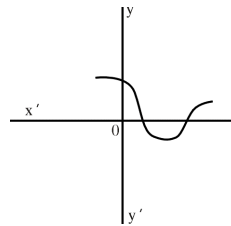
B



Γ



Δ



E.

A

B

Γ

Δ

E

15. Ποιας από τις παρακάτω συναρτήσεις η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(1/2, 1/4)$  :

A.  $y = x^2$     B.  $y = \frac{1}{2}x^2$     Γ.  $y = -2x^2$     Δ.  $y = \frac{1}{3}x^2$

E.  $y = 1/5 x^2$

16. Το σημείο  $(-5, 2)$  είναι συμμετρικό του σημείου  $(5, -2)$  ως προς:

A. τον άξονα  $x'$     B. Τον άξονα  $y'$   
 Γ. Την αρχή των αξόνων    Δ. Την ευθεία  $y = x$   
 E. Την ευθεία  $y = -x$

17. Αν οι ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  με εξισώσεις  $y = \alpha_1 x + \beta_1$  και  $y = \alpha_2 x + \beta_2$  αντίστοιχα είναι κάθετες, τότε ισχύει:

A.  $\alpha_1 = \alpha_2$     B.  $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_2}$     Γ.  $\alpha_1 \alpha_2 = -1$     Δ.  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$

E.  $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$

18. Τα σημεία A (2, 1), B (-2, 1), Γ (-2, -1), Δ (2, -1) αποτελούν κορυφές:

A. Παραλληλογράμμου    B. Ορθογωνίου    Γ. Τετραγώνου

Δ. Ρόμβου    E. Τυχαίου τετραπλεύρου

19. Η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + (\alpha - 1)x^2 + x + \alpha\beta + 1$  γίνεται περιττή αν:

A.  $\alpha = 2, \beta = -1$     B.  $\alpha = -1, \beta = 0$     Γ.  $\alpha = 1, \beta = -1$

Δ.  $\alpha = -2, \beta = 1$     E.  $\alpha = 0, \beta = 1$

20. Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{-\lambda x^2 + 4}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  αν:

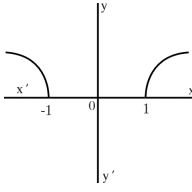
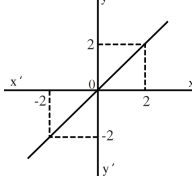
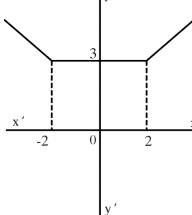
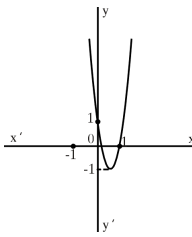
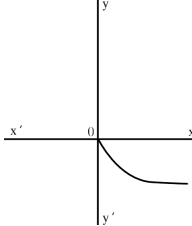
A.  $\lambda \leq 0$     B.  $\lambda = 1$     Γ.  $\lambda > 2$     Δ.  $\lambda = 4$

E.  $\lambda > 3$

## Γ. Ερωτήσεις αντιστοίχισης

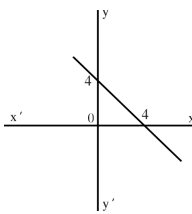
Παράδειγμα 1

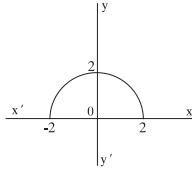
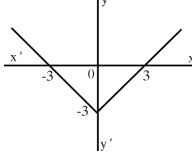
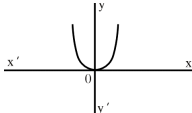
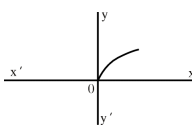
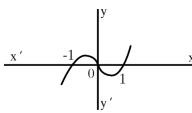
Κάθε σύνολο τιμών της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται σε μία μόνο γραφική παράσταση της στήλης (Β). Συνδέστε με μία γραμμή τα αντίστοιχα στοιχεία.

στήλη (Α) σύνολα τιμών	στήλη (Β) γραφικές παραστάσεις
$[0, +\infty)$	
$[3, +\infty)$	
$[-1, +\infty)$	
$(-\infty, +\infty)$	
	

Παράδειγμα 2

Κάθε τύπος συνάρτησης της στήλης (Α) αντιστοιχίζεται με μια μόνο γραφική παράσταση της στήλης (Β). Συνδέστε με μια γραμμή τα αντίστοιχα στοιχεία.

στήλη (Α) τύπος συνάρτησης	στήλη (Β) γραφικές παραστάσεις
$f(x) = \sqrt{x}$	

$g(x) = 4 - x$  $h(x) = x^3 - x$  $\varphi(x) = \sqrt{4 - x^2}$	        
---	---

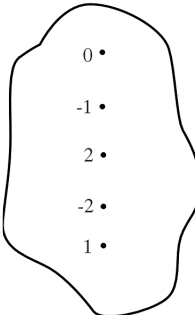
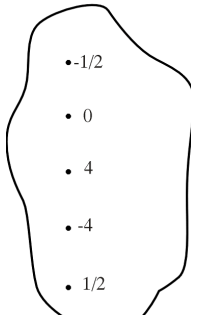
Παράδειγμα 3

Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης (A) με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (B)

στήλη (A)	στήλη (B)
Q	Το σύνολο των ακεραίων αριθμών
N	Το σύνολο των φυσικών αριθμών
R	Το σύνολο των ρητών αριθμών
Z	Το σύνολο των πραγματικών αριθμών
	Το σύνολο των άρτιων αριθμών
	Το σύνολο των περιττών αριθμών

Παράδειγμα 4

Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  και σύνολο τιμών  $f(A)$  είναι γνησίως φθίνουσα. Να κάνετε την αντιστοίχιση.

στήλη (A)	στήλη (B)
<p style="text-align: center;">A</p> 	<p style="text-align: center;"><math>f(A)</math></p> 

## Δ. Ερωτήσεις διάταξης

1. Οι συναρτήσεις  $f(x) = x$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}x$ ,  $h(x) = 2x$ ,  $\varphi(x) = 3x$ ,  $\rho(x) = 5x$ ,  $t(x) = 7x$  έχουν κοινό πεδίο ορισμού το  $A = [-3, 3]$ . Να γράψετε τις συναρτήσεις σε μια σειρά έτσι ώστε η γραφική παράσταση καθεμιάς να έχει μικρότερο μήκος από τη γραφική παράσταση της επόμενης της.
2. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ ,  $h(x) = 2x^2$ ,  $t(x) = 3x^2$ ,  $\varphi(x) = \frac{1}{4}x^2$ . Η ευθεία  $y = 4$  με τη γραφική παράσταση καθεμιάς από τις συναρτήσεις ορίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα. Να γράψετε σε σειρά τις συναρτήσεις αναλόγως του μήκους του ευθυγράμμου τμήματος αυτού από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.
3. Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxy$  έχουμε τα σημεία:  $A(1, 2)$ ,  $B(-2, 2)$ ,  $\Gamma(3, 4)$ ,  $\Delta(-3, 5)$ ,  $E(5, 1)$ . Να διατάξετε με βάση το μήκος τους, από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα ευθύγραμμα τμήματα  $OA$ ,  $OB$ ,  $O\Gamma$ ,  $O\Delta$ ,  $OE$ .

4. Αν  $f(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{αν } x < 0 \\ x-1, & \text{αν } 0 \leq x < 4 \\ 3, & \text{αν } x \geq 4 \end{cases}$

να διαταχθούν από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη οι τιμές:

$$f(3), \quad f(0), \quad f(-1), \quad f(5), \quad f(-2), \quad f\left(\frac{1}{2}\right), \quad f(1).$$



### Ε. Ερωτήσεις συμπλήρωσης

Να συμπληρωθούν κατάλληλα τα κενά που υπάρχουν στις παρακάτω προτάσεις:

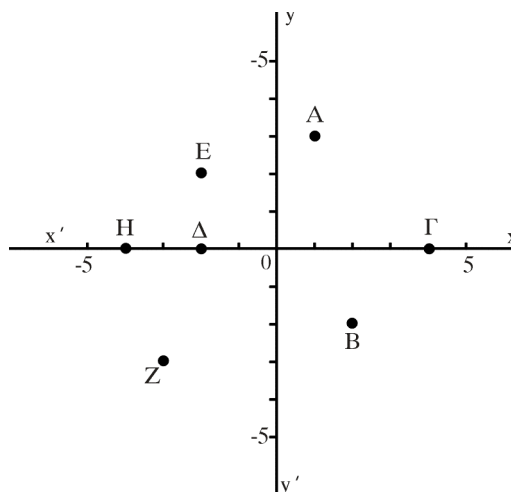
- Τα παρακάτω σημεία ανήκουν στη γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης. Να συμπληρώσετε τους αριθμούς που λείπουν:

$$(-1, 2), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (\dots, 2), (\dots, 4), (3, \dots), (-3, 18), (\sqrt{2}, 4), (1/2, \dots)$$

- Η συνάρτηση  $f(x) = -3x + 2$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και για οποιουσδήποτε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$  τότε  $-3x_1 \dots -3x_2$  ή  $-3x_1 + 2 \dots -3x_2 + 2$  ή  $f(\dots) > f(\dots)$ . Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

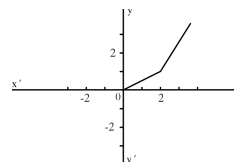
- Να ενώσετε τα κατάλληλα σημεία, ώστε να προκύψει η γραφική παράσταση της  $f(x)$ .

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -2 \\ -x, & -2 \leq x < 2 \\ x-4, & x \geq 2 \end{cases}$$



- Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  λέγεται περιττή, αν για κάθε  $\dots \in A$  ισχύει  $\dots \in A$  και  $f(\dots) = -f(\dots)$ .
- Η συνάρτηση  $f$  έχει ελάχιστο στο  $x_0 \in A$ , όταν:  $f(x) \dots f(x_0)$ , για κάθε  $\dots \in A$ . Η τιμή  $\dots$  λέγεται ..... της  $f$  στο  $x_0$ .

- Μία συνάρτηση είναι περιττή και έχει πεδίο ορισμού το διάστημα  $[-3, 3]$ . Να συμπληρώσετε στο σχήμα τη γραφική της παράσταση.



- Αν  $f(x) = 2x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  να συμπληρώσετε τις ισότητες:
  - $f(-3) = \dots$
  - $f(\alpha) = \dots$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$
  - $f(3x) = \dots$
  - $f(x^2) = \dots$

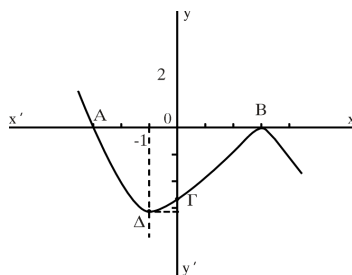
8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -(x - 3)^2(x + 3)$   
 και η γραφική της παράσταση. Να συμπληρώσετε  
 τις συντεταγμένες που λείπουν των σημείων.

A (... , 0)

B (... , 0)

Γ (0, ...)

Δ (-1, ...)



9. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x < -2 \\ 4, & -2 \leq x < 1 \\ 3-x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α)  $f(-3) = \dots$

β)  $f(-2) = \dots$

γ)  $f(0) = \dots$

δ)  $f(1) = \dots$

10. Να συμπληρώσετε το πεδίο ορισμού Α των συναρτήσεων:

α)  $f(x) = \sqrt{-x+2}$                       Α = .....

β)  $g(x) = \sqrt{2-|x|}$                       Α = .....

γ)  $h(x) = \frac{3x+1}{-x^2+2}$                       Α = .....

δ)  $f(x) = \frac{x^2-2x+5}{(1-x)(2x+3)}$                       Α = .....

11. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 2 \\ -2x-5, & x \geq 2 \end{cases}$$

Να συμπληρώσετε τον τύπο της συνάρτησης g (x) με:

$$g(x) = f(x+1) = \begin{cases} \dots, & x < -3 \\ \dots, & x \geq -3 \end{cases}$$

## 7. ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΜΑΘΗΤΩΝ

### 7.1 Εργασίες για το σπίτι

Οι μαθηματικοί αναθέτουν, σχεδόν σε καθημερινή βάση, εργασίες στους μαθητές τους για να τους συνηθίσουν να εργάζονται αυτοτελώς, χωρίς να έχουν ανάγκη συνεχούς καθοδήγησης και βοήθειας από τον καθηγητή τους.

Οι εργασίες αυτές δίνονται :

- για την εμπέδωση της ύλης που περιλαμβάνει το μάθημα της ημέρας
- για την άσκηση των μαθητών σε εφαρμογές,
- για την επέκταση της ύλης και την εμβάθυνση σ' αυτήν.

Οι παραπάνω εργασίες είναι συνήθως ασκήσεις και προβλήματα, τα οποία διαφέρουν, λίγο ή πολύ, από εκείνα που λύθηκαν μέσα στη σχολική αίθουσα, βασίζονται όμως στις γνώσεις που απέκτησε ο μαθητής στο σχολείο.

Η ύλη, στην οποία αναφέρονται οι εργασίες αυτές μπορεί να είναι μια μικρή διδακτική ενότητα (το μάθημα της ημέρας π.χ.) ή ένα ολόκληρο κεφάλαιο, αν πρόκειται για εργασίες ανακεφαλαίωσης ή επανάληψης.

Επειδή οι εργασίες στο σπίτι συνυπολογίζονται για την βαθμολογία των τριμήνων (σύμφωνα με την ισχύουσα νομοθεσία), πρέπει να ελέγχονται από το διδάσκοντα σε τακτά χρονικά διαστήματα.

### 7.2 Συνθετικές- Δημιουργικές Εργασίες

Οι Συνθετικές - Δημιουργικές Εργασίες αποβλέπουν:

- στην ανάπτυξη της συνθετικής - δημιουργικής ικανότητας των μαθητών,
- στην προώθηση των ειδικών κλίσεων και ενδιαφερόντων τους, και
- στη γενική μόρφωση και καλλιέργεια των εκπαιδευόμενων.

Οι εργασίες αυτές μπορεί να συμβάλουν στο να αναδειχτεί ο ανθρώπινος χαρακτήρας των Μαθηματικών και στο να τονιστεί η σχέση τους με τις Φυσικές Επιστήμες, την Ιστορία, τη Φύση, τη Μουσική, την Τέχνη, την Τεχνολογία, το περιβάλλον, την κοινωνία κτλ., εφόσον βέβαια επιλέγονται θέματα που δίνουν στο μαθητή τη δυνατότητα να διερευνήσει τη διασύνδεση της Μαθηματικής Επιστήμης με άλλες Επιστήμες ή δραστηριότητες του Ανθρώπου.

Οι συνθετικές-δημιουργικές εργασίες δίνουν επίσης τη δυνατότητα να προσεγγίσουμε τα Μαθηματικά ως ένα αναπόσπαστο τμήμα της ευρύτερης επιστημονικής, πολιτιστικής και κοινωνικής πραγματικότητας. Αυτή η προσέγγιση θα οδηγήσει και στην αλλαγή νοοτροπίας και στάσης και των μαθητών και των διδασκόντων απέναντι στα ίδια τα Μαθηματικά και στη διδασκαλία τους.

Στη συνέχεια αναφέρονται μερικοί ενδεικτικοί τίτλοι συνθετικών -δημιουργικών εργασιών στα Μαθηματικά ως απλά παραδείγματα. Ο κάθε διδάσκων μπορεί να βρει πολλά άλλα.

*Ενδεικτικοί τίτλοι συνθετικών- δημιουργικών εργασιών.*

- Ιστορία και γραφή των αριθμών (από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα).
- Η μαθηματική συνάρτηση στην καθημερινή ζωή.
- Η συμμετρία στη Φύση και στην Τέχνη.

- Κατασκευές από χαρτί και άλλα υλικά που αποδεικνύουν αλγεβρικές ταυτότητες ή γεωμετρικά θεωρήματα.
- Ταξιδεύοντας με το Θαλή στην Αίγυπτο.
- Μαθηματικά μέσα από σκίτσα.
- Ο Πυθαγόρας και η Σχολή του.
- Κανόνας και διαβήτης. Γιατί τόση επιμονή;
- Στατιστική έρευνα: Μαθητές και τηλεοπτικά προγράμματα.
- Υπατία ή η γυναίκα και τα Μαθηματικά στην αρχαιότητα.
- Μαθηματικά και συμβολαιογράφοι .
- Τα όμοια τρίγωνα σε πρακτικές εφαρμογές.
- Μαθηματικά προβλήματα που αναφέρονται σε ιστορικά πρόσωπα ή γεγονότα.
- Τα άλυτα προβλήματα των Μαθηματικών και η ιστορία τους.
- Κλίμακες. Μεγέθυνση και σμίκρυνση στο σχέδιο και τη φωτογραφία.
- Αναζητώντας Μαθηματικά στα μη μαθηματικά βιβλία.
- Τράπεζες και μαθηματικά. Από το δανεισμό μέχρι την εξόφληση.
- Δυο αιώνιοι αντίπαλοι. Ρητοί και άρρητοι αριθμοί.
- Γεωμετρία. Να τη λέμε Θεωρητική ή Ευκλείδεια; - Άλλες Γεωμετρίες.
- Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές και τα Μαθηματικά.
- Τα «αστέρια» της Βεργίνας και η Γεωμετρία τους.
- Ο χάρτης της γειτονιάς μου υπό κλίμακα.

**ΑΛΓΕΒΡΑ - ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο**  
Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

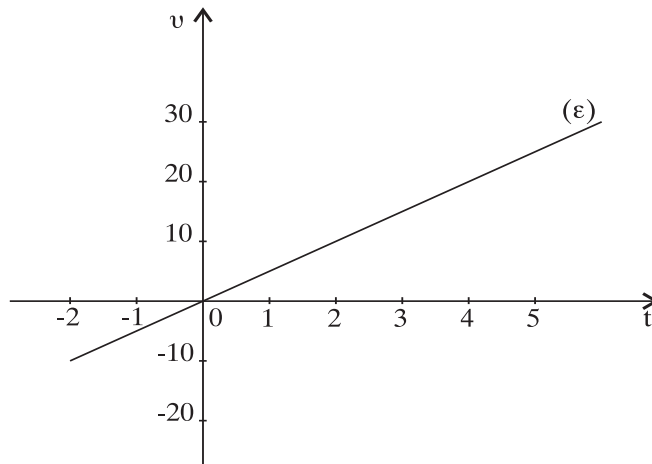


• **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ**

1. Δίνεται η εξίσωση  $2y + x = 7$ .
  - α) Να δείξετε ότι το ζεύγος  $(-1, 4)$  είναι λύση αυτής της εξίσωσης.
  - β) Αν  $x = 5$  να βρείτε  $y = \dots\dots$  ώστε το ζεύγος  $(5, y)$  να είναι λύση της εξίσωσης.
  - γ) Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις λύσεις της εξίσωσης  $2y + x = 7$ .
2. Δίνεται η εξίσωση  $5x + y = 6$ .

Αποδείξτε ότι το ζεύγος  $(x = \kappa, y = 6 - 5\kappa)$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$  επαληθεύει την εξίσωση.
3. Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων να σχεδιαστούν οι ευθείες που έχουν εξισώσεις τις:
  - α)  $x = 2$
  - β)  $y = 4$
  - γ)  $y = -\frac{1}{2}$
  - δ)  $x = y$
4. Όπως γνωρίζουμε, η εξίσωση  $ax + by = \gamma$ , όπου  $a \neq 0$  ή  $b \neq 0$  παριστάνει ευθεία. Η εξίσωση  $\kappa x + (\kappa + 1)y = 10$  παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του  $\kappa$ . Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
5. Δίνεται η εξίσωση  $8x + 2y = 7$  (1)
  - α) Να γραφεί μια άλλη εξίσωση που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την εξίσωση (1).
  - β) Να γραφεί μια άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1).
6. Δίνεται η ευθεία  $\epsilon$  με εξίσωση:  $3x - 4y = 5$ .
  - α) Να γραφεί η εξίσωση ευθείας  $\epsilon_2$  που να ταυτίζεται με την  $\epsilon$ .
  - β) Να γραφεί η εξίσωση ευθείας  $\epsilon_1$  παράλληλης προς την  $\epsilon$ .
7. Δίνεται η εξίσωση
$$v = 5t$$
όπου  $v$  η ταχύτητα ενός κινητού,  $t$  ο αντίστοιχος χρόνος κίνησης και  $5 \text{ (m/sec}^2\text{)}$  η επιτάχυνση.





- α) Η ευθεία  $\epsilon$  του παραπάνω σχήματος παριστάνει γραφικά τις λύσεις της εξίσωσης  $v = 5t$ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- β) Πόση θα είναι η ταχύτητα του κινητού σε 4 sec από την εκκίνησή του;
- γ) Εάν μετά από τα 4 sec το κινητό διατηρήσει την ταχύτητά του σταθερή:
- ποια εξίσωση θα δίνει την ταχύτητά του;
  - να παρασταθούν γραφικά οι λύσεις αυτής της εξίσωσης στο παραπάνω σχήμα.
8. Οι  $x, y, \lambda$  είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει:  $x = 2 - 3\lambda$  και  $y = 5 + 2\lambda$ .
- Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα  $x$  και  $y$ .
  - Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, πού βρίσκονται τα ζεύγη  $(x, y)$  που επαληθεύουν την παραπάνω σχέση;
  - Να γίνει γραφική παράσταση των ζευγών αυτών σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στη συνέχεια παρατίθεται μια μεγάλη σειρά ερωτήσεων (ερωτ. 9-17) πάνω στη λύση των συστημάτων δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους, που είναι διαβαθμισμένες από την απλούστερη στη συνθετότερη, έτσι ώστε ο διδάσκων να έχει τη δυνατότητα επιλογής σύμφωνα πάντοτε με τους στόχους της διδασκαλίας του.

9. Να λυθούν τα συστήματα:

α)  $x = 2$

$$2x - 3y + 7 = 0$$

β)  $-3x - 7y + 13 = 0$

$$y = 2$$

γ) i)  $x + y = 12$

$$x - y = 4$$

ii)  $x + y = 2,3$

$$x - y = 2,7$$

δ) i)  $y + 2 = 5$

$$3x - y = 9$$

ii)  $x - y = 0$

$$2x + 3y = 15$$

ε) i)  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0$

ii)  $2x + 3y = 0$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{7} = 0 \quad 2x - 5y = 0$$

$$\text{στ) i) } 3x + 2y = 5 \quad \text{ii) } 4x + 9y = -13$$

$$7x + 5y = 12 \quad 6x + 3y = -9$$

$$\text{ζ) i) } y = 2x + 5 \quad \text{ii) } y = 3x + 5$$

$$y = -2x + 1 \quad y = 2x$$

$$\text{η) i) } \frac{x}{y} = 6 \quad \text{ii) } \frac{x}{y} = 16$$

$$\frac{x}{6} = 5 \quad x + y = 51$$

**10. Να λυθούν με τη μέθοδο της αντικατάστασης τα συστήματα:**

[ Προτείνεται η μέθοδος της αντικατάστασης επειδή τα συστήματα (i) και (ii) της άσκησης α) έχουν εξισώσεις λυμένες ως προς τον έναν άγνωστο, στοιχείο που πρέπει ο μαθητής να παρατηρήσει και να αντιληφθεί έτσι ώστε συνειδητά να επιλέγει τη συγκεκριμένη μέθοδο σε ανάλογες περιπτώσεις ].

$$\text{α) i) } x = 3y - 2 \quad \text{ii) } 4x - 5y = 13$$

$$3x - 5y = 13 \quad y = \frac{1}{2}x + 3,4$$

$$\text{β) i) } x + 5y = 18 \quad \text{ii) } 4x - 7y = 24$$

$$2x + 7y = 13 \quad 3x - y = -5$$

**11. Να λυθούν με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών τα συστήματα:**

[ Προτείνεται η μέθοδος των αντίθετων συντελεστών επειδή π.χ. στην άσκηση α (i) οι συντελεστές του x είναι αντίθετοι. Το στοιχείο αυτό θα πρέπει να παρατηρήσει και να αντιληφθεί ο μαθητής, έτσι ώστε συνειδητά να ακολουθεί τα βήματα της συγκεκριμένης μεθόδου ].

$$\text{α) i) } 3x - 4y = 17 \quad \text{ii) } 5x - 7y - 47 = 0$$

$$-3x + 8y = 37 \quad 2x + 7y - 16 = 0$$

$$\text{β) i) } 2x - 6y = 35 \quad \text{ii) } 0,5x + 0,2y = 16$$

$$-4x + 3y = 11 \quad 1,5x + 0,5y = 23$$

**12. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα με όποια μέθοδο θέλετε:**

$$\text{α) i) } 5x - y = 13 \quad \text{ii) } 7x - 4y = 102$$

$$-2x + 3y = 28 \quad 5x + 4y = 42$$

$$\text{β) i) } 7x - 4y = 23,7 \quad \text{ii) } 5,5x - 12y = 44,65$$

$$3x + 5y = 30,3 \quad 11,5x + 7,5y = 18,4$$

$$\text{γ) i) } \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 5 \quad \text{ii) } \frac{3x}{4} - \frac{5x}{3} = 0$$

$$\frac{3x}{2} + \frac{2y}{3} = 22 \quad \frac{x}{10} - \frac{y}{15} = \frac{1}{6}$$

$$\delta) \text{ i) } 4x\sqrt{3} - 5y\sqrt{2} = 8 \quad \text{ii) } \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 2$$

$$x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = 1 \quad \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 5$$

$$\epsilon) \text{ i) } y = 3x - 13 \quad \text{ii) } y = \frac{2}{3}x + 7$$

$$y = 5x - 15 \quad y = \frac{5}{2}x - 12$$

**13.** Στις επόμενες ασκήσεις να γίνουν οι πράξεις, να φέρετε τις εξισώσεις στη μορφή  $ax + by = \gamma$  και στη συνέχεια να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 3(x - 4) + 2(y + 2) = -9 \\ (x - 5) - 4(y - 3) = 26 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} \frac{x-3}{14} = \frac{y-0,5}{5} \\ 3(x-3) - 8(y-0,5) = 1 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} \frac{1}{6}(5x-1) + 0,1(4y-5x) = \frac{1}{4}(3y-8x) - \frac{1}{3}(0,29) \\ \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{5}(3-2y) - \frac{1}{11}(x-8) = 1,38 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} \frac{2x}{3} - 4 + \frac{y}{2} + x = 8 - \frac{3y}{4} + \frac{1}{12} \\ \frac{y}{6} - \frac{x}{2} + 2 = \frac{1}{6} - 2x + 6 \end{cases}$$

$$\epsilon) y = \frac{x}{4}$$

$$0,2(2x+7y) - 1 = \frac{2}{3}(2x-6y+1)$$

**14.** Δίνεται το σύστημα:  $5x + 8y = 91$

$$8x + 5y = 52$$

Προσθέστε κατά μέλη τις εξισώσεις του. Αφαιρέστε κατά μέλη τις εξισώσεις του.

[ Προτείνεται η πρόσθεση και η αφαίρεση κατά μέλη διότι από αυτές προκύπτουν εξισώσεις με ίσους ή αντίθετους συντελεστές για τα  $x$  και  $y$  οπότε είναι πιθανή η απλοποίηση. Η απλοποίηση των παραστάσεων είναι βασικός και μόνιμα επιδιωκόμενος στόχος ].

Στη συνέχεια να λύσετε το σύστημα των δύο νέων εξισώσεων που προέκυψαν.

**15.** Να λύσετε το σύστημα:  $4x - 5y = 27$

$$-3x + 4y = -27$$

(Ξεκινήστε με πρόσθεση κατά μέλη των εξισώσεών του).

16. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των αναλογιών:

$$\alpha) \frac{x}{y} = \frac{8}{5}$$

$$2x + 3y = -9,3$$

$$\beta) \frac{x}{7} = \frac{y}{5}$$

$$x + y = 24$$

$$\gamma) \frac{x}{8} = \frac{y}{3}$$

$$x - y = 20$$

17. Να λύσετε με τη βοήθεια των οριζουσών τα συστήματα:

$$\alpha) x + y = \frac{5}{2}$$

$$x - y = 1$$

$$\beta) -2x + y = 1$$

$$x + 2y = 0$$

$$\gamma) 2x + y = 3$$

$$4x + 2y = 6$$

$$\delta) 10x - 5y = 1$$

$$2x - y = \frac{1}{4}$$

$$\epsilon) 2x - 1 + \frac{1}{3}(3y - 2) + y = 2 \text{στ} \quad 2\alpha + \beta - 7 = 0$$

$$x - 1 + y = 0$$

$$3\alpha - 5\beta = 4$$

$$\zeta) \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{8\alpha - 5\beta}{12} = -\frac{21}{4}$$

$$2\alpha + \frac{\beta}{7} = -9$$

$$\eta) 2(\kappa - 3\nu + 1) = 4\kappa - \nu - 205$$

$$\frac{3}{4}\kappa - \frac{5}{6}(\nu + 1) = \kappa - \frac{3}{5}\nu - 13$$

$$\theta) \frac{x-1}{x-2} + \frac{y+1}{y+3} = 2$$

$$2x - y = 7$$

$$\iota) \frac{\alpha-6}{\beta-1} = 5$$

$$\frac{\alpha-3}{\beta+1} = \frac{3}{2}$$

18. Να προσδιοριστούν οι συντελεστές  $\alpha$  και  $\beta$  στην εξίσωση  $\alpha x + \beta y - 9 = 0$  εάν δοθεί ότι τα ζεύγη  $(1,1)$  και  $(-1, 5)$  είναι λύσεις της εξίσωσης αυτής.

19. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ .

20. Να βρεθεί το σύστημα των εξισώσεων που έχουν γραφικές παραστάσεις τις ευθείες  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  του διπλανού σχήματος. Μετά να βρεθεί το κοινό σημείο των  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ .

21. Να βρεθούν οι σχετικές θέσεις των παρακάτω ευθειών:

$$\epsilon_1: 2x + 3y = 7$$

$$\varepsilon_2: -x + y = 4$$

$$\varepsilon_3: -2x + 2y = 5$$

22. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2^x - \kappa \cdot 3^x + \lambda$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{Z}$ .

$$\text{Να βρεθούν οι } \kappa, \lambda \text{ όταν } f(0) = 0 \text{ και } f(1) = \frac{11}{2}.$$

23. Να λυθεί η εξίσωση:  $|x - 3y + 1| + |2x + y - 5| = 0$

24. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  ώστε τα συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  να είναι συγχρόνως αδύνατα:

$$\Sigma_1: \begin{cases} (\alpha - 1)x - \beta y = 2 \\ \alpha x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma_2: \begin{cases} x + 3y = 1 \\ -x + \alpha y = 2 \end{cases}$$

25. Δίνονται τα συστήματα:

$$\Sigma_1: \begin{cases} (\alpha + 1)x - \beta y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$\Sigma_2: \begin{cases} x + (\beta + 2)y = \alpha^2 + 1 \\ x - (\alpha - 1)y = \beta^3 \end{cases}$$

Δείξτε ότι αν το πρώτο έχει άπειρες λύσεις, τότε το δεύτερο είναι αδύνατο.

26. Δίνεται το σύστημα:

$$2x - 3y = 11 - \lambda$$

$$x + 5y - \lambda = 7, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Αποδείξτε ότι το σύστημα έχει λύση για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό  $\lambda$ .

β) Υπολογίστε τα  $x$  και  $y$ .

γ) Για ποια τιμή του  $\lambda$  η λύση  $(x, y)$  που βρήκατε στο (β) επαληθεύει τη σχέση:  $x + y =$

$$\frac{11}{13}$$

27. Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  με εξισώσεις  $x - y = -1$  και  $\lambda x - y = -1$  αντίστοιχα,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τις σχετικές τους θέσεις για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

β) Να βρείτε το  $\lambda$  για το οποίο τέμνονται κάθετα.

γ) Για το  $\lambda$  που βρήκατε στο (β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ευθείες και τον άξονα  $x'x$ .

28. Η λύση ενός συστήματος με αγνώστους  $x$  και  $y$  είναι:

$$x = 2t, \quad y = 3t - 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

α) Για ποιες τιμές του  $t \in \mathbb{R}$  οι λύσεις του συστήματος είναι θετικοί αριθμοί;

β) Υπάρχει γραμμή και ποια πάνω στην οποία βρίσκονται οι λύσεις του συστήματος;

29. Δίνεται το σύστημα:  $(2\mu - 3)x + y = \mu + 4$   
 $5\mu x - 3y = 3\mu + 2, \mu \in \mathbb{R}$

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την  $(10, t)$  να βρεθεί το  $t \in \mathbb{R}^*$

30. Να βρείτε τις λύσεις του συστήματος  $2x - y = -z$   
 $x + y = 3z + 2$

αν ξέρουμε ότι  $x, y, z$  είναι ακέραιοι και επιπλέον ότι ο  $z$  είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης ακέραιου δια του 3.

31. Τα συστήματα:

$$\Sigma_1: \begin{cases} x = 7 - 2\lambda \\ y = -3 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \Sigma_2: \begin{cases} x = -5 + 4\lambda \\ y = -7 + 3\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$

έχουν κοινή λύση το ζεύγος  $(x_0, y_0)$ .

Να υπολογίσετε τα  $\lambda$  και  $\mu$  και στη συνέχεια να βρείτε τη λύση του συστήματος.

32. Δίνεται το σύστημα  $x + 2y = 5$

$$3x + y = 5$$

$$2x - y = a$$

i) Να οριστεί η τιμή της παραμέτρου  $a$  ώστε οι ευθείες που παριστάνουν οι πιο πάνω εξισώσεις να περνούν από το ίδιο σημείο.

ii) Αν  $a \neq 0$  δείξτε ότι οι παραπάνω ευθείες σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.

33. Για ποιες τιμές των  $x$  και  $y$  η εξίσωση  $x - 2y + 1 + \lambda(x - y) = 0$  αληθεύει για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό  $\lambda$ ;

34. Για ποιες τιμές του φυσικού αριθμού  $k$  το σύστημα:

$$x + ky = 3$$

$$kx + 4y = 6$$

δέχεται μία λύση που είναι ζεύγος φυσικών αριθμών.

35. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους  $x, y$  ισχύει:

$$D_x + D_y = D$$

$$D_x - D_y = 3D$$

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση, να βρεθεί η λύση αυτή.

36. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους  $x, y$  ισχύει:

$$D_x^2 + D_y^2 = 2D_x D_y \text{ και } D \neq 0$$

Αν  $x + y = 6$ , να βρεθούν τα  $x, y$ .

37. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους  $x, y$  ισχύει:

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 4D + 2D_x - 5$$

α) Δείξτε ότι:  $(D - 2)^2 + (D_x - 1)^2 + D_y^2 = 0$ .

β) Να βρεθούν τα  $x, y$ .

38. Ένας φοιτητής ξοδεύει 5.000 δρχ. την ημέρα για φαγητό και ψυχαγωγία. Πόσα χρήματα μπορεί να ξοδέψει για φαγητό και πόσα για ψυχαγωγία;

α) Γράψε μια πιθανή επιλογή του φοιτητή.

β) Αν ξοδέψει για φαγητό 3.000 δρχ. πόσα μπορεί να ξοδέψει για ψυχαγωγία;

.....

- γ) Αν ξοδέψει για ψυχαγωγία 4.000 δρχ. πόσα μπορεί να ξοδέψει για φαγητό;  
 .....
- δ) Το ζεύγος (1500, 3500) είναι μια λύση του προβλήματος;
- ε) Γράψε υπό μορφή ζευγών τρεις ακόμη λύσεις του προβλήματος.
- στ) Αν ξοδέψει για φαγητό  $x$  δρχ. τότε για ψυχαγωγία πόσα μπορεί να ξοδέψει;  $y = \dots\dots$   
 - .....
- ζ) Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να σου δώσει όλες τις λύσεις του προβλήματος;
- η) Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων να παραστήσεις γραφικά τις λύσεις που βρήκες στις ερωτήσεις β, γ, ε.

**39.** Ο Γιάννης είναι 5 χρόνια μικρότερος από τον Κώστα.

Πόσων χρόνων μπορεί να είναι ο καθένας;

- α) Γράψε μια πιθανή απάντηση για την ηλικία του καθενός.
- β) Γράψε δύο ζεύγη αριθμών που να είναι λύσεις του προβλήματος.
- γ) Αν η ηλικία του Γιάννη είναι  $x$  και του Κώστα  $y$  γράψε την εξίσωση που μπορεί να δώσει τις λύσεις του προβλήματος.
- δ) Ποια είναι η μικρότερη ακέραιη τιμή που μπορεί να πάρει ο  $x$ ;
- ε) Ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο  $y$ ;

**40.** Σ' ένα πορτοφόλι υπάρχουν 4200 δρχ. σε πενηντόδραγμα και εκατόδραγμα. Πόσα πενηντόδραγμα και πόσα εκατόδραγμα υπάρχουν στο πορτοφόλι;

- α) Γράψε μια εξίσωση με δύο αγνώστους  $x$  και  $y$  που να λύνει το πρόβλημα.
- β) Το πρόβλημα αυτό έχει μία ή περισσότερες λύσεις; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.
- γ) Είναι δυνατόν ο αριθμός των πενηντόδραμων ( $x$ ) να είναι ίσος με τον αριθμό των εκατόδραμων ( $y$ ); Αν ναι, πόσα θα είναι τα πενηντόδραγμα και πόσα τα εκατόδραγμα; Αν όχι, γιατί;
- δ) Είναι δυνατόν τα εκατόδραγμα να είναι τριπλάσια από τα πενηντόδραγμα; Αν ναι, πόσα θα είναι τα πενηντόδραγμα και πόσα τα εκατόδραγμα; Αν όχι, γιατί;

**41.** Ο Φοίβος ζητάει από το φίλο του τον Πάνο, που είναι φοιτητής του Πολυτεχνείου να του λύσει ένα πρόβλημα. Μεταξύ τους γίνεται ο εξής διάλογος:

Φοίβος - *Όταν ήμουν για διακοπές στην Κρήτη νοίκιασα ένα πετρελαιοκίνητο αυτοκίνητο για πέντε μέρες. Θυμάμαι τους όρους ενοικίασης, 10.000 δρχ. την ημέρα και 50 δρχ. το χιλιόμετρο, αλλά έχω ξεχάσει πόσα χιλιόμετρα έκανα και πόσα χρήματα πλήρωσα συνολικά. Μπορείς να μου τα βρεις;*

Πάνος - *Μ' αυτές τις πληροφορίες που μου δίνεις δεν μπορώ να τα βρω γιατί έχω δύο αγνώστους,  $x$  τα χιλιόμετρα που έκανες και  $y$  τα χρήματα που έδωσες.*

*Μ' αυτούς μπορώ να φτιάξω μια εξίσωση*

$$50000 + 50x = y \quad (1)$$

και από αυτήν μπορώ να σου βρω πολλές πιθανές λύσεις.  
Προσπάθησε να θυμηθείς κάτι ακόμη.

Φοίβος - Θυμήθηκα! Νοικιάζοντας αυτοκίνητο πετρελαιοκίνητο αντί για βενζινοκίνητο πλήρωσα 5.000 δρχ. λιγότερο.

Πάνος - Δεν μου φτάνει αυτό. Ψάξε να βρεις τους όρους ενοικίασης ενός βενζινοκίνητου αυτοκινήτου και θα σου λύσω το πρόβλημα.

Φοίβος - (μετά από τηλεφώνημα στο γραφείο ενοικιάσεων). Λοιπόν, 9.000 δρχ. την ημέρα και 60 δρχ. το χιλιόμετρο για το βενζινοκίνητο.

Πάνος - Με τις νέες πληροφορίες μπορώ να σου φτιάξω άλλη μια εξίσωση:

$$40000 + 60x = y \quad (2)$$

Μ' αυτές τις δύο εξισώσεις μπορώ να λύσω το πρόβλημα.

Ερωτήσεις:

α) Με ποια δεδομένα και πώς έφτιαξε ο Πάνος την εξίσωση (1);

β) Να εξηγήσετε την πρώτη απάντηση του Πάνου.

γ) Να βρείτε δύο λύσεις της εξίσωσης (1).

δ) Με ποια δεδομένα και πώς έφτιαξε ο Πάνος την εξίσωση (2);

ε) Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση (2);

στ) Να βρείτε δύο λύσεις της εξίσωσης (2).

ζ) Να εξηγήσετε την τελευταία φράση του Πάνου:

«Μ' αυτές τις δύο εξισώσεις μπορώ να λύσω το πρόβλημα».

η) Να βρείτε γραφικά τη λύση του προβλήματος.

Υπόδειξη: Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, στον άξονα των τετμημένων, αντιστοιχίστε 1 cm σε 200 km και στον άξονα των τεταγμένων αντιστοιχίστε 1 cm σε 20000 δρχ.

42. Δύο φίλοι Α και Β έχουν άθροισμα ηλικιών 35 χρόνια.

α) Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός;

Αν ναι, ποιες είναι οι ηλικίες τους; Αν όχι, γιατί;

β) Εάν σας έδιναν και ένα δεδομένο ακόμη: «Η διαφορά των ηλικιών των Α και Β είναι 5 χρόνια», πώς θα υπολογίζατε τις ηλικίες αυτές;

43. Σε μια βιοτεχνία επίπλων χρησιμοποιούν δύο τύπους ξύλου: καρυδιά και κασταριά. Η βιοτεχνία διαθέτει ένα απόθεμα 40 m<sup>3</sup> καρυδιάς και 60 m<sup>3</sup> κασταριάς για την κατασκευή γραφείων και βιβλιοθηκών. Οι ποσότητες ξύλου σε m<sup>3</sup> που απαιτούνται για την κατασκευή ενός γραφείου και μιας βιβλιοθήκης είναι οι εξής:

	Καρυδιά m <sup>3</sup>	Κασταριά m <sup>3</sup>
Γραφείο	0,20	0,15
Βιβλιοθήκη	0,10	0,20

Πόσα γραφεία και πόσες βιβλιοθήκες μπορεί να φτιάξει η βιοτεχνία αυτή με το απόθεμα που διαθέτει;



Υπόδειξη: Ονόμασε  $x$  τον αριθμό των γραφείων και  $y$  τον αριθμό των βιβλιοθηκών. Γράψε μια εξίσωση για το απόθεμα της καρδιάς και μια άλλη για το απόθεμα της καστανιάς.

- 44.** Στην οργάνωση μιας εκδρομής ενός Σχολείου της Αθήνας για την Πορταριά του Πηλίου οι μαθητές έθεσαν στον οδηγό τα ερωτήματα: Τι ώρα πρέπει να ξεκινήσουν και πόση είναι η απόσταση Αθήνα-Πήλιο;

Ο οδηγός απάντησε: Εάν πάμε με ταχύτητα  $60 \text{ km/h}$  θα φτάσουμε στις  $13.00'$ . Εάν πάμε με  $80 \text{ km/h}$  θα φτάσουμε στις  $11.00'$ . Μπορείτε να βρείτε την απόσταση Αθήνας-Πορταριάς και την ώρα εκκίνησης του πούλμαν; (χρησιμοποιείστε τον τύπο  $s = v.t$ ).

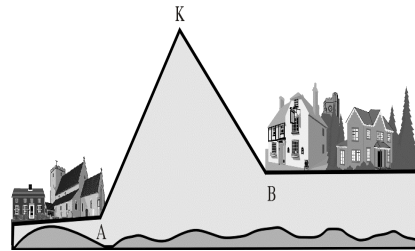
46. Ένας ιδιώτης τοποθετεί ένα ποσό 1.350.000 δρχ. σε τράπεζα χωρίζοντάς το σε δύο μέρη. Το ένα μέρος του ποσού τοκίζεται με επιτόκιο 10% και το δεύτερο με επιτόκιο 8%. Να βρείτε καθένα απ' αυτά τα δύο μέρη αν γνωρίζετε ότι ο συνολικός ετήσιος τόκος είναι 130.500 δρχ.

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ο δρόμος που συνδέει δύο πόλεις A και B, οι οποίες είναι κτισμένες στους πρόποδες ενός λόφου. Ένας οδηγός κινείται σ' αυτό το δρόμο. Όταν ανεβαίνει κρατάει σταθερή ταχύτητα

50 km/h και όταν κατεβαίνει

75 km/h. Για να μεταβεί από την πόλη A στην πόλη B θέλει

16 min και από την πόλη B στην πόλη A 14 min.



α) Να γράψετε συναρτήσεις των αποστάσεων KA και KB το χρόνο των εξής διαδρομών:

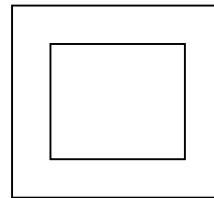
$t_1$  - της ανόδου από το A προς το K,  $t_2$  - της καθόδου από το K προς το B

$t_3$  - της ανόδου από το B προς το K,  $t_4$  - της καθόδου από το K προς το A.

β) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις KA και KB

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον τύπο  $t = s/v$ .

47. Δύο τετράγωνα με κέντρο O βρίσκονται το ένα μέσα στο άλλο. Η διαφορά των περιμέτρων τους είναι ίση με 40 m. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος είναι ίσο με 500 m<sup>2</sup>. Πόσο είναι το εμβαδόν του κάθε τετραγώνου;



48. Ο Μάριος, η Ελένη και ο Νίκος βγαίνουν από ένα φούρνο όπου αγόρασαν κρουασάν και τυρόπιτες. Ένας φίλος τους ρωτάει: «Πόσο κάνει η τυρόπιτα και πόσο το κρουασάν»;

• Μάριος: Πλήρωσα 2.400 δρχ. για 4 κρουασάν και 6 τυρόπιτες.

• Ελένη: Πλήρωσα 1050 δρχ. για 3 κρουασάν και 2 τυρόπιτες.

• Νίκος: Πλήρωσα 1.200 δρχ. για 2 κρουασάν και 3 τυρόπιτες.

α) Με μία μόνο από τις τρεις πληροφορίες μπορεί κανείς να υπολογίσει την τιμή ενός κρουασάν και μιας τυρόπιτας; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Με δύο οποιεσδήποτε από τις τρεις πληροφορίες μπορεί κανείς να υπολογίσει την τιμή ενός κρουασάν και μιας τυρόπιτας; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Υπόδειξη: Να παρατηρήσετε τις τρεις δυνατές περιπτώσεις.

49. Σ' ένα γκαράζ υπάρχουν συνολικά 50 οχήματα, αυτοκίνητα και ποδήλατα. Αν όλα τα οχήματα έχουν 164 ρόδες, πόσα αυτοκίνητα και πόσα ποδήλατα υπάρχουν στο γκαράζ;

- 50.** Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια νωρίτερα, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το  $\frac{1}{8}$  του χρόνου της ζωής του. Αν όμως πέθαινε 9 χρόνια αργότερα και εξακολουθούσε να βασιλεύει, τότε ο χρόνος της βασιλείας του θα ήταν ίσος με το  $\frac{1}{2}$  του χρόνου της ζωής του. Να βρεθεί πόσα χρόνια έζησε ο Μέγας Αλέξανδρος και πόσα βασίλευε.

51. Σ' ένα σύμπλεγμα αγαλμάτων που απεικονίζονται ο Ζήθος, ο αδελφός του Αμφίονας και η μητέρα τους, υπάρχει επιγραφή που δίνει την παρακάτω πληροφορία για την αξία των τριών αγαλμάτων με τα λόγια του Ζήθου:
- «Εγώ, ο αδελφός μου και η μητέρα μου μαζί κοστίσαμε 26 μνας, ενώ εγώ και ο αδελφός μου μαζί 20 μνας. Αν πάρεις το  $\frac{1}{3}$  της δικής μου αξίας και το  $\frac{1}{4}$  της αξίας του Αμφίονα, θα έχεις την αξία του αγάλματος της μητέρας μας». Πόσο κόστισε καθένα από τα τρία αγάλματα;
52. Σε μια κάλπη βρίσκονται 100 ψηφοδέλτια δύο συνδικαλιστικών φορέων Α και Β. Αν προστεθούν στην κάλπη 3 ψηφοδέλτια του Α συνδικαλιστικού φορέα και 2 του Β συνδικαλιστικού φορέα τότε τα ψηφοδέλτια του Α θα είναι διπλάσια των ψηφοδελτίων του Β. Πόσα ψηφοδέλτια κάθε συνδικαλιστικού φορέα υπήρχαν αρχικά στην κάλπη;
53. Κάποιος μοιράζει με διαθήκη ένα ποσό σε τρεις ανηψιούς του Α, Β, Γ άνισα, ανάλογα προς τους αριθμούς 7, 6 και 5. Στη συνέχεια, με μια δεύτερη διαθήκη, αλλάζει τα μερίδια και διανέμει το ποσό ανάλογα προς τους αριθμούς 6, 5 και 4.
- α) Ποιος από τους κληρονόμους κερδίζει με τη νέα μοιρασιά; Ποιος χάνει;
- β) Ένας από τους κληρονόμους κερδίζει με τη δεύτερη μοιρασιά 6.000 δρχ. περισσότερο απ' ότι κερδίζει με την πρώτη. Πόση ήταν η κληρονομιά και πόσο κάθε μερίδιο με τη δεύτερη μοιρασιά;
54. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η εξωτερική της γωνίας Α είναι  $120^\circ$  και η διαφορά των γωνιών Β και Γ είναι  $30^\circ$  ( $B > \Gamma$ ). Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

55. α) Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$ . Υπάρχουν πάντοτε δύο άλλοι πραγματικοί αριθμοί, που να έχουν άθροισμα  $\alpha$  και διαφορά  $\beta$ ;  
 β) Δίνονται δύο φυσικοί αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$ . Υπάρχουν πάντοτε δύο άλλοι φυσικοί των οποίων το άθροισμα να είναι  $\alpha$  και η διαφορά  $\beta$ ;

56. Οι δίσκοι της δισκοθήκης ενός μαθητή τοποθετούνται από τον ίδιο σε τρεις φακέλους για να μεταφερθούν στο σχολείο του, όπου θα γίνει μια μουσική εκδήλωση.  
 Ο 1<sup>ος</sup> και ο 2<sup>ος</sup> φάκελος περιέχουν 40 δίσκους, ο 2<sup>ος</sup> και ο 3<sup>ος</sup> 50 δίσκους και ο 1<sup>ος</sup> και ο 3<sup>ος</sup> 30 δίσκους. Πόσους δίσκους έχει κάθε φάκελος;

57. Να βρεθεί τριψήφιος φυσικός αριθμός αν:

- α) το άθροισμα των ψηφίων του είναι 24.  
 β) ο αριθμός ελαττώνεται κατά 9 στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο τελευταίων ψηφίων του  
 γ) ο αριθμός ελαττώνεται κατά 90 στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο πρώτων ψηφίων του.

Υπόδειξη: Ένας τριψήφιος αριθμός γράφεται:  $100\epsilon + 10\delta + \mu$  όπου  $\epsilon$  το ψηφίο των εκατοντάδων,  $\delta$  το ψηφίο των δεκάδων και  $\mu$  το ψηφίο των μονάδων.

58. Ένα πρόβλημα του Διοφάντου (325-409 μ.Χ.)

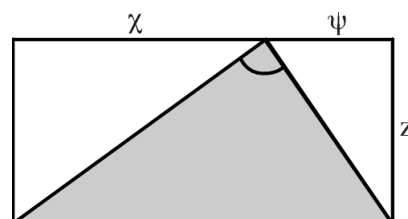
*Το παρακάτω πρόβλημα διατυπώθηκε από το Διόφαντο και προκάλεσε το ενδιαφέρον πολλών μαθηματικών. Του Luca Pacioli (15<sup>ος</sup> αι.), των Tartaglia και Viète (16<sup>ος</sup> αι.) και του Euler (18<sup>ος</sup> αι.). Βρίσκεται στο σύγγραμμα Logistique de Buteon (1559 μ.Χ.) και η εκφώνησή του έχει ως εξής:*

«Δίνεται ένας οποιοσδήποτε αριθμός. Να βρείτε τρεις αριθμούς από τους οποίους ο πρώτος με το ήμισυ των δύο άλλων, ο δεύτερος με το  $\frac{1}{3}$  των δύο άλλων και ο τρίτος με το  $\frac{1}{4}$  των άλλων να έχουν άθροισμα τον δοθέντα αριθμό».

Να λυθεί το πρόβλημα όταν ο αριθμός που δίνεται είναι ο 136.

59. Δύο κινητά κινούνται ευθύγραμμα στο επίπεδο, το πρώτο από το σημείο  $(-2, 1)$  προς το  $(10, 10)$  και το δεύτερο από το  $(-5, 5)$  προς το  $(10, -2)$ . Να βρείτε το κοινό σημείο της διαδρομής τους.

60. Στο διπλανό σχήμα γνωρίζουμε την περίμετρο του ορθογωνίου που είναι 36 cm και ότι τα μήκη  $x, y, z$  είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 4, 2, 3 αντίστοιχα. Να βρεθούν οι πλευρές και το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τριγώνου.



61. Το παρακάτω μαγικό τετράγωνο το συμπληρώνουμε με τους αριθμούς 1 έως 9 έτσι ώστε κάθε αριθμός χρησιμοποιείται μόνο μια φορά και κάθε γραμμή, κάθε στήλη και κάθε διαγώνιος δίνει το ίδιο άθροισμα,  $\Sigma$ .

$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_7$	$x_8$	$x_9$

Δείξτε ότι:

- i)  $\Sigma = 15$
- ii) Το κεντρικό τετράγωνο  $x_5$  περιέχει τον αριθμό 5.

• ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

Ερωτήσεις του τύπου «σωστό-λάθος»

1. Η ευθεία  $y = 5$  είναι κάθετη στον άξονα  $y'y$ . Σ Λ
2. Η ευθεία  $x = -2$  είναι παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$ . Σ Λ
3. Οι ευθείες  $x = \kappa$  και  $y = \alpha$  είναι κάθετες μεταξύ τους. Σ Λ
4. Οι ευθείες  $x = \kappa$  και  $y = \lambda x$ ,  $\lambda \neq 0$  είναι παράλληλες. Σ Λ
5. Το σημείο  $(2, 2)$  ανήκει στην ευθεία με εξίσωση  $x = 2$  Σ Λ
6. Το σύστημα 
$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ \kappa x + \lambda y = 0 \end{cases}$$
 έχει για λύση το  $(0, 0)$ . Σ Λ
7. Το σύστημα 
$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 5 \end{cases}$$
 είναι αόριστο. Σ Λ
8. Το σύστημα 
$$\begin{cases} 3x - \beta y = \alpha \\ \beta x + 3y = \gamma \end{cases}$$
 έχει πάντα λύση. Σ Λ
9. Η εξίσωση  $\kappa x + (\kappa + 1)y = \gamma$  παριστάνει πάντα ευθεία. Σ Λ
10. Κάθε σημείο της ευθείας  $y = x$  ισαπέχει από τους άξονες Σ Λ
11. Αν το σύστημα δύο εξισώσεων που παριστάνουν ευθείες είναι αδύνατο, οι ευθείες είναι παράλληλες. Σ Λ
12. Οι ευθείες  $2x + 3y = 5$  και  $4x + 6y = 10$  ταυτίζονται. Σ Λ
13. Αν  $D = D_x = D_y = 0$ , το σύστημα είναι πάντα αόριστο. Σ Λ
14. Αν  $(D - 1)^2 + (2D - 2)^2 = 0$ , το σύστημα έχει μοναδική λύση. Σ Λ
15. Αν  $D^2 + (D_x - 1)^2 = 0$ , το σύστημα είναι αόριστο. Σ Λ

16. Αν  $|D|+|5 - Dy|=0$ , το σύστημα είναι αδύνατο. Σ    Λ
17. Ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους μπορεί να έχει ακριβώς δύο λύσεις. Σ    Λ
18. Δύο ευθείες που οι εξισώσεις τους αποτελούν σύστημα με ορίζουσα διάφορη του μηδενός, μπορεί να είναι παράλληλες. Σ    Λ
19. Δύο ευθείες που οι εξισώσεις τους αποτελούν σύστημα με ορίζουσα μηδέν πάντα ταυτίζονται. Σ    Λ
20. Αν  $\alpha' \cdot \beta' \neq 0$  και η ορίζουσα  $D$  του συστήματος  
 $ax + \beta y = \gamma$   
 $\alpha'x + \beta'y = \gamma'$   
είναι μηδέν, τότε  $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$  Σ    Λ
21. Αν  $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$ , το σύστημα  $\begin{matrix} \alpha_1x + \beta_1y = 0 \\ \alpha_2x + \beta_2y = 0 \end{matrix}$   
δέχεται άπειρες λύσεις. Σ    Λ
22. Αν  $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$ , το σύστημα  $\begin{matrix} \alpha_1x + \beta_1y = 0 \\ \alpha_2x + \beta_2y = 8 \end{matrix}$   
δέχεται πάντα άπειρες λύσεις. Σ    Λ
23. Υπάρχουν τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  για τις οποίες το σύστημα  
 $x + y = 0$   
 $\alpha x + \beta y = 0$   
δέχεται πάντα άπειρες λύσεις Σ    Λ
24. Τα συστήματα  $\begin{matrix} 2x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{matrix}$  και  $\begin{matrix} 2x + y = 3 \\ x - y + z = 1 + z \end{matrix}$   
είναι ισοδύναμα. Σ    Λ
25. Το σύστημα  $\begin{matrix} x + y^2 = 1 \\ x - y^2 = 3 \end{matrix}$   
δεν είναι γραμμικό. Σ    Λ
26. Αν ο  $\kappa$  είναι αριθμός περιττός, τότε η τιμή της ορίζουσας



$$A = \begin{vmatrix} 1998 & -1999 \\ \kappa & 2000 \end{vmatrix} \text{ είναι άρτιος αριθμός.} \quad \Sigma \quad \Lambda$$

27. Το σύστημα 
$$\begin{cases} x + 0y = 7 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$
 έχει μοναδική λύση  $(x, y) = (7, 0)$ .  $\Sigma \quad \Lambda$

28. Το σύστημα  $x - y = y - z = z - x = 1$  δεν είναι αδύνατο.  $\Sigma \quad \Lambda$

29. Υπάρχουν τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  ώστε το σύστημα 
$$\begin{cases} 1997x + \lambda y = 1998 \\ -\lambda x + 1999y = 2000 \end{cases}$$
 να γίνεται αδύνατο.  $\Sigma \quad \Lambda$

30. Αν το σύστημα 
$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ \beta x + \alpha y = 0 \end{cases}$$
 έχει πάντα άπειρες λύσεις, τότε είναι πάντα  $\alpha = -\beta$ .  $\Sigma \quad \Lambda$

**Ερωτήσεις συμπλήρωσης**

31. Σημειώστε δίπλα σε κάθε σύστημα την κατάλληλη έκφραση:  
 α) είναι αδύνατο, β) έχει άπειρες λύσεις, γ) έχει μία και μοναδική λύση.

$\Sigma_1$	$\begin{cases} 0x + y = 0 \\ x + 0y = 0 \end{cases}$	
$\Sigma_2$	$\begin{cases} 0x + 0y = 5 \\ 0x + 2y = 3 \end{cases}$	
$\Sigma_3$	$\begin{cases} 0x + y = 7 \\ 0x + y = 2 \end{cases}$	
$\Sigma_4$	$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 5y = 0 \end{cases}$	
$\Sigma_5$	$\begin{cases} x + 0y = 3 \\ 0x + y = -3 \end{cases}$	
$\Sigma_6$	$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 12 \end{cases}$	

32. Για τις ορίζουσες  $D, D_x, D_y$  του συστήματος 
$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ 4x + \beta_1 y = \gamma_1 \end{cases}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbb{R}$$
 ισχύουν κατά περίπτωση οι σχέσεις που αναγράφονται στη στήλη (A).

Συμπληρώστε τη στήλη (B) με μία από τις παρακάτω φράσεις:

α) είναι αδύνατο, β) έχει άπειρες λύσεις, γ) έχει μία και μοναδική λύση.

στήλη (A)	στήλη (B)
1. $D - 3 = 0$	
2. $ D  +  Dx  +  Dy  = 0$	
3. $D = 0$ και $ Dx  +  Dy  \neq 0$	
4. $ D - 2  = 0$	
5. $D^2 + (Dy + 1)^2 = 0$	

### Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Κυκλώστε τη σωστή απάντηση:

33. Οι ευθείες  $y - x = 1$  και  $x + y = 1$  τέμνονται στο σημείο:

A (0, -1)    B (-1, 0)    Γ (0, 1)    Δ (0, 0)    E (1, 0)

34. Η ευθεία  $-2x = 6$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο:

A (0, 3)    B (3, 0)    Γ (0, -3)    Δ (-3, 0)    E (-3, 3)

35. Οι ευθείες  $x = 3$  και  $y = -2$  τέμνονται στο σημείο:

A (3, 0)    B (0, -2)    Γ (3, -2)    Δ (-2, 3)    E (-3, 2)

36. Αν το σύστημα  $-3x + 2y = \alpha$

$$6x - 4y = \kappa \quad \kappa, \alpha \in \mathbb{R}^*$$

έχει άπειρες λύσεις, το  $\kappa$  παίρνει μια από τις τιμές:

A. 0    B. 1    Γ. 2    Δ. -2    E. -1



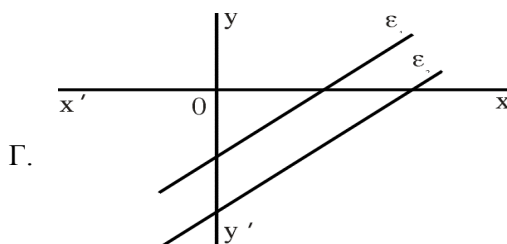
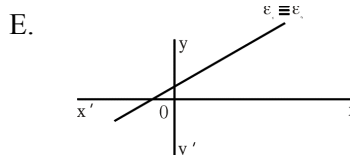
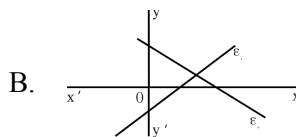
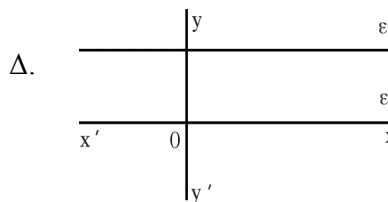
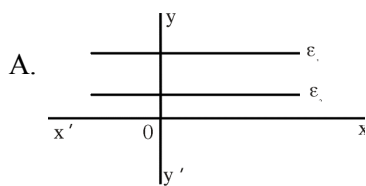
43. Αν  $D^2 + |D_x - 5| = 0$  τότε για το σύστημα ισχύει:

- A. έχει λύση το ζεύγος (5, 0)
- B. έχει λύση το ζεύγος (-5, 0)
- Γ. έχει άπειρες λύσεις
- Δ. είναι αδύνατο
- Ε. δεν μπορούμε να απαντήσουμε

44. Ένα κινητό σημείο κινείται πάνω στην ευθεία  $y = 2$ . Ένα δεύτερο κινείται ευθύγραμμα από το σημείο  $M(3, 0)$  προς το  $O(0, 0)$ . Τα σημεία αυτά:

- A. θα συναντηθούν στο  $O(0, 0)$
- B. θα συναντηθούν σε κάποιο σημείο του  $x'x$
- Γ. θα συναντηθούν σε κάποιο σημείο του  $y'y$
- Δ. δεν θα συναντηθούν ποτέ
- Ε. θα συναντηθούν στο σημείο  $(0, 2)$

45. Δύο ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  που οι εξισώσεις τους αποτελούν σύστημα με ορίζουσα  $D$  για την οποία ισχύει  $D^3 - 8 = 0$  έχουν σχετική θέση:



46. Αν το σύστημα 
$$\begin{cases} 2x + ky = 1 \\ x + y = 2, \quad \kappa \in \mathbb{R} \end{cases}$$

είναι αδύνατο, τότε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + ky = 2 \end{cases} \text{ είναι:}$$

- A. αδύνατο
- B. έχει μοναδική λύση την (1, 1)
- Γ. αόριστο
- Δ. έχει μοναδική λύση την (0, 1)
- Ε. δεν μπορούμε να απαντήσουμε

47. Η ανίσωση  $\left| \begin{matrix} x & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} \right| > 0$  αληθεύει για:

A.  $x < -2$       B.  $x < 0$       Γ.  $x > 2$       Δ.  $x < 2$

E. για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό

48. Αν στο σύστημα  $\begin{cases} a_1x + \beta_1y = 0 \\ a_2x + \beta_2y = 7 \end{cases}$

είναι  $a_1\beta_2 - \beta_1a_2 = 0$ , τότε:

A. το σύστημα έχει λύση μόνο τη μηδενική  $(0, 0)$

B. το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και τη μηδενική

Γ. το σύστημα είναι αδύνατο

Δ. το σύστημα έχει μια μόνο λύση διάφορη της μηδενικής  $(0, 0)$

E. δεν μπορούμε να συμπεράνουμε κάτι για τη λύση του.

49. Το σύστημα  $\begin{cases} ax - y = 0 \\ x + ay = 0 \end{cases}$

$$x + ay = 0$$

έχει λύση:

A.  $(x, y) = \left(\frac{1}{a}, 0\right)$       B. μόνο την  $(x, y) = (0, 0)$

Γ. άπειρες λύσεις      Δ. είναι αδύνατο

E. δεν μπορούμε να συμπεράνουμε κάτι για τη λύση του.

50. Για ποια τιμή του  $\lambda$  η εξίσωση  $x + y + 3\lambda - 6 = 0$  έχει λύση σημείο της ευθείας  $y = -x$ :

A. 2      B. -2      Γ. 0      Δ. -1      E. 1

51. Αν  $x + y = \gamma$  και  $x = y$  ποια από τις παρακάτω ισότητες δεν είναι αληθής:

A.  $2x + 2y = 2\gamma$       B.  $x - y = 0$       Γ.  $x - \gamma = y - \gamma$

Δ.  $x = \frac{\gamma}{2}$       E.  $\gamma - y = 2x$

52. Ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις δίνει γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους;

A.  $(x + y = 3)$  ή  $(2x - y = 7)$

B. Αν  $x = 3y$  τότε  $2x - y = 9$

Γ.  $(x + y + 1)(x - 2y) = 0$

Δ.  $(x + 2y = 8)$  και  $(x - y = 12)$

E.  $\frac{2x - y + 1}{x + y} = \frac{5}{2}$

53. Η παράσταση  $|x - 1| + |x + y - 3|$  παίρνει την ελάχιστη τιμή της όταν:

A.  $x = 1$  και  $y = 1$

B.  $x = -1$  και  $y = 1$

Γ.  $x = 0$  και  $y = 0$

Δ.  $x = 0$  και  $y = 1$

Ε.  $x = 1$  και  $y = 2$

**54.** Η γραμμική εξίσωση που επαληθεύεται με κάθε ζεύγος της μορφής

$x = \kappa - 2$ , και  $y = \kappa + 1$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$  είναι:

Α.  $y - 2x = 5$

Β.  $x - y = -3$

Γ.  $x - y = 2$

Δ.  $x - y = 1$

Ε.  $2x + y = 7$

**55.** Δίνονται οι εξισώσεις τεσσάρων ευθειών οι οποίες διέρχονται από το σημείο  $(1, 2)$ .

Ο αριθμός των συστημάτων δύο εξισώσεων από τις παραπάνω που έχει μοναδική λύση το  $(1, 2)$  είναι:

Α. 2 Β. 4

Γ. 6

Δ. 8

Ε.  $2^4$

**56.** Αν το σύστημα  $3x + ay = 6$

$x + y = \beta$

έχει άπειρες λύσεις, τότε οι τιμές των  $a$  και  $\beta$  είναι:

Α.  $(-1, 0)$

Β.  $(2, 4)$

Γ.  $(3, 2)$

Δ.  $(1, 3)$

Ε.  $(0, 1)$

**57.** Το πλήθος των ζευγών  $(x, y)$  που επαληθεύουν συγχρόνως τις εξισώσεις:

$(x + y - 2)(2x + y) = 0$  και  $(3x - y)(x - 4y - 1) = 0$  είναι:

Α. 1 Β. 2

Γ. 3

Δ. 4

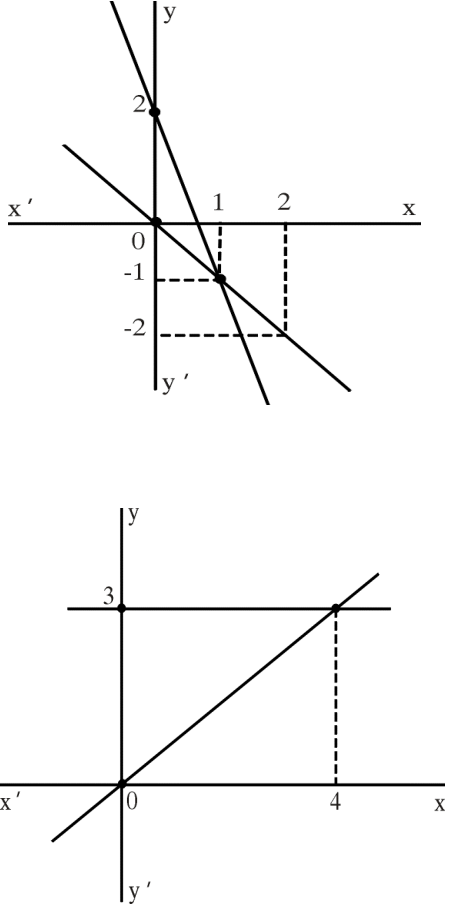
Ε. άπειρο

**Ερωτήσεις αντιστοίχισης**

58. Για τους αριθμούς  $x, y \in \mathbb{R}^*$  έχουμε τα δεδομένα στη στήλη (A). Συνδέστε με μια γραμμή τα δεδομένα αυτά με το αντίστοιχο σύστημα της στήλης (B).

<b>στήλη (A)</b> Δεδομένα για τους $x, y \in \mathbb{R}^*$	<b>στήλη (B)</b> Σύστημα
1. Έχουν άθροισμα 12 και λόγο 5	$x - y = 12$ $3y = x$
2. Διαφέρουν κατά 12 και το $x$ είναι τριπλάσιο του $y$	$x + y = 6$ $xy = 8$
3. Είναι πλευρές ορθογωνίου παραλληλογράμμου με περίμετρο 12 και εμβαδόν 8	$xy = 6$ $x - y = 8$
4. Είναι συντεταγμένες σημείου της διχοτόμου της γωνίας $xoy$ και έχουν άθροισμα 3	$x + y = 12$ $x = 5y$
	$x + y = 0$ $x + 3 = -y$
	$x - y = 0$ $x + y = 3$

59. Συνδέστε με μία γραμμή το σχήμα της στήλης (A) με το σύστημα που αντιστοιχεί από τη στήλη (B).

Στήλη (A)	στήλη (B)
 <p>The top graph shows a coordinate system with x and y axes. Two lines are plotted: a line with a positive slope passing through the origin (0,0) and the point (1,1), and a line with a negative slope passing through the y-axis at (0,2) and the x-axis at (2/3, 0). Dashed lines indicate the intersection point at (1, -1).</p> <p>The bottom graph shows a coordinate system with x' and y' axes. Two lines are plotted: a horizontal line at y=3 and a line with a positive slope passing through the origin (0,0) and the point (4,3). A dashed vertical line connects the intersection point (4,3) to the x-axis at x=4.</p>	<p> <math>y = x</math>  <math>y = -3x + 2</math> </p> <p> <math>y = -x</math>  <math>y = -3x + 2</math> </p> <p> <math>y = 3</math>  <math>y = \frac{3}{4}x</math> </p> <p> <math>y = 3</math>  <math>y = \frac{4}{3}x</math> </p>



**ΑΛΓΕΒΡΑ - ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο**  
Εξισώσεις - Ανισώσεις Δευτέρου Βαθμού



• **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ**

1. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 2x - \frac{1}{9}$$

2. Αν η εξίσωση  $(2x - 3)|\lambda| + 3 = 2\lambda^2x$  έχει ρίζα τον αριθμό 2, να υπολογιστεί ο  $\lambda$ .

3. α) Αν  $x, y$  ρητοί,  $\lambda > 0$  και  $\sqrt{\lambda}$  άρρητος τότε να αποδείξετε ότι:

$$x + y\sqrt{\lambda} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ και } y = 0$$

β) Να δειχθεί ότι: αν  $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$ , ρητοί αριθμοί,  $\lambda > 0$  και  $\sqrt{\lambda}$  άρρητος και η εξίσωση  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $\alpha \neq 0$ , έχει ρίζα τον αριθμό  $\kappa + \sqrt{\lambda}$ , τότε η εξίσωση αυτή έχει για ρίζα και τον συζυγή του,  $\kappa - \sqrt{\lambda}$ .

4. Αν είναι  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$  έχει ρίζα τον αριθμό 1.

5. Αν  $p$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $x^2 + ax + \beta = 0$  να αποδειχθεί ότι

$$|p|^2 \leq |\alpha| |p| + |\beta|.$$

6. Να δειχθεί ότι η εξίσωση  $3x^2 + 2(\alpha + \beta + \gamma)x + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 0$  έχει μια διπλή ρίζα, αν και μόνον αν  $\alpha = \beta = \gamma$ .

7. Να δειχθεί ότι: αν η εξίσωση  $(2\alpha - \beta)x^2 - 4\alpha x + 4\beta = 0$  έχει διπλή ρίζα, τότε η εξίσωση  $(\alpha^2 + \beta^2)x^2 - 2x + 3(\alpha - \beta) = 0$  έχει δύο ρίζες άνισες.

8. Δίνεται η εξίσωση  $2x^2 + 2x - \mu + 3 = 0$ . Να βρεθεί για ποιες τιμές του  $\mu$ :

α) αυτή έχει δύο διαφορετικές ρίζες

β) αυτή έχει μια διπλή ρίζα

γ) δεν έχει ρίζες.

9. Αν  $\rho_1, \rho_2$  ( $\rho_1 \neq \rho_2$ ) είναι ρίζες της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $\alpha \neq 0$  να βρεθούν οι παραστάσεις:

$$\text{i) } |\rho_1 - \rho_2|, \quad \text{ii) } |\rho_1^2 - \rho_2^2|$$

10. Να βρείτε όλες τις εξισώσεις β' βαθμού που το άθροισμα των ριζών τους είναι ίσο με το γινόμενο τους.

11. Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - kx + \lambda = 0$ , δείξτε ότι:

$$|\rho_1| + |\rho_2| = \begin{cases} |k| & , \text{αν } \lambda \geq 0 \\ \sqrt{k^2 - 4\lambda} & , \text{αν } \lambda < 0 \end{cases}$$

12. Γράψτε την εξίσωση που έχει αντίθετες ρίζες από τις ρίζες της εξίσωσης  $x^2 + x - 6 = 0$ .

13. Δίνεται η εξίσωση  $(x - 1)^2 - \lambda(2x - 3) = 0$  που έχει ρίζες  $\rho_1$  και  $\rho_2$ .

Να αποδειχθεί ότι η παράσταση  $(x_1 - \frac{3}{2})(x_2 - \frac{3}{2})$  είναι ανεξάρτητη του  $\lambda$ .

14. Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  να βρείτε εξίσωση δευτέρου βαθμού που να δέχεται ως ρίζες τις παραστάσεις:  $\frac{1}{ax_1 + \beta}, \frac{1}{ax_2 + \beta}$  χωρίς να υπολογίσετε τις  $x_1, x_2$ .

15. Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  και  $x_1, x_2$  οι ρίζες της  $\alpha'x^2 + \beta'x + \gamma' = 0$  να βρείτε εξίσωση που να έχει ως ρίζες τις παραστάσεις:  $x_1\rho_1 + x_2\rho_2, x_1\rho_2 + \rho_2x_1$ .

16. Δίνεται η εξίσωση  $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$  και  $\Delta \geq 0$ . Να δειχθεί ότι:

α) οι ρίζες της είναι αντίθετες αν και μόνον αν  $\beta = 0$

β) οι ρίζες της είναι αντίστροφες αν και μόνον αν  $\alpha = \gamma$ .

17. Η εξίσωση  $(\alpha^2 - \beta^2)x^2 + \beta = 0$  όπου  $\alpha, \beta$  πραγματικές παράμετροι με  $0 < \alpha < \beta$  έχει λύση; Αν όχι, γιατί; Αν ναι, ποια;

18. Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^2 + (\lambda - 2)x + 3 = 0$ . Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός  $\lambda$  ώστε η παραπάνω εξίσωση:

α) να έχει μία μόνο ρίζα

β) να έχει διπλή ρίζα

19. Να βρεθούν οι τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για να είναι οι ρίζες της εξίσωσης

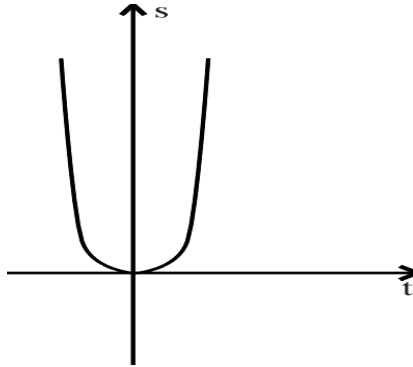
$$3x^2 - 2x + 3(\lambda - 7) = 0$$

i) θετικές,    ii) ετερόσημες,    iii) ίσες

**20.** Βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε:  $(x - 2)(3x - 1) = 3x^2 + \lambda x + 2$

21. Αν οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - (5\lambda - 6\mu)x - 1 = 0$  είναι αντίθετες και οι ρίζες της εξίσωσης  $\lambda x^2 + 13x - \lambda\mu + \lambda^2 = 0$  με  $\lambda \neq 0$  είναι αντίστροφες τότε:
- α) να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών παραμέτρων  $\lambda$  και  $\mu$   
 β) να λυθούν οι εξισώσεις για τις τιμές των  $\lambda$  και  $\mu$  που βρήκατε.

22. Δίνεται η εξίσωση  $s = \frac{5}{2} t^2$  όπου  $s$  το διάστημα που διανύει ένα κινητό,  $t$  ο αντίστοιχος χρόνος κίνησης και  $5 \text{ (m/sec}^2\text{)}$  η επιτάχυνση της κίνησης.



Η παραβολή του παραπάνω σχήματος παριστάνει γραφικά τις λύσεις της εξίσωσης  $s = \frac{5}{2} t^2$ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

23. Δίνεται το τριώνυμο  $f(x) = x^2 - 2(\mu + 1)x + \nu$ .  
 Να οριστούν οι  $\mu, \nu$  ώστε να έχει ρίζα τον αριθμό 1 και να δέχεται ελάχιστη τιμή για  $x = -1$ .
24. Να ορίσετε τους  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = 3x^2 + 8\lambda x - 24x + 5\kappa - 10$  να έχει μοναδικό κοινό σημείο με τους άξονες την αρχή τους.  
 Για τις τιμές των  $\kappa, \lambda$  που βρήκατε να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση της  $f$ .
25. Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι σταθερό. Ναδειχθεί ότι το γινόμενο τους γίνεται μέγιστο όταν οι αριθμοί αυτοί είναι ίσοι.

26. Να λυθεί η εξίσωση:

$$(x+1)^2 + |x+1| - 2 = 0$$

27. Να λυθεί η εξίσωση:

$$x^4 - (\alpha + 1)x^2 + \alpha = 0$$

28. Δίνεται η εξίσωση  $\alpha|x-1| + 6|\beta| = 9 + \beta^2$ , όπου  $\alpha, \beta$  πραγματικές παράμετροι και  $\alpha \neq 0$ .  
 Υπολογίστε το  $\beta$  όταν η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 1.

29. Να λυθεί η εξίσωση:  $\left|x^2 - x\right| + \left|x^2 - 11x + 10\right| = 0$

30. Να λυθεί η εξίσωση:  $x - \sqrt{x} = 20$ .

31. Να λυθεί η εξίσωση:  $(1 - |x|)^2 = 4$

32. Να λυθεί η εξίσωση:  $\frac{2}{|x|} = \frac{|x|}{2} + \frac{3}{2}$

33. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α)  $x^4 - 3a^2x^2 - 4a^2 = 0$

β)  $\gamma^4x^4 + (\alpha^2\gamma^2 - \beta^2\gamma^2)x^2 - \alpha^2\beta^2 = 0$

34. Να λυθεί το σύστημα: 
$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 5 \\x + y &= 3\end{aligned}$$
35. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  τέτοιοι ώστε  $\alpha^2 + \beta^2 = 16$  και  $\alpha + \beta = 6$ .
36. Η εξίσωση  $x^2 + y^2 = 9$  παριστάνει κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 3. Να βρεθούν, εφόσον υπάρχουν, τα κοινά σημεία του κύκλου με την ευθεία  $x - y = 0$ .
37. Για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  η ευθεία  $y = \lambda x + 3$  εφάπτεται του κύκλου  $x^2 + y^2 = 4$ ;
38. Να βρεθούν οι  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  για να είναι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 + \alpha x + \beta = 0$  ίσες με  $\alpha$  και  $\beta$ .
39. Βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας  $y = 3x + 3$  και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $y = \frac{6}{x}$ .
40. Δείξτε ότι η ευθεία  $y = 3x + \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = \frac{6}{x}$  τέμνονται για οποιοδήποτε  $\lambda$  σε δύο σημεία.
41. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = \frac{4}{x}$  (1)  
και η ευθεία  $y = -x + \lambda$  (2)  $\lambda \in \mathbb{R}$  έχουν κοινά σημεία αν έχει λύσεις η εξίσωση  $\frac{4}{x} = -x + \lambda$  (3)  
α) Βρείτε για ποια  $\lambda \in \mathbb{R}$  έχει λύσεις η εξίσωση (3).  
β) Πόσα κοινά σημεία έχουν οι (1) και (2);  
γ) Βρείτε για ποιο  $\lambda$  έχουν ένα κοινό σημείο και προσδιορίστε το.
42. Τα μήκη των τριών πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι τρεις διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.
43. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι  $25 \text{ cm}^2$ . Πότε το ορθογώνιο έχει την ελάχιστη περίμετρο και ποια είναι αυτή;
44. Σε τραπέζιο το άθροισμα των βάσεών του και του ύψους του είναι 10.  
α) Για ποια τιμή του ύψους του το εμβαδόν του τραπεζίου γίνεται μέγιστο;  
β) Πόσο είναι το εμβαδόν αυτό;



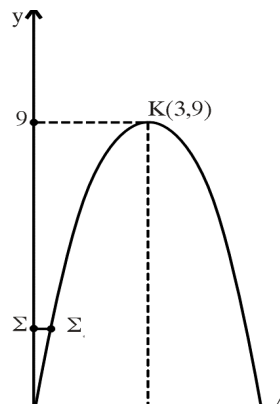
45. Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι 4 cm μεγαλύτερη από την πλευρά ενός άλλου τετραγώνου. Βρείτε τις πλευρές τους αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά των εμβαδών τους είναι  $88 \text{ cm}^2$ .
46. Το πλήθος των διαγωνίων ενός πολυγώνου με  $n$  πλευρές δίνεται από τον τύπο:  $\delta_n = \frac{n(n-3)}{2}$ . Αν το πολύγωνο έχει 104 διαγωνίους, πόσες είναι οι πλευρές του;
47. Το άθροισμα των  $n$  πρώτων φυσικών αριθμών δίνεται από τον τύπο:
- $$\Sigma_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
- Βρείτε το  $n$ , αν ξέρουμε ότι  $\Sigma_n = 300$ .
48. Το εμβαδόν μιας σελίδας ενός βιβλίου είναι  $300 \text{ cm}^2$ . Αν το μήκος της είναι 5 cm μεγαλύτερο από το πλάτος της, βρείτε τις διαστάσεις της σελίδας.
49. Δύο φυσικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός έχουν άθροισμα 64.
- Πόσα ζεύγη τέτοιων αριθμών υπάρχουν;
  - Ποιοι είναι οι αριθμοί όταν το γινόμενο τους μεγιστοποιείται;
50. Να αποδείξετε ότι αν το  $7x - 5$  είναι πολλαπλάσιο του 3, τότε και το τριώνυμο  $28x^2 - 13x - 5$  είναι πολλαπλάσιο του 3.
51. Να βρεθεί η συνθήκη μεταξύ των  $p$  και  $q$  ώστε οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 + px + q = 0$  με  $p, q \in \mathbb{R}$  να είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 2 και 3.
52. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + \beta x + \gamma = 0$  (1)
- να βρείτε τη σχέση μεταξύ των  $\beta$  και  $\gamma$  για να είναι μια ρίζα της (1) διπλάσια της άλλης
  - αν  $\beta = -2$ , τότε ορίστε τον  $\gamma$  ώστε η μια ρίζα της (1) να είναι το τετράγωνο της άλλης
  - βρείτε το σύνολο των δευτεροβάθμιων εξισώσεων με ρίζες τα τετράγωνα των ριζών της (1).
53. Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι τα μήκη πλευρών τριγώνου, να βρεθούν οι τιμές του  $x$  για τις οποίες αληθεύει η ανίσωση:  $x^2 - 2\alpha x + (\beta + \gamma)^2 > 0$ .
54. Ένας χορογράφος σχεδιάζοντας τις θέσεις των χορευτών σε κάποια χορογραφία θέλει να τους διατάξει σε τετράγωνο. Εάν σχηματίσει  $x$  σειρές με  $x$  χορευτές (στην κάθε σειρά) θα του περισσέψουν 10 χορευτές. Εάν προσθέσει 2 χορευτές σε κάθε σειρά και σχηματίσει ένα νέο τετράγωνο θα του λείπουν 10 χορευτές. Να βρείτε τον αριθμό  $x$  των χορευτών μιας σειράς του  $a'$  τετραγώνου και το συνολικό αριθμό  $y$  των χορευτών.
55. Ένα αγρόκτημα οργώνεται από δύο τρακτέρ Α και Β, αν δουλέψουν συγχρόνως, σε 6 ώρες. Αν οργώσει το κτήμα μόνο το τρακτέρ Α τότε χρειάζονται 5 ώρες περισσότερες,

από όσες χρειάζονται, για να το οργώσει το τρακτέρ Β. Να βρεθεί σε πόσες ώρες καθένα τρακτέρ οργώνει μόνο του το αγρόκτημα.

56. α) Να βρεθεί η συνάρτηση  $f$  της οποίας η γραφική παράσταση είναι η παραβολή του διπλανού σχήματος.

β) Αν το τμήμα ΟΚΑ της παραβολής αυτής παριστάνει μια σήραγγα και στο σημείο της  $\Sigma_1$  θέλουμε να εγκαταστήσουμε πυροσβεστικό κρουνό που θα

απέχει 2,75 m από τον άξονα  $x'x$  να βρεθεί το μήκος του σωλήνα  $\Sigma\Sigma_1$ , που είναι κάθετος στον άξονα  $y'y$ .



57. Σε μια εκπομπή της τηλεόρασης με συμβουλές προς οδηγούς δόθηκε το εξής στοιχείο: Ένα αυτοκίνητο που τρέχει με σταθερή ταχύτητα 120 km/h σε περίπτωση που συναντήσει εμπόδιο και φρενάρει θέλει 113 m για να σταματήσει. Να υπολογιστεί:

- α) η επιβράδυνση της κίνησης μετά το φρενάρισμα και  
β) ο χρόνος που θα παρέλθει από τη στιγμή του φρεναρίσματος μέχρι την ακινητοποίηση του αυτοκινήτου.

Υπόδειξη: Λύστε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τους τύπους  $v = v_0 + at$  και  $s = v_0t + \frac{1}{2} at^2$ .

Προσοχή στις μονάδες.

58. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - (\lambda + 5)x + \mu - 4 = 0$ . Να προσδιοριστούν τα  $\lambda$  και  $\mu$  εάν δοθεί ότι αυτά είναι ίσα προς τα διπλάσια των ριζών της εξίσωσης.

59. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α)  $(x - 1)(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x + 1) < 0$

β)  $(x^2 - 7x + 12)(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 2x + 6) \geq 0$

γ)  $x^2(3 - x^2) < 0$

δ)  $(1 - 2x^2)(-x + 7) \leq 0$

ε)  $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) > 0$  εάν  $\alpha < \beta < \gamma$

στ)  $(3x^3 - x^2)(x^2 - x + 1) < 0$

ζ)  $3x^3 - 5x^2 + 2x \geq 0$

η)  $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 17x + 60} > 0$

θ)  $\frac{-x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 6} > 0$

ι)  $\frac{x + 1}{7 - x} > 2$

60. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\alpha) \frac{x-1}{x+1} > 1 + \frac{2}{1-x}$$

$$\beta) \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} > 1$$

$$\gamma) \frac{3}{x+1} - \frac{x-1}{x-4} > \frac{3}{2}$$

61. Για ποιες τιμές του  $x$  συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\alpha) 3x + 7 > 0$$

$$\beta) x^2 - 6x + 5 > 0$$

62. Για ποιες τιμές του  $x$  συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\alpha) 2x + 5 > 0$$

$$\beta) x - 2 < 0$$

$$\gamma) (x+4)(x-6) < 0$$

63. Για ποιες τιμές του  $x$  συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\alpha) \frac{3x+5}{3x-7} < 0 \qquad \beta) \frac{12x^2+13x-14}{x-2} < 0$$

64. Για ποιες τιμές του  $x$  ισχύει η διπλή ανίσωση:

$$-2 < \frac{2x-1}{x^2-3x+2} < 1$$

65. Για ποιες τιμές του  $x$  το τριώνυμο  $x^2 - 14x + 50$  παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 5 και μικρότερες του 26;

66. Να λυθεί η ανίσωση:  $|x| > 4x$

67. Δίνεται η πραγματική συνάρτηση:  $f(x) = \sqrt{|x^2 + 8x + 9|} - 24$

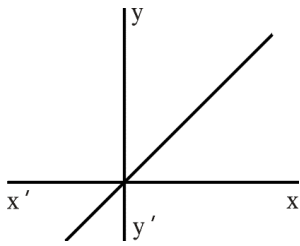
Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;

68. Ναδειχθεί ότι:  $\frac{1}{3} < \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} < 3$  για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό  $x$ .

69. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις:

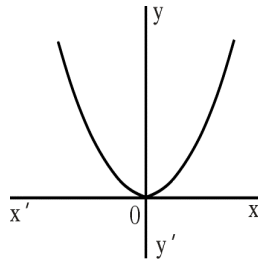
της ευθείας

$$y = x$$



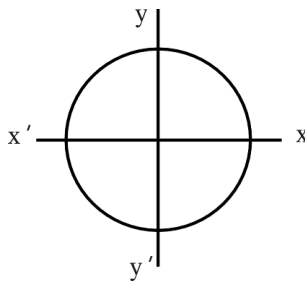
της παραβολής

$$y = x^2$$



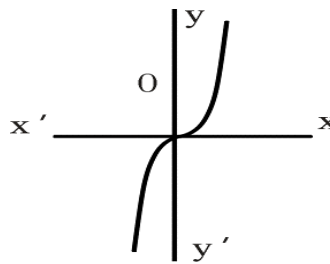
του κύκλου

$$x^2 + y^2 = 9$$



της συνάρτησης

$$y = x^3$$



α) Συμπληρώστε τον πίνακα

Εξίσωση	Βαθμός εξίσωσης ως προς x	Βαθμός εξίσωσης ως προς y	Γραφική παράσταση (ευθεία ή καμπύλη)
$y = x$			
$y = x^2$			
$x^2 + y^2 = 9$			
$y = x^3$			

β) Συμπληρώστε τις φράσεις:

Η εξίσωση  $ax + by = \gamma$  ..... βαθμού ως προς x, ..... βαθμού ως προς y παριστάνει γραφικά .....

Η εξίσωση  $y = ax^2$  ..... βαθμού ως προς x, ..... βαθμού ως προς y παριστάνει γραφικά .....

Η εξίσωση  $x^2 + y^2 = 9$  ..... βαθμού ως προς x, ..... βαθμού ως προς y παριστάνει γραφικά .....

Η εξίσωση  $y = x^3$  ..... βαθμού ως προς x, ..... βαθμού ως προς y παριστάνει γραφικά .....

γ) Στα παραπάνω σχήματα να τμήσετε την  $y = x$ , με μία ευθεία  $\epsilon_1$ , την  $y = x^2$  με μία ευθεία  $\epsilon_2$ , την  $x^2 + y^2 = 9$  με μία ευθεία  $\epsilon_3$  και στη συνέχεια συμπληρώστε τις φράσεις:

η  $y = x$  και μια ευθεία μπορεί να έχουν ..... κοινά σημεία

η  $y = x^2$  και μια ευθεία μπορεί να έχουν ..... κοινά σημεία

η  $x^2 + y^2 = 9$  και μια ευθεία μπορεί να έχουν ..... κοινά σημεία

\* στα κενά να γραφούν όλες οι δυνατές περιπτώσεις

δ) i) Η καμπύλη  $y = x^3$  πόσα κοινά σημεία μπορεί να έχει με μια ευθεία;

ii) Η  $y = x^3$  πόσα κοινά σημεία έχει με τον άξονα των τετμημένων;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ε) Ένα σύστημα δευτέρου βαθμού ορίζεται από τις εξισώσεις

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{και} \quad \beta x + \gamma y = 5$$

Πόσες λύσεις μπορεί να έχει; Δικαιολογήστε την απάντησή σας λαμβάνοντας υπόψη τις γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων του συστήματος.

• ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

**Ερωτήσεις συμπλήρωσης**

1. Συμπλήρωσε τον πίνακα με την κατάλληλη μαθηματική έκφραση:

Φυσική γλώσσα	Μαθηματική γλώσσα
Δύο αριθμοί $x, y$ διαφέρουν κατά 2 και έχουν γινόμενο 2	$x(x + 2) = 2$
Δύο αντίστροφοι αριθμοί που έχουν άθροισμα 3	.....
Ορθογώνιο που έχει περίμετρο 20 cm και εμβαδόν 21	.....
Το άθροισμα των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων αριθμών ισούται με $a$ .	.....
Το άθροισμα των τετραγώνων τριών διαδοχικών ακεραίων αριθμών ισούται με $\beta$ .	.....
Η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών περιττών αριθμών είναι ίση με 8000.	.....
Το τετράγωνο του αριθμού των ετών της ηλικίας του Γιάννη ισούται με το διπλάσιο της ηλικίας την οποία θα έχει μετά 12 χρόνια.	.....
Τρεις διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί που το διπλάσιο του μεσαίου είναι ίσο με το άθροισμα του μικρότερου και του μεγαλύτερου.	.....
Ένας αριθμός διαιρείται ακριβώς με το 96, και το πηλίκο του είναι μεγαλύτερο κατά 4 από τον διαιρέτη.	.....

2. Να συμπληρώσεις τα κενά:

Η εξίσωση  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$  με διακρίνουσα  $\Delta$ :

- έχει δύο ρίζες άνισες, αν  $\Delta$  .....
- έχει μια διπλή ρίζα, αν  $\Delta$  .....
- δεν έχει καμιά πραγματική ρίζα, αν  $\Delta$  .....

**Ερωτήσεις του τύπου «σωστό-λάθος»**

3. Η εξίσωση  $ax^2 + \gamma = 0$  έχει διακρίνουσα πάντα αρνητική.      Σ      Λ

4. Αν  $\alpha, \gamma$  ετερόσημοι αριθμοί, η εξίσωση  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$  έχει δύο άνισες ρίζες Σ Λ
5. Η εξίσωση  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$  έχει μία ρίζα ίση με το μηδέν, όταν η διακρίνουσά της είναι ίση με το μηδέν. Σ Λ
6. Η εξίσωση  $ax^2 + \beta x - \gamma = 0$  έχει δύο ρίζες άνισες αν  $\alpha > 0$  και  $\gamma > 0$ . Σ Λ
7. Οι αριθμοί 2 και 3 είναι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - 5x + 6 = 0$  Σ Λ
8. Αν η εξίσωση  $x^2 - \lambda x + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}^*$  έχει δύο ρίζες άνισες, αυτές είναι αντίστροφες. Σ Λ
9. Αν η εξίσωση  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$  έχει δύο ρίζες αντίθετες, τότε είναι  $\beta = 0$ . Σ Λ
10. Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι ρίζες της  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$  οι  $-\rho_1, -\rho_2$  είναι ρίζες της  $ax^2 - \beta x + \gamma = 0$  Σ Λ
11. Αν  $\rho_1, \rho_2 (\rho_1 \cdot \rho_2 \neq 0)$  είναι ρίζες της  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$  οι  $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}$  είναι ρίζες της  $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0, \gamma \neq 0$ . Σ Λ
12. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  τέτοιοι ώστε  $\alpha + \beta = 1$  και  $\alpha \cdot \beta = 3$ . Σ Λ
13. Όταν η εξίσωση  $x^2 + \beta x + \gamma = 0$  έχει δύο ρίζες ετερόσημες, το  $\gamma$  είναι αρνητικός αριθμός. Σ Λ
14. Όταν η εξίσωση  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha < 0$  έχει δύο ρίζες ετερόσημες, το  $\gamma$  είναι αρνητικός αριθμός. Σ Λ
15. Όταν η εξίσωση  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$  έχει δύο ρίζες ομόσημες, το  $\beta$  είναι πάντα θετικός αριθμός. Σ Λ
16. Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι ρίζες της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$  τότε  $\rho_1^2 + \rho_2^2 = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ . Σ Λ

17. Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι ρίζες της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,

$a \neq 0$  οι  $|\rho_1|, |\rho_2|$  θα είναι ρίζες της εξίσωσης

$$ax^2 + \beta|x| + \gamma = 0.$$

Σ      Λ

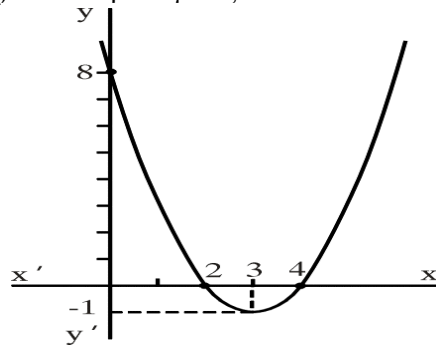
18. Η εξίσωση  $x^2 - \kappa x - \lambda^2 = 0$  έχει δύο ρίζες ετερόσημες

για κάθε  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$ .

Σ      Λ

19. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad a \neq 0.$$

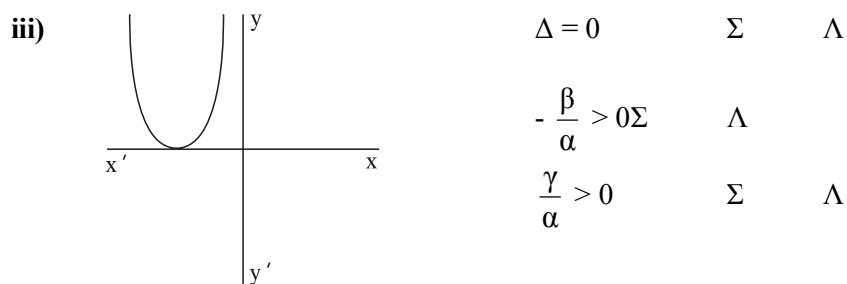
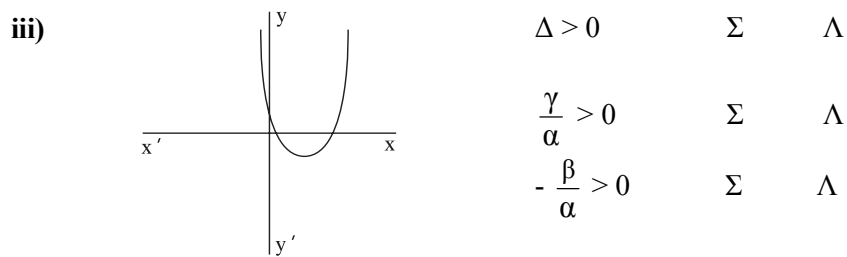
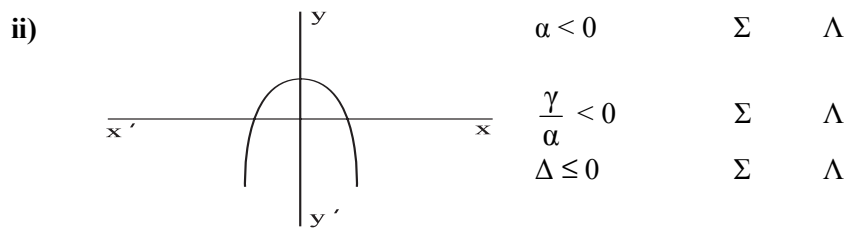
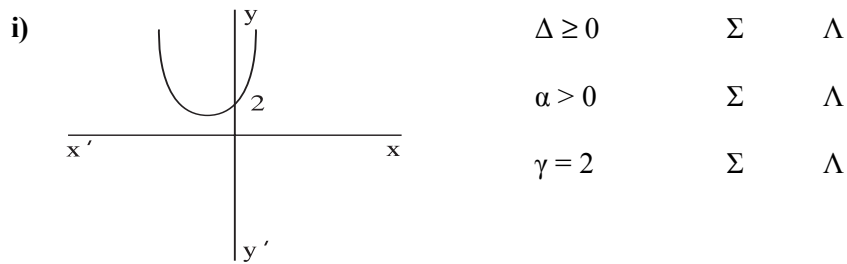


Να χαρακτηρίσετε ως Σ ή Λ τις παρακάτω προτάσεις:

- |  |   |   |
|--|---|---|
| • $\alpha > 0$   | Σ | Λ |
| • $\beta < 0$  | Σ | Λ |
| • $\gamma > 0$   | Σ | Λ |
| • $\Delta < 0$   | Σ | Λ |
| • το σύνολο των τιμών της $f$ είναι το $[-1, +\infty)$ | Σ | Λ |
| • η $f$ έχει ελάχιστο το $-1$                          | Σ | Λ |
| • το πεδίο ορισμού της $f$ είναι το $[1, 4]$           | Σ | Λ |
| • Η $f$ είναι άρτια                                    | Σ | Λ |
| • έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 3$             | Σ | Λ |
| • είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 3]$             | Σ | Λ |



20. Αν το κάθε σχήμα παριστάνει τη γραφική παράσταση συνάρτησης της μορφής  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma = 0$ , χαρακτηρίστε ως Σ ή Λ τις προτάσεις που αντιστοιχούν στο καθένα απ' τα παρακάτω σχήματα:



21. Για το τριώνυμο  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$  ισχύει  $a f(1) < 0$ . Τότε αυτό έχει δύο ρίζες άνισες. Σ    Λ
22. Αν για το τριώνυμο  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$  ισχύει  $a f(2) > 0$ , τότε ισχύει  $\rho_1 < 2 < \rho_2$  ( $\rho_1, \rho_2$  ρίζες του τριωνύμου). Σ    Λ
23. Αν  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ , χαρακτηρίστε ως Σ ή Λ τις ανισότητες:
- $f(-1997) < 0$  Σ    Λ
  - $f(4 \cdot 10^5) > 0$  Σ    Λ
  - $f(2) > 0$  Σ    Λ
  - $f\left(\frac{1}{2000}\right) < 0$  Σ    Λ
  - $f(\pi) > 0$  Σ    Λ

**Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής**

24. Αν η εξίσωση  $x^2 - 4x + \alpha = 0$  έχει για διπλή ρίζα το 2, τότε ο  $\alpha$  ισούται με:  
 Α. 1    Β. -1    Γ. 4    Δ. -4    Ε. 0
25. Αν η εξίσωση  $x^2 - 2x - \kappa = 0$  έχει 2 ρίζες άνισες, για τον πραγματικό αριθμό  $\kappa$  ισχύει:  
 Α.  $\kappa < -1$     Β.  $\kappa \leq -1$     Γ.  $\kappa < 0$     Δ.  $\kappa > -1$   
 Ε.  $\kappa$  οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός
26. Η εξίσωση  $x^2 - \kappa x + \kappa^2 = 0$  με άγνωστο τον  $x$  για κάθε πραγματικό αριθμό  $\kappa \neq 0$  έχει:  
 Α. δύο ρίζες άνισες αρνητικές    Β. δύο ρίζες άνισες θετικές  
 Γ. μια διπλή ρίζα θετική    Δ. διπλή ρίζα το μηδέν  
 Ε. καμία πραγματική ρίζα
27. Όταν οι  $\alpha, \gamma$  είναι ετερόσημοι η εξίσωση  $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$  έχει:  
 Α. δύο ρίζες άνισες    Β. διπλή ρίζα θετική  
 Γ. διπλή ρίζα αρνητική    Δ. καμία ρίζα  
 Ε. δεν μπορούμε να απαντήσουμε
28. Η εξίσωση  $x^2 + \kappa^2 x - \lambda^2 = 0$  για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $\kappa$  και  $\lambda$  με  $\kappa, \lambda \neq 0$ , έχει:  
 Α. δύο ρίζες άνισες ομόσημες    Β. δύο ρίζες ετερόσημες  
 Γ. μια διπλή ρίζα    Δ. καμία πραγματική ρίζα  
 Ε. δεν μπορούμε να απαντήσουμε
29. Αν οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 + \lambda x + 4 = 0$  είναι θετικές, τότε ο  $\lambda$  είναι:  
 Α.  $\lambda < -4$     Β.  $\lambda < 0$     Γ.  $\lambda = 0$     Δ.  $\lambda < -2$   
 Ε. οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός

30. Οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - 4x - \lambda^2 = 0$  για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό  $\lambda \neq 0$  είναι:

- A. ομόσημες θετικές      B. ομόσημες αρνητικές      Γ. ετερόσημες  
Δ. το μηδέν και ένας θετικός αριθμός  
Ε. το μηδέν και ένας αρνητικό αριθμός

31. Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 + 5x - 7 = 0$ , τότε οι  $-x_1, -x_2$  είναι ρίζες της εξίσωσης:  
 Α.  $x^2 + 5x + 7 = 0$       Β.  $x^2 - 5x - 7 = 0$       Γ.  $x^2 + 5x - 7 = 0$       Δ.  $x^2 - 5x + 7 = 0$   
 Ε.  $x^2 + 7x - 5 = 0$
32. Αν οι ρίζες της εξίσωσης  $5x^2 + (3 - \lambda)x - 1 = 0$  είναι αντίθετες τότε ο πραγματικός αριθμός  $\lambda$  είναι:  
 Α. αρνητικός αριθμός      Β.  $\lambda = 0$       Γ.  $\lambda = 3$   
 Δ.  $\lambda = -3$       Ε.  $\lambda = 9$
33. Αν οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ ,  $a \neq 0$  είναι αντίστροφες τότε ο  $a$  είναι:  
 Α. οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός  $\neq 0$   
 Β. οποιοσδήποτε αρνητικός αριθμός  
 Γ.  $a = 1$  ή  $a = -1$       Δ.  $a = 9$  ή  $a = -9$       Ε.  $a = 5$  ή  $a = -5$
34. Αν  $\alpha + \beta = 5$  και  $\alpha\beta = 6$  τότε οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι ρίζες της εξίσωσης:  
 Α.  $x^2 + 5x + 6 = 0$       Β.  $x^2 - 5x + 6 = 0$       Γ.  $x^2 - 5x - 6 = 0$   
 Δ.  $x^2 + 6x - 5 = 0$       Ε.  $x^2 - 6x + 5 = 0$
35. Στην ερώτηση «υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  ώστε  $\alpha + \beta = 1$  και  $\alpha\beta = 6$ » δίνονται από τους μαθητές οι εξής απαντήσεις:  
 Α. Ναι  
 Β. Όχι  
 Γ. Ναι και είναι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - x + 6 = 0$   
 Δ. Ναι και είναι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 + x - 6 = 0$   
 Ε. Ναι και είναι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - x - 6 = 0$   
 Ποια είναι η σωστή; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
36. Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - 5x + 3 = 0$  τότε η παράσταση  $x_1^2 + x_2^2$  ισούται με:  
 Α. 25      Β. 9      Γ. 19      Δ. 15      Ε. 29
37. Αν  $x_1, x_2$  είναι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 + 7x + 2 = 0$  τότε η παράσταση  $kx_1 + kx_2$   $k \neq 0$  ισούται με:  
 Α. 7      Β.  $-7$       Γ.  $7k$       Δ.  $-7k$       Ε.  $7k^2$
38. Αν οι αριθμοί  $x_1$  και  $x_1^2$  είναι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - 6x - 27 = 0$ , τότε ο  $x_1$  ισούται με:  
 Α. 9      Β.  $-27$       Γ. 3      Δ.  $-3$       Ε.  $-9$
39. Η εξίσωση  $x^2 - \kappa|x| - 3 = 0$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}^*$  έχει:  
 Α. μία λύση      Β. δύο λύσεις      Γ. καμία λύση      Δ. τέσσερις λύσεις

Ε. δεν μπορούμε να απαντήσουμε

40. Η εξίσωση  $x^4 + 3x^2 + \kappa = 0$ , όπου  $\kappa > 0$ , έχει:

- A. μία λύση    B. δύο λύσεις    Γ. τέσσερις λύσεις  
 Δ. καμία λύση    Ε. δεν μπορούμε να απαντήσουμε

41. Ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 8$  και η ευθεία  $y = x$  έχουν:

- A. ένα κοινό σημείο στον άξονα  $y'y$     B. δύο κοινά σημεία στον άξονα  $x'x$   
 Γ. δύο κοινά σημεία αντιδιαμετρικά    Δ. κανένα κοινό σημείο  
 Ε. ένα κοινό σημείο στον άξονα  $x'x$

42. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^2 - 5x - \kappa^2$ ,  $\kappa \neq 0$  έχει με τον άξονα  $x'x$ :

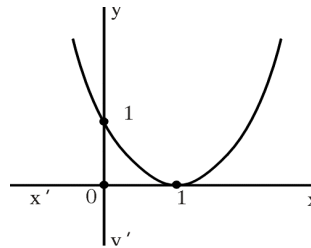
- A. ένα κοινό σημείο    B. ένα κοινό σημείο που είναι το  $O(0, 0)$   
 Γ. κανένα κοινό σημείο    Δ. δύο κοινά σημεία  
 Ε. δύο κοινά σημεία που το ένα είναι το  $O(0, 0)$

43. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \kappa x^2 - 2x + 1$ ,  $\kappa \neq 0$  εφάπτεται στον άξονα  $x'x$ , τότε το  $\kappa$  ισούται με:

- A. -1    B. 1    Γ. -2    Δ. 2    Ε. 4

44. Ο τύπος της συνάρτησης που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι:

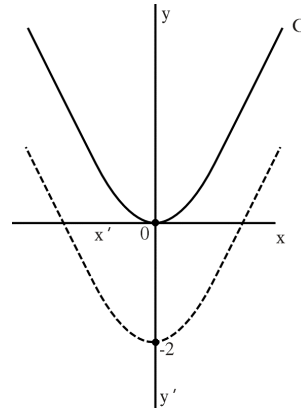
- A.  $f(x) = x^2 - 2x - 1$     B.  $\phi(x) = x^2 - 6x + 9$   
 Γ.  $h(x) = x^2 - 2x + 1$     Δ.  $g(x) = x^2 - 6x - 9$   
 Ε.  $k(x) = x^2 + 4x + 4$



45. Στο διπλανό σχήμα με συνεχή γραμμή φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = x^2$ . Η διακεκομμένη γραμμή παρουσιάζει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

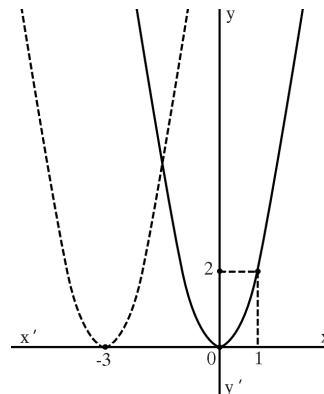
- A.  $g(x) = x^2 + 2$     B.  $g(x) = x^2 - 2$   
 Γ.  $g(x) = (x - 2)^2$     Δ.  $g(x) = (x + 2)^2$   
 Ε.  $g(x) = x^2 - 4$



46. Στο διπλανό σχήμα με συνεχή γραμμή φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

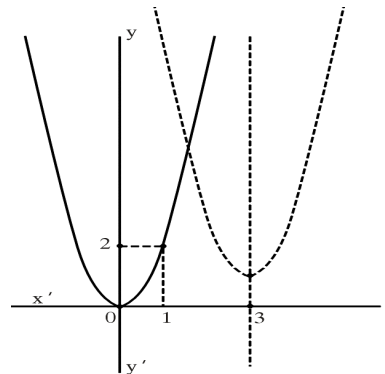
$f(x) = 2x^2$ . Η διακεκομμένη γραμμή παρουσιάζει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

- A.  $g(x) = 2(x + 3)^2$     B.  $g(x) = 2(x - 3)^2$



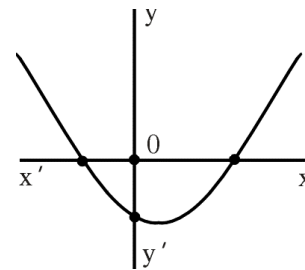
Γ.  $g(x) = (2x + 3)^2$       Δ.  $g(x) = (2x - 3)^2$   
 Ε.  $g(x) = 2x^2 + 3$

47. Στο διπλανό σχήμα με συνεχή γραμμή φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = 2x^2$ . Η διακεκομμένη γραμμή παρουσιάζει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:



A.  $g(x) = 2x^2 + 3$       B.  $g(x) = 2x^2 + 1$   
 Γ.  $g(x) = 2(x - 3)^2 + 1$       Δ.  $g(x) = 2(x + 3)^2 - 1$   
 Ε.  $g(x) = (2x - 3)^2 + 1$

48. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης στο σχήμα αντιστοιχεί στον τύπο (για κάθε  $\kappa \in \mathbb{R}$ ):



A.  $f(x) = x^2 - \kappa x + 5$       B.  $g(x) = x^2 - \kappa x - 5$   
 Γ.  $h(x) = x^2 - x + \kappa^2$       Δ.  $\phi(x) = x^2 - 5x + \kappa^2$   
 Ε.  $t(x) = x^2 - x + 5\kappa^2$

49. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \kappa x^2 - 3x - \kappa$ , έχει με τον άξονα  $x'x$  (για κάθε τιμή του  $\kappa \neq 0$ ):

- A. ένα κοινό σημείο  
 B. δύο κοινά σημεία στο θετικό ημιάξονα  $Ox$   
 Γ. δύο κοινά σημεία στον αρνητικό ημιάξονα  $Ox'$   
 Δ. κανένα κοινό σημείο  
 Ε. δύο κοινά σημεία εκατέρωθεν του  $O$

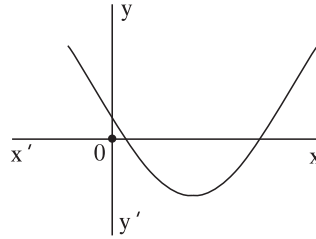
50. Αν οι αριθμοί  $-1$  και  $3$  είναι ρίζες του τριωνύμου  $f(x) = x^2 - \kappa x + \lambda$  ποια από τις παρακάτω ανισότητες είναι σωστή;

A.  $f(5) < 0$       B.  $f(-5) \leq 0$       Γ.  $f(\frac{2}{3}) < 0$       Δ.  $f(100) \leq 0$   
 Ε.  $f(-100) < 0$

51. Αν  $\rho_1, \rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ) είναι ρίζες του τριωνύμου  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$  και  $af(1) < 0$ , ο αριθμός  $1$  ανήκει στο διάστημα:

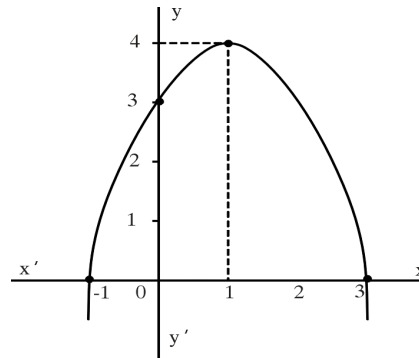
A.  $(-\infty, \rho_1)$       B.  $(\rho_1, \rho_2)$       Γ.  $[\rho_1, \rho_2]$       Δ.  $[\rho_2, +\infty)$       Ε.  $(\rho_2, +\infty)$

52. Η παραβολή του διπλανού σχήματος αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση  $f(x) = x^2 + kx + \lambda$ . Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:



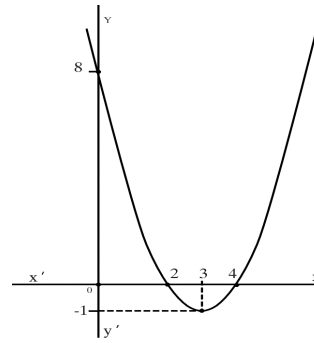
- A.  $\Delta < 0$   
 B.  $k = 0$   
 Γ. το σύνολο των τιμών της  $f$  είναι το  $[0, +\infty)$   
 Δ. το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης  $x^2 + kx + \lambda = 0$  είναι μηδέν  
 Ε. το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης  $x^2 + kx + \lambda = 0$  είναι αρνητικός αριθμός

53. Η παραβολή του διπλανού σχήματος αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση  $f(x) = x^2 + kx + \lambda$ . Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

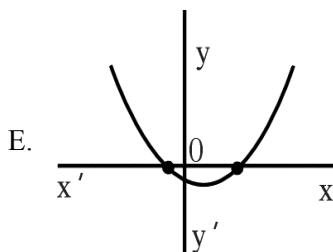
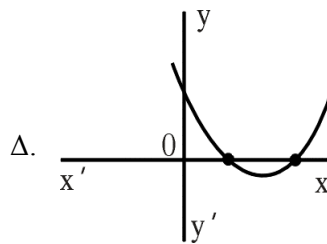
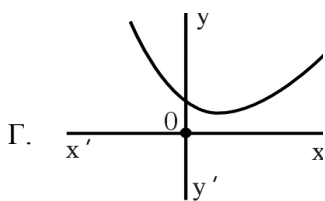
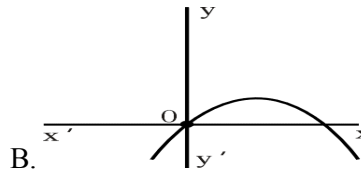
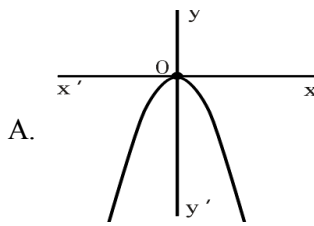


- A.  $\Delta = 0$   
 B.  $k < 0$   
 Γ.  $\lambda > 0$   
 Δ. το σύνολο των τιμών της  $f$  είναι το  $[1, +\infty)$   
 Ε. η γραφική παράσταση της  $f$  έχει άξονα συμμετρίας τον  $y'y$

54. Η παραβολή του διπλανού σχήματος αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ . Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;
- A.  $a < 0$       B.  $a\beta > 0$       Γ.  $a\gamma < 0$
- Δ. η συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το  $[-1, +\infty)$
- Ε. η συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το  $(-1, +\infty)$



55. Για το τριώνυμο  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$  ισχύει:  $a \cdot \gamma < 0$ . Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση  $f$ ;



56. Έστω  $a, \beta, \gamma$  πραγματικοί αριθμοί με  $a > 0$ . Αν η εξίσωση  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  έχει 2 ρίζες πραγματικές ετερόσημες, ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

- A.  $\beta^2 - 4a\gamma = 0$       B.  $\frac{\beta^2}{a} < 4\gamma$       Γ.  $\gamma < 0$
- Δ.  $\gamma > 0$       Ε.  $\beta^2 < 4a\gamma$

57. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$  έχει άξονα συμμετρίας τον  $y'y$ . Αν για την εξίσωση  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  ισχύει  $\Delta > 0$ , ποια από τις επόμενες προτάσεις για τις ρίζες  $\rho_1, \rho_2$  αυτής είναι αληθής;

- A.  $\rho_1 + \rho_2 > 0$       B.  $\rho_1 + \rho_2 = 0$       Γ.  $\rho_1 + \rho_2 < 0$
- Δ.  $\rho_1 \cdot \rho_2 > 0$       Ε.  $\rho_1 \cdot \rho_2 = 0$

58. Η εξίσωση:  $\lambda x^2 + x - 4\lambda = 0$  για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

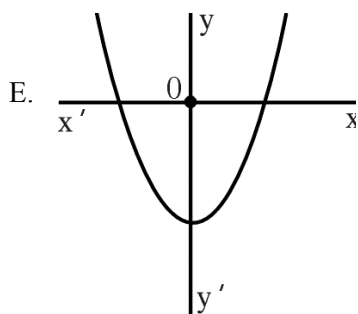
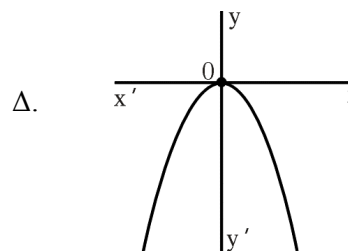
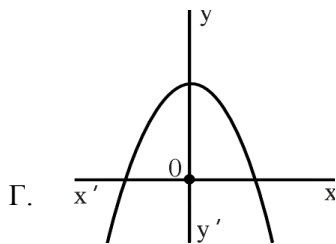
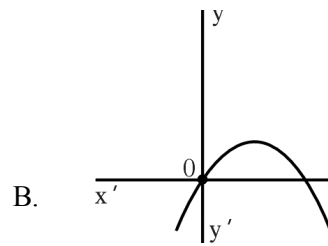
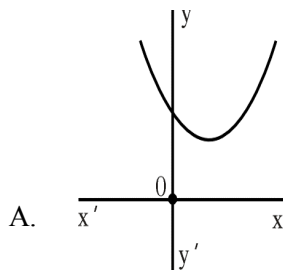


- A. έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες
- B. έχει δύο ρίζες πραγματικές και ίσες
- Γ. δεν έχει ρίζες πραγματικές
- Δ. έχει μια ρίζα ίση με το μηδέν
- Ε. δεν μπορούμε να συμπεράνουμε κάποιο από τα προηγούμενα

59. Αν  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$  και  $\Delta < 0$  τότε το τριώνυμο  $f(x)$  γράφεται:

- A.  $f(x) = \left(x - \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$
- B.  $f(x) = \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$
- Γ.  $f(x) = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$
- Δ.  $f(x) = \alpha \left[x + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$
- Ε.  $f(x) = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$

60. Αν  $f(x) = ax^2$  με  $a > 0$ , τότε η γραφική παράσταση της  $g(x) = -\frac{1}{\alpha}x^2$  είναι:



**Ερωτήσεις αντιστοίχισης**

61. Κάθε στοιχείο της στήλης (A) αντιστοιχεί με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (B). Συνδέστε κατάλληλα τα στοιχεία των δύο στηλών:

<b>στήλη (A)</b> Σχέσεις	<b>στήλη (B)</b> $ax^2 + bx + \gamma > 0$
$\Delta < 0$ και $a < 0$ $\Delta < 0$ και $a > 0$  $\Delta > 0$ και $a \neq 0$	<ul style="list-style-type: none"><li>• αληθεύει για κάθε <math>x</math></li><li>• αληθεύει για κάθε <math>x</math> που βρίσκεται μεταξύ των ριζών του τριωνύμου</li><li>• αληθεύει για κάθε <math>x</math> εκτός των ριζών του τριωνύμου</li><li>• δεν αληθεύει για κανένα <math>x</math></li><li>• αληθεύει για <math>x</math> ίσο με τις ρίζες του τριωνύμου</li><li>• δεν μπορούμε να απαντήσουμε για ποια <math>x</math> αληθεύει η ανίσωση</li></ul>

62. Κάθε στοιχείο της στήλης (A) αντιστοιχεί με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (B). Συνδέστε κατάλληλα τα στοιχεία των δύο στηλών.

<p style="text-align: center;"><b>στήλη (A)</b> σχέσεις</p>	<p style="text-align: center;"><b>στήλη (B)</b> είδος ριζών της <math>ax^2 + bx + \gamma = 0</math></p>
<p style="text-align: center;"><math>\frac{\gamma}{\alpha} &lt; 0</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\Delta &gt; 0, \frac{\gamma}{\alpha} &gt; 0</math> και <math>-\frac{\beta}{\alpha} &gt; 0</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\Delta = 0</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\Delta &lt; 0</math></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• έχει δύο ρίζες πραγματικές και αρνητικές</li> <li>• έχει δύο ρίζες πραγματικές και θετικές</li> <li>• έχει δύο ρίζες πραγματικές και ετερόσημες</li> <li>• έχει ρίζες πραγματικές και ίσες</li> <li>• δεν έχει ρίζες πραγματικές</li> <li>• δεν μπορούμε να απαντήσουμε για το είδος των ριζών της εξίσωσης</li> </ul>



***ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ***



## ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Για την αξιολόγηση του μαθητή και της διδασκαλίας ενός μαθήματος θα πρέπει να υπάρχει ένας *συνολικός σχεδιασμός κατά ευρύτερη διδακτική ενότητα* ο οποίος θα συνδέεται φυσικά με τον ετήσιο σχεδιασμό του διδάσκοντος για το συγκεκριμένο μάθημα.

*Η φύση των Μαθηματικών*, ως συνόλου εννοιών και σχέσεων εννοιών ιεραρχημένης δομής, όπου κάθε έννοια παράγεται από ή συνδέεται με προηγούμενες στην ιεραρχία έννοιες είναι το βασικότερο στοιχείο που *πρέπει να χαρακτηρίζει κάθε σχεδιασμό αξιολόγησης* ενός μαθήματος των Μαθηματικών και κατ' ακολουθίαν κάθε σχέδιο κριτηρίου αξιολόγησης των μαθητών που παρακολουθούν το μάθημα αυτό.

Η φύση των Μαθηματικών καθορίζει και την έννοια: *μάθηση στα Μαθηματικά* η οποία συνίσταται «στη γνώση του συσχετισμού κάθε έννοιας με τις άλλες έννοιες της ιεραρχίας των Μαθηματικών εννοιών».\*

Επομένως, προκειμένου *ένας σχεδιασμός αξιολόγησης μιας ευρύτερης ενότητας να πληροί την παραπάνω χαρακτηριστική ιδιότητα* θα πρέπει ο διδάσκων να διατυπώνει ερωτήσεις και υποερωτήματα, όπου αυτό κρίνεται αναγκαίο, κατά διδακτική ενότητα του διδακτικού βιβλίου αντίστοιχα *προς το σύνολο των διδακτικών στόχων*. Οι ερωτήσεις και τα υποερωτήματα θα πρέπει να καλύπτουν τις συνδέσεις όλων των εννοιών που η ενότητα περιέχει. Έτσι ο διδάσκων:

- έχει τη βεβαιότητα ότι καλύπτει με τη διδασκαλία όλους τους διδακτικούς στόχους
- ελέγχει τις συνδέσεις των εννοιών
- μπορεί να αξιολογεί σταδιακά την επίτευξη των διδακτικών στόχων και
- μπορεί να επιλέγει οποτεδήποτε κρίνει αναγκαίο
  - i) ερωτήσεις για τη σύνταξη κριτηρίων ολιγόλεπτων ή ωριαίων εξετάσεων στο μάθημα της ημέρας
  - ii) ερωτήσεις για τη σύνταξη ωριαίων κριτηρίων σε ευρύτερη διδακτική ενότητα.

Επισημαίνεται ότι η ανάλυση μιας ερώτησης σε υποερωτήματα συνεισφέρει:

- στον έλεγχο της επίτευξης περισσότερων και πιο ειδικών διδακτικών στόχων
- στην αντικειμενικότερη βαθμολόγηση του μαθητή, αφού η βαθμολογία κάθε ερώτησης μπορεί να κατανεμηθεί στα υποερωτήματα ανάλογα με την έκταση και τη βαρύτητά τους
- στη διευκόλυνση του μαθητή για την αντιμετώπιση της εξέτασης, αφού ο μαθητής μπορεί να απαντήσει σε μέρος των ερωτημάτων.

---

\* (The Psychology of Learning Mathematics - Skemp R. σελ. 26).

**ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ**  
**ΓΙΑ ΤΟ 3ο ΚΑΙ ΤΟ 4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ**

Στις σελίδες που ακολουθούν:

- διατυπώνονται ερωτήσεις κατά διδακτική ενότητα στα παρακάτω  
Κεφάλαιο 3 - Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων και  
Κεφάλαιο 4 - Εξισώσεις - Ανισώσεις Δευτέρου Βαθμού του διδακτικού βιβλίου της  
Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου (ΟΕΔΒ - 1998) και
- παρουσιάζονται δύο σχέδια κριτηρίων αξιολόγησης για κάθε κεφάλαιο. Στα σχέδια  
αυτά η συνολική βαθμολογία κατανέμεται κατά ερωτήσεις και υποερωτήματα.



**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ  
ΕΝΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3**

• **ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ**

1. α) Ένα από τα παρακάτω ζεύγη αποτελεί λύση της εξίσωσης  $x + 5y = 7$ .  
Ποιο; Κυκλώστε το.  
Α.  $(-1, 1)$    Β.  $(8, -\frac{1}{5})$    Γ.  $(1, 1)$    Δ.  $(-\frac{1}{5}, 1)$    Ε.  $(-8, -\frac{1}{5})$
- β) Γράψτε δύο ακόμη ζεύγη που να είναι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης:
2. Δίνεται η εξίσωση  $2x - 3y = 7$ .
- α) Μετασχηματίστε τη γραφή της έτσι ώστε να μπορείτε να υπολογίζετε τον άγνωστο  $y$  όταν γνωρίζετε τον άλλο άγνωστο  $x$ .
- β) Μετασχηματίστε τη γραφή της έτσι ώστε να μπορείτε να υπολογίζετε τον άγνωστο  $x$  όταν γνωρίζετε τον  $y$ .
- γ) Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων να προσδιορίσετε το σημείο τομής της ευθείας  $2x - 3y = 7$   
- με τον άξονα  $x'x$   
- με τον άξονα  $y'y$
3. Δίνεται η εξίσωση  $y = -1$ . Να γράψετε δύο λύσεις της υπό μορφή ζευγών.  
Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά όλες της λύσεις της.
4. Δίνεται η εξίσωση  $x = 4$ . Να γράψετε δύο λύσεις της υπό μορφή ζευγών.  
Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά όλες τις λύσεις της.
5. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:  $2x + 2y = 16$  και  $x + y = 8$  έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.  
Ποια θα είναι η σχετική θέση των ευθειών που παριστάνουν αυτές οι δύο εξισώσεις;
6. Δίνεται η γραμμική εξίσωση  $ax + by = 12$  (1)
- α) Να προσδιοριστεί το  $a$  αν η ευθεία που παριστάνει η (1) τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο 3.
- β) Να προσδιοριστεί το  $b$  αν η ευθεία που παριστάνει η (1) τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο -2.
- γ) Για τη συγκεκριμένη εξίσωση που βρήκατε, προσδιορίζοντας τα  $a$  και  $b$ , να παραστήσετε γραφικά τις άπειρες λύσεις της.
- δ) Να βρεθούν τα ζεύγη που επαληθεύουν την ίδια εξίσωση και πληρούν τη σχέση  $x + y = 4$ .
7. Η εξίσωση  $2x - y = 1$  δέχεται σαν γενική λύση ένα από τα παρακάτω ζεύγη:  
Ποιο; Κυκλώστε το.  
Α.  $(\kappa, 2\kappa)$    Β.  $(\kappa, -\frac{\kappa}{2})$    Γ.  $(\kappa, 2\kappa - 1)$    Δ.  $(\kappa, \kappa + 1)$    Ε.  $(2\kappa, -\kappa)$

• **ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΥΟ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ  
ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ**

1. Επαληθεύστε ότι το σύστημα

$$x + 3y = 0$$

$$2x - 5y = 0$$

έχει ως λύση το ζεύγος (0, 0).

2. Βρείτε από μνήμης μια λύση του συστήματος:

$$5x + 2y = 7$$

$$2x + 3y = 5$$

3. Να λυθεί το σύστημα:

$$x = 2y - 8$$

$$x + 4y = 9$$

4. Να λυθεί το σύστημα:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 5$$

$$\frac{3x}{2} + \frac{2y}{3} = 22$$

5. Να λυθεί το σύστημα:

$$3(x - 4) + 2(y + 2) = -9$$

$$(x - 5) - 4(y - 3) = 26$$

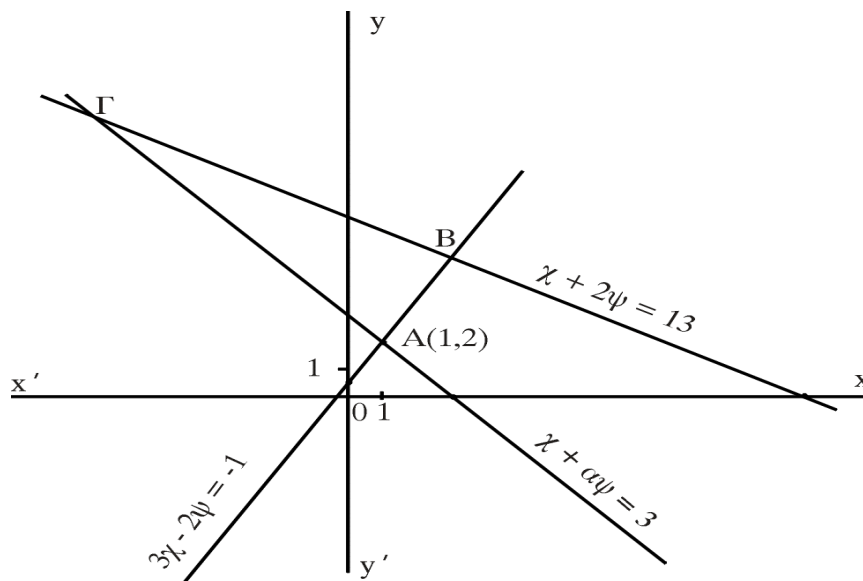
6. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  έτσι ώστε το σύστημα

$$\alpha x - y = -\beta$$

$$4x - y = +\beta$$

να έχει λύση το ζεύγος (5, 23).

7. Οι ευθείες  $x + ay = 3$ ,  $3x - 2y = -1$  και  $x + 2y = 13$  τέμνονται ανά δύο όπως δείχνει το σχήμα.



α) Συμπληρώστε τις προτάσεις:

- οι συντεταγμένες του A (x, y) είναι λύση του συστήματος .....
- οι συντεταγμένες του B (x, y) είναι λύση του συστήματος .....
- οι συντεταγμένες του Γ (x, y) είναι λύση του συστήματος.....

β) Με δεδομένο ότι το σημείο (1, 2) ανήκει στην ευθεία  $x + ay = 3$

να προσδιοριστεί ο αριθμός α.

γ) Να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες του σημείου Γ.

## • Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ

1. Συμπληρώστε τα κενά:

A.  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

B.  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \kappa \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

Γ.  $\begin{vmatrix} \kappa\alpha & \kappa\beta \\ -\beta & \dots \end{vmatrix} = \kappa\alpha^2 + \dots\dots\dots$

Δ.  $\begin{vmatrix} \lambda\alpha & \alpha \\ \lambda\beta & \beta \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

2. Αν  $\lambda\nu \neq 0$  η ισότητα  $\begin{vmatrix} \kappa & \mu \\ \lambda & \nu \end{vmatrix} = 0$  είναι ισοδύναμη με μια από τις παρακάτω ισότητες:

A.  $\kappa\mu = \lambda\nu$     B.  $\frac{\kappa}{\nu} = \frac{\mu}{\lambda}$     Γ.  $\kappa\lambda = \mu\nu$     Δ.  $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\mu}{\nu}$     E.  $\frac{\nu}{\kappa} = \frac{\lambda}{\mu}$

3. Δίνεται το σύστημα:  $ax + \beta y = \alpha + 1$

$$x + y = 1$$

α) Να υπολογίσετε τις D, D<sub>x</sub>, D<sub>y</sub>.

β) Αν  $\beta - \alpha = 3$  να βρεθούν τα x, y με τη βοήθεια των παραπάνω οριζουσών.

## • ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

1. Το σύστημα  $2x - 3y = 7$

$$2x - 3y = -10$$

έχει λύση; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

2. Το σύστημα  $12x + 90y = 10$   
 $6x + 45y = 5$

πόσες λύσεις έχει; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

3. Ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους δεν μπορεί να έχει δύο ζεύγη αριθμών ως λύσεις. Γιατί;

4. Να λυθεί το σύστημα:  $(\lambda^2 + 1)x = 5$   
 $x - y = 3$

5. Να λυθεί το σύστημα:  $(1 - \lambda)y = 3$   
 $x + 4y = -1$

6. Δίνεται το σύστημα:  $ax - y = -\beta$   
 $4x - y = -3$

Βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών  $a$  και  $\beta$ :

α) το σύστημα δεν έχει λύση

β) το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

7. Δίνεται το σύστημα:  $2x + 5y = 0$   
 $3x + 4y = 0$

α) Υπολογίστε την ορίζουσα του  $D$ .

β) Το σύστημα αυτό έχει μια προφανή λύση. Ποια;

γ) Μπορεί το παραπάνω σύστημα να έχει άλλη λύση; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

8. Να συμπληρώσετε καθένα από τα κενά με μία από τις παρακάτω φράσεις:

α) έχει μια λύση,

β) έχει άπειρες λύσεις,

γ) είναι αδύνατο.

A.  $0x + 0y = 0$   
 $0x + y = 0$  .....

B.  $0x + 0y = 1$   
 $0x + 5y = 7$  .....

Γ.  $0x + 0y = 9$   
 $0x + 0y = 0$  .....

Δ.  $x + 0y = 5$   
 $0x + y = 1$  .....



9. Κάθε πρόταση της στήλης (A) να συνδεθεί με την κατάλληλη τιμή του  $\lambda$  που βρίσκεται στη στήλη (B).

στήλη (A)	στήλη (B)
Το σύστημα $x + 3y = 10$ $2x - \lambda y = 2$ είναι αδύνατο.	$\lambda = 3$  $\lambda = -6$
Το σύστημα $x + 3y = \lambda - 1$ $2x + 6y = 4$ έχει άπειρες λύσεις.	$\lambda = 0$  $\lambda = -3$
Η ορίζουσα $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \lambda & -\lambda \end{vmatrix} = 15$	$\lambda = 2$
Η γραμμική εξίσωση $\lambda x + \lambda(\lambda - 3)y = 4$ δεν παριστάνει ευθεία.	$\lambda = 1$

10. Το σύστημα  $-3x + 2y = a$   $a \neq 0$   
 $6x - 4y = ka$

δέχεται άπειρες λύσεις για μια από τις παρακάτω τιμές του  $k$ :

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

- A. 1      B. -2      Γ. 3      Δ.  $a$       E. 0

11. Το σύστημα  $3x + ay = 6$   
 $x + y = 8$

είναι αδύνατο όταν ο  $a$  είναι:

- A. -3      B. 1      Γ. 0      Δ. 3      E. -1

12. Αν σ' ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους είναι:

$D \neq 0$  και  $2D = Dx$  τότε ο  $x$  ισούται με:

- A. -2      B. -1      Γ. 0      Δ. 1      E. 2

13. Αν το σύστημα  $kx + 3y = -9$   
 $x - y = 3$

επαληθεύεται για δύο ζεύγη  $(x, y)$  τότε το  $k$  ισούται με:

- A. 3      B. 0      Γ. 1      Δ. 2      E. -3

14. Συμπληρώστε τα κενά με μια εξίσωση:

- α) Το σύστημα  $2x + 3y = 8$   
..... είναι αδύνατο.
- β) Το σύστημα  $x + 2y = 8$   
..... έχει λύση το ζεύγος (2, 3).
- γ) Το σύστημα  $x + 2y = 5$   
..... έχει άπειρες λύσεις.
- δ) Το σύστημα  $2x - y = 10$   
 $2x - y = 13$  είναι .....
- ε) Το σύστημα  $2x + y = 12$   
..... έχει λύση πάνω στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας ενός ορθογωνίου συστήματος αξόνων.
- στ) Το σύστημα  $2x + 5y = 7$   
..... έχει για λύση ζεύγος αντιθέτων αριθμών.

• **ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΤΡΙΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΤΡΕΙΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ**

*Να λυθούν τα συστήματα:*

- |   |   |
|---|---|
| 1. $x + y + z = 0$<br>$x + 2y + 3z = -5$<br>$x + 4y + 9z = -18$                                       | 2. $x + y + z = 4$<br>$2x - y + z = 8$<br>$x - 3y - 2z = 1$                     |
| 3. $2\alpha + \beta + \gamma = 5$<br>$\alpha + 2\beta + \gamma = 2$<br>$\alpha + \beta + 2\gamma = 1$ | 4. $x + 4y + z = 7$<br>$x + 4y - z = 13$<br>$2x - y + 2z = 5$                   |
| 5. $\alpha + \beta = 10$<br><br>$\beta + \gamma = 25$<br>$\gamma + \delta = 15$                       | 6. $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{\omega}{5}$<br><br>$3x + y - \omega = 15$ |



**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4**

- **ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ  $ax^2 + bx + \gamma = 0 \quad a \neq 0$**

**Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑΣ**

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις ως προς x ή y:

α)  $x^2 - 4x = 0$

β)  $3x^2 = 4x$

γ)  $2x^2 + x - 15 = 0$

δ)  $5x^2 - 18x - 8 = 0$

ε)  $x^2 - 6x + 7 = 0$

στ)  $y^2 - y + 1 = 0$

ζ)  $y^2 - (\alpha + 3)y + 3^{3\alpha} = 0$

η)  $-\frac{1}{2}x^2 + 5x + 1 = 0$

θ)  $x^2 + 4\kappa x - 21\kappa^2 = 0$

ι)  $4x^2 - 4\kappa x - 35\kappa^2 = 0$

κ)  $8y^2 = 10\kappa y + 3\kappa^2$

2. Να προσδιορίσετε το x συναρτήσει του y από τις εξισώσεις:

α)  $2y^2 + 3xy - 7y = 2x^2 - 11x + 15$

β)  $6y^2 - 4y - 3xy = 9x^2 + 9x + 2$

3. Να λυθεί η εξίσωση:  $\frac{x+2}{2} - (x-2)^2 = \frac{3x-2}{2}$

4. Αν  $\Delta$  είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης  $x^2 + bx + a = 0$ , βάλτε σε κύκλο τη σωστή ισότητα:

$\Delta = \alpha^2 - 4\beta \quad \Delta = \beta^2 \quad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \quad \Delta = \beta^2 - 4\alpha \quad \Delta = 0$

5. Στη στήλη (B) βρίσκονται παραστάσεις που αντιστοιχούν στη διακρίνουσα των εξισώσεων της στήλης (A). Συνδέστε κάθε εξίσωση της στήλης (A) με την παράσταση που αντιστοιχεί στη διακρίνουσά της στήλης (B).

στήλη (A)	στήλη (B)
$x^2 - \alpha = 0$	$-\alpha^2$
$x^2 - \alpha x = 0$	$4\alpha$
$x^2 - 3x - \alpha = 0$	$9 + 4\alpha$
	$\alpha^2$

$-x^2 + \alpha x + 3 = 0$	$\alpha^2 + 12$
	$\alpha^2 - 12$

• **ΕΙΔΟΣ ΚΑΙ ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$   $a \neq 0$**

1. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις έχει δύο ρίζες άνισες;

A.  $x^2 - x + 5 = 0$

B.  $x^2 + 2\kappa x + \kappa^2 = 0$

Γ.  $x^2 - 2x + 7 = 0$

Δ.  $x^2 - x - \kappa^2 = 0$  E.  $x^2 - 6x + 9 = 0$

2. Να βρείτε αν έχει ρίζες και πόσες καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις χωρίς να τις λύσετε:

α)  $-x^2 + 4x + 6 = 0$

β)  $3x^2 + 2x + 1 = 0$

γ)  $2x^2 = 4x - 2\sqrt{3} = 0$

δ)  $x^2 - 4x + 4 = 0$

ε)  $x^2 - 6mx + 9m = 0$

στ)  $2x^2 - 3x + 8 = 0$

ζ)  $x^2 - (m - 3)x + m - 4 = 0$

η)  $m^2x^2 = m^2 - 5x$

θ)  $(m - 3)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$

3. Η εξίσωση  $x^2 + (m - 1)x - 1 = 0$  έχει ρίζες οποιοσδήποτε κι αν είναι ο m. Γιατί;

4. Η εξίσωση  $\lambda x^2 + 5x + 10 = 0$ :

α) Για ποια τιμή του λ έχει μία λύση;

β) Για ποια τιμή του λ έχει μια λύση διπλή;

γ) Να βρεθεί η διπλή ρίζα.

5. Δείξτε ότι αν στην εξίσωση  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$  τα a και γ είναι ετερόσημα, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

6. Αν η εξίσωση  $x^2 - 2(\kappa - 1)x + 9 = 0$  έχει μια διπλή ρίζα, τότε ο κ ισούται με:

A. 2

B. -2

Γ. 4

Δ. -4

E. 3

7. Η εξίσωση  $(\lambda + 1)x^2 + \lambda x - 1 = 0$  έχει μία μόνο ρίζα όταν ο λ ισούται με:

A. 2

B. -2

Γ. 1

Δ. -1

E. 0

8. Αν η εξίσωση  $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ ,  $\gamma \neq 0$  δεν έχει ρίζες, ποια από τις παρακάτω εξισώσεις δεν έχει επίσης ρίζες;

- A.  $x^2 - \beta x - \gamma = 0$
- B.  $\gamma x^2 - \beta x + 1 = 0$
- Γ.  $-x^2 + \beta x + \gamma = 0$
- Δ.  $\gamma x^2 + \beta x - 1 = 0$
- E.  $\gamma x^2 - \beta x - 1 = 0$

9. Αν η εξίσωση  $x^2 + \beta x - \gamma = 0$ ,  $\gamma \neq 0$  έχει δύο ρίζες άνισες, συμπληρώστε δίπλα από κάθε εξίσωση το πλήθος των ριζών της.

- α)  $x^2 - \beta x - \gamma = 0$  .....
- β)  $\gamma x^2 + \beta x - 1 = 0$  .....
- γ)  $-x^2 - \beta x + \gamma = 0$  .....
- δ)  $\gamma x^2 - \beta x - 1 = 0$  .....
- ε)  $-\gamma x^2 - \beta x + 1 = 0$  .....

10. Αν η εξίσωση  $x^2 + 12x + \gamma = 0$  έχει μια διπλή ρίζα, το  $\gamma$  ισούται με:

- A. 24                      B. - 24                      Γ. 36                      Δ. - 36                      E. 48

11. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις έχει  $\Delta > 0$ :

- A.  $x^2 + 1 = 0$                       B.  $x(x - 2) = 0$
- Γ.  $|x^2 - 1| + 3 = 0$                       Δ.  $x^2 + (x - 1)^2 = -5$                       E.  $x^2 + (x - 1)^2 = 0$

**• ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ**

**$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad a \neq 0$**

1. Η εξίσωση  $x^2 + 2x - 8 = 0$  δέχεται ως ρίζα έναν από τους παρακάτω αριθμούς: 1, -1, 2, -2

Βρείτε ποιον και στη συνέχεια να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης με δύο τρόπους, χωρίς να τη λύσετε.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το άθροισμα και το γινόμενο των δύο ριζών.

Να γίνει το ίδιο και για τις εξισώσεις:

- α)  $x^2 + 7x - 8 = 0$
- β)  $2x^2 + 3x - 5 = 0$
- γ)  $-x^2 + x + 2 = 0$
- δ)  $x^2 + 3x + 4 = 0$

2. Να ελέγξετε αν οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες. Στην περίπτωση που έχουν να υπολογίσετε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών.
- α)  $x^2 - 3x + 14 = 0$   
 β)  $-x^2 + 4x + 6 = 0$   
 γ)  $2x^2 + 3x + 1 = 0$   
 δ)  $2x^2 - 4x - 2\sqrt{3} = 0$   
 ε)  $x^2 + x(1 + 2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} = 0$
3. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + x + \lambda - 1 = 0$  με ρίζες  $x_1, x_2$ . Να βρείτε για ποια τιμή του  $\lambda$  είναι:  
 $x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 5 = 0$
4. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - \lambda x - \lambda^2 - 5 = 0$  με ρίζες  $x_1, x_2$ . Να βρεθεί ο  $\lambda$  έτσι ώστε να ισχύει η σχέση:  $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$
5. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ . Να βρεθεί ο  $\lambda$  έτσι ώστε να ισχύει η σχέση:  

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{4}$$
6. α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση  $x^2 + \lambda x - 1 = 0$  έχει ρίζες πραγματικές, οποιοσδήποτε και αν είναι ο αριθμός  $\lambda$ .  
 β) Χωρίς να υπολογίσετε τις ρίζες αυτές, να βρείτε τις παρακάτω παραστάσεις:  
 i)  $x_1 + x_2$   
 ii)  $x_1x_2$   
 iii)  $x_1^2 + x_2^2$   
 iv)  $x_1x_2^2 + x_2x_1^2$
7. Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 20(\mu + 3)x + \mu^2 + 6\mu - 5 = 0$  με ρίζες  $\rho_1, \rho_2$ . Αποδείξτε ότι η διαφορά  $\rho_1 - \rho_2$  δεν εξαρτάται από το  $\mu$ .
8. Ποιο είναι το  $\kappa$ , όταν η εξίσωση  $\kappa x^2 - 4x - 35 = 0$  έχει άθροισμα ριζών ίσο με 1;
9. Ποιο είναι το  $\kappa$  όταν η εξίσωση  $2x^2 + \kappa(x - 6) = 0$  έχει ρίζες των οποίων το γινόμενο είναι  $-\frac{1}{2}$ ;
10. Ποιο είναι το  $\kappa$  όταν η εξίσωση  $6x^2 + 7x + \kappa = 0$  έχει μια ρίζα διπλή;
11. Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $2x^2 - 5x - 7 = 0$ , ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι αληθής;

$$\begin{array}{lll} \text{A. } \rho_1 + \rho_2 = -\frac{5}{2} & \text{B. } \rho_1\rho_2 = \frac{7}{5} & \\ \text{Γ. } \rho_1\rho_2 = -\frac{7}{5} & \text{Δ. } \rho_1 + \rho_2 = \frac{5}{2} & \text{E. } \rho_1\rho_2 = \frac{7}{2} \end{array}$$

12. Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $\gamma \neq 0$ , τότε η εξίσωση  $\gamma x^2 + \beta x + 1 = 0$  έχει για ρίζες της:

$$\begin{array}{lll} \text{A. } \rho_1, -\rho_2 & \text{B. } -\rho_1, \rho_2 & \\ \text{Γ. } \rho_1, \frac{1}{\rho_2} & \text{Δ. } \frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2} & \text{E. } \frac{1}{\rho_1}, \rho_2 \end{array}$$

13. Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι ρίζες της  $x^2 + (\alpha + \gamma)x + \alpha\gamma - \beta^2 = 0$  να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης  $y^2 - (\rho_1 + \rho_2)y + \rho_1\rho_2 + \beta^2 = 0$  χωρίς να χρησιμοποιηθεί ο τύπος που λύνει τη δευτεροβάθμια εξίσωση.

14. Δίνεται η εξίσωση:  $9x^2 + 6x + \gamma = 0$  με ρίζες  $\rho_1, \rho_2$ . Εάν γνωρίζουμε ότι  $\rho_1 - \rho_2 = 2$ ,

α) να βρείτε τις ρίζες  $\rho_1$  και  $\rho_2$

β) να βρείτε το  $\gamma$ .

16. Να σχηματίσετε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού που να δέχεται ως ρίζες τους αριθμούς:

α)  $x_1 = 4, x_2 = 3$

β)  $x_1 = 2, x_2 = \mu$

γ)  $x_1 = 2\mu + 3, x_2 = 3 - 2\mu$

δ)  $x_1 = 5 + \sqrt{2}, x_2 = 5 - \sqrt{2}$

ε)  $x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

στ)  $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}, x_2 = \frac{\beta}{\alpha} \quad \alpha\beta \neq 0$

ζ)  $x_1 = \frac{2\mu + 1}{\mu}, x_2 = \frac{3\mu + 1}{\mu} \quad \mu \neq 0$

16. Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$  να σχηματίσετε μια άλλη εξίσωση που να δέχεται ως ρίζες τους αριθμούς  $k\rho_1, k\rho_2$ , όπου  $k$  ακέραιος αριθμός.

17. Αν οι παρακάτω εξισώσεις έχουν δύο ρίζες άνισες, ποια απ' αυτές έχει ρίζες αντίστροφους αριθμούς;

A.  $-4x^2 - \beta x + 4 = 0$       B.  $4x^2 + \beta x - 4 = 0$

Γ.  $x^2 + \beta x - 1 = 0$       Δ.  $x^2 - \beta x + 1 = 0$       E.  $-x^2 - \beta x + 1 = 0$



• **ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma, \quad a \neq 0$$

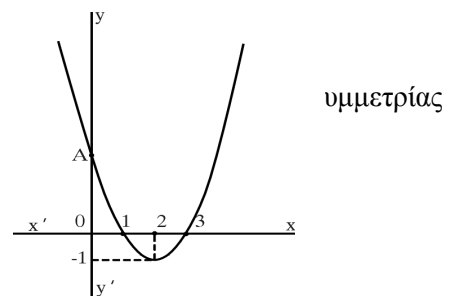
1. Σε ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις αντιστοιχεί ο πίνακας:

x	1	
f(x)	↗	↘
	7	

- A.  $f(x) = x^2 - 2x + 6$
- B.  $f(x) = 3x^2 - 3x + 4$
- Γ.  $f(x) = -4x^2 + 8x - 5$
- Δ.  $f(x) = x^2 + 2x + 6$
- E.  $f(x) = -x^2 + 2x + 6$

2. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της  $y = x^2 + bx + \gamma$ .

- α) Να βρεθούν τα  $\beta, \gamma$ .
- β) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της  $y = x^2 + bx + \gamma$ ;
- γ) Ποια είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης;
- δ) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του A.
- ε) Για ποιες τιμές του x το y ισούται με 7;



3. Χρησιμοποιώντας την έννοια της μεταβολής της συνάρτησης  $y = x^2$  και την καμπύλη που την παριστάνει γραφικά, συμπληρώστε:

- Αν  $x < -5$  τότε  $x^2$  .....
- Αν  $x > \sqrt{2}$  τότε  $x^2$  .....
- Αν  $1 < x < \sqrt{5}$  τότε .....  $x^2$  .....
- Αν  $-2 < x < 0$  τότε .....  $x^2$  .....
- Αν  $-2 < x < 3$  τότε .....  $x^2$  .....
- Αν  $x^2 < 4$  τότε ..... x .....
- Αν  $x^2 > 1$  τότε ..... x ή x.....
- Αν έχουμε  $x > -1$  τότε μπορούμε να πούμε ότι  $x^2 > 1$ ;
- Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

• **ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ  
ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ**

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α)  $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

β)  $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

γ)  $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$

δ)  $6y^4 + 17y^2 = -12$

ε)  $x^4 - 2(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2 = 0$

2. Να σχηματίσετε διτετράγωνη εξίσωση που να έχει ρίζες  $\pm\sqrt{3}$  και  $\pm\sqrt{2}$ .

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α)  $|x|^2 + 2|x| + 1 = 0$

β)  $|x - 1|^2 - 4 = 3|x - 1|$

4. Να λυθεί το σύστημα:

$$x^2 + y^2 = 113$$

$$xy = 56$$

$$x - y = 1$$



5. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} y = 2x^2 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ x^2 + y^2 = 52 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x + y = \frac{5}{2} \\ \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{35}{6} \end{cases}$$

• **ΤΡΟΠΗ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ  $ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$  ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ**

1. Δίνονται τα τριώνυμα:

$$2x^2 + 3x + 1$$

$$-x^2 + 6x - 1$$

$$2x^2 - 4x + 1$$

$$x^2 - (2 + \sqrt{5})x + 2\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{3}x^2 - 2x + 1$$

α) Ελέγξτε αν καθένα από αυτά έχει δύο ρίζες.

β) Υπολογίστε τις ρίζες.

γ) Τρέψτε τα τριώνυμα αυτά σε γινόμενα.

2. α) Βρείτε το  $\lambda$  έτσι ώστε η εξίσωση  $x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 + 5\lambda + 10 = 0$  να έχει ρίζα το 1. Στη συνέχεια:

β) Βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

γ) Τρέψτε το πρώτο μέλος της εξίσωσης σε γινόμενο.

3. Απλοποιήστε τις κλασματικές παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{x^2 - 6x + 9}{x + 3}$$

$$\beta) \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 + x - 12}$$

$$\gamma) \frac{4x^2 - 9}{4x^2 - 12x + 9}$$

$$\delta) \frac{x^2 + 3x - 18}{x^2 + 4x - 12}$$

$$\varepsilon) \frac{x^2 - \alpha x - 6\alpha^2}{x^2 - 7\alpha x + 12\alpha^2}$$

$$\sigma\tau) \frac{x^2 - 25}{x^2 - 6x + 5}$$

$$\zeta) \frac{x^3 + 2\alpha a^2 + \alpha x^2}{\alpha x^2 - \alpha^3}$$

4. Συνδέστε με μια γραμμή κάθε τριώνυμο της στήλης Α με την αντίστοιχη παραγοντοποιημένη μορφή του της στήλης Β:

στήλη Α	στήλη Β
$x^2 + (\alpha - \beta)x - \alpha\beta$	$(x - \alpha)(x - \beta)$
$x^2 - (\alpha - \beta)x - \alpha\beta$	$(x + \alpha)(x - \beta)$
$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$	$(x - \alpha)(x + \beta)$
$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$	$(x + \alpha)(x + \beta)$
	$(\alpha - x)(x + \beta)$
	$(\alpha + x)(\beta - x)$

5. Οι ρίζες του τριωνύμου  $ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$  είναι  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -2$  και η παραγοντοποιημένη μορφή του  $(1 - x)(x + 2)$ . Τότε ο  $a$  ισούται με:  
 Α. 1            Β. - 1            Γ. 2            Δ. - 2            Ε. 3

• **ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ  $ax^2 + bx + \gamma$   $a \neq 0$**

1. Δίνεται το τριώνυμο  $4x^2 + 2x - 1$   
 α) Για ποιες τιμές του  $x$  το τριώνυμο γίνεται ίσο με 0;  
 β) Για ποιες τιμές του  $x$  το τριώνυμο γίνεται θετικό;  
 γ) Για ποιες τιμές του  $x$  το τριώνυμο γίνεται αρνητικό;
2. Το ίδιο για το τριώνυμο  $3x^2 + 3x + 2$ .
3. Για ποιες τιμές του  $x$  καθεμιά από τις παρακάτω ρίζες:  
 $\sqrt{2x^2 - 7x + 3}$ ,  $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ ,  $\sqrt{x^2 + 9x + 18}$ ,  $\sqrt{2x^2 - x + 1}$   
 έχει έννοια πραγματικού αριθμού;
4. Δίνεται το τριώνυμο  $x^2 - 8x + 12 = 0$ .  
 α) Ποιες είναι οι ρίζες του;  
 β) Όταν το  $x$  μεταβάλλεται από 3 έως 5, το πρόσημο του  $x^2 - 8x + 12$  μεταβάλλεται;  
 Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
5. Να λυθούν οι ανισώσεις:  
 α)  $-x^2 + 5x - 6 \leq 0$   
 β)  $-x^2 + 4x - 4 > 0$   
 γ)  $-x^2 + x - 1 < 0$   
 δ)  $2x^2 + x - 15 > 0$   
 ε)  $5x^2 + 3x - 2 < 3x^2 - 2x + 10$   
 στ)  $6x^2 - 8 < 2x^2 - 3x + 2$   
 ζ)  $x^2 + 1 > 0$   
 η)  $4x^2 + 5 > 0$
6. Ναδειχθεί ότι η ανίσωση  $x^2 + 6ax + 9a^2 + 4 > 0$  αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ .
7. Να βρεθούν οι τιμές του  $\mu$  για τις οποίες το τριώνυμο  $(\mu - 5)x^2 - 3x + 4$  είναι θετικό για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ .
8. Αν το τριώνυμο  $f(x) = x^2 + bx + \gamma$  έχει  $\Delta < 0$ , ποια από τις παρακάτω ανισώσεις αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ ;  
 Α.  $f(x) < 0$             Β.  $-3f(x) \geq 0$             Γ.  $(x^2 + 1) \cdot f(x) > 0$   
 Δ.  $\frac{f(x)}{x^2 + 1} < 0$             Ε.  $\frac{f(x)}{x^2 + 1} \leq 0$
9. Το τριώνυμο  $f(x) = x^2 - 5x - 6$  έχει ρίζες τους αριθμούς - 1 και 6.

Ποια από τις παρακάτω ανισότητες είναι σωστή;

A.  $f(0, 1999) > 0$

B.  $f(0, 1999) \geq 0$

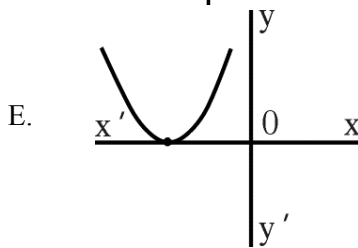
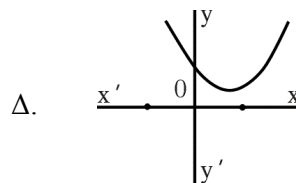
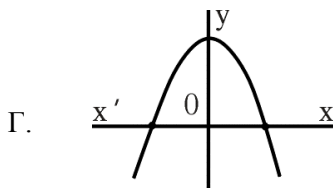
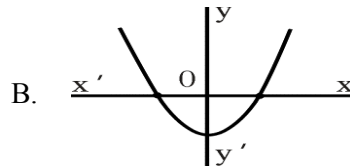
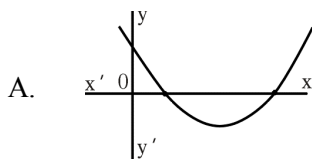
Γ.  $f(1999) < 0$

Δ.  $f(1999) \leq 0$

E.  $f(-1999) > 0$

10. Οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιπροσωπεύουν συναρτήσεις γενικής μορφής  $y = ax^2 + bx + \gamma$ ,  $a \neq 0$

Σε ποια από αυτές είναι  $\Delta > 0$  και  $a < 0$ ;



11. Στον παρακάτω άξονα είναι τοποθετημένες οι ρίζες  $\rho_1, \rho_2$  της εξίσωσης

$-x^2 + bx + \gamma = 0$  και οι αριθμοί  $-7, -2, 5, 10$ .



Αν  $f(x) = -x^2 + bx + \gamma$  να συμπληρώσετε το κατάλληλο σύμβολο ( $>$ ) ή ( $<$ ) στα παρακάτω κενά:

$f(-7)$  ..... 0

$f(-2)$  ..... 0

$f(5)$  ..... 0

$f(10)$  ..... 0

12. Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης  $x^2 - 18x + \gamma = 0$  γίνεται μέγιστο όταν ο  $\gamma$  ισούται με:

A.  $-18$

B.  $18$

Γ.  $18^2$

Δ.  $81$

E.  $-81$

• **ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ  $A(x) \cdot B(x) \cdot \Gamma(x) \dots \Phi(x) \geq 0$**

1. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α)  $(x - 1)(x - 2) > 0$

β)  $(x + 1)(x + 3) < 0$

γ)  $(x^2 + 1)(x - 6) > 0$

δ)  $(x - 5)(x + 1)^2(x + 2)(x - 3) < 0$

ε)  $x(x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 5x + 3)(x^2 + x + 1) < 0$

στ)  $(x + 2)^2(2x^2 - 5x - 3)(3x^2 + 2x + 1) > 0$

ζ)  $x^3 - x^2 - 20x < 0$

η)  $4x^3 - 20x^2 + 18x < 0$

• **ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ  $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$  ή  $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$**

1. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) (i)  $\frac{1}{x} > 0$       (ii)  $\frac{1}{x} < 0$

β)  $\frac{1}{x+2} > 0$

γ) (i)  $\frac{-3}{x^2} > 0$       (ii)  $\frac{-3}{x^2} < 0$

δ)  $\frac{3x-1}{x+2} > 2$

ε)  $\frac{x^2+3x-4}{x(x+3)} < 0$

στ)  $\frac{4x}{3x-x^2} > \frac{1}{2}$

ζ)  $\frac{7x^2}{x^3+3x^2} > 0$

η)  $\frac{2x^2-4x+5}{x^2+2} > 1$

θ)  $\frac{x^2-4x+3}{x-2} > 0$

2. Να λυθεί η ανίσωση:  $\frac{2x}{x-1} + \frac{3x-1}{3x+1} < 2$

3. Ναδειχθεί ότι για κάθε  $x \in (1, 4)$  το κλάσμα  $A = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 2x + 1}$  είναι αρνητικό.

• **ΣΥΝΑΛΗΘΕΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ**

1. Για ποιες τιμές του  $x$  συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$x^2 - 8 < 0 \quad \text{και} \quad x^2 - 5x + 6 > 0$$

2. Για ποιες τιμές του  $x$  συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$-x^2 + 2x < -3$$

$$x^2 - 2x - 15 < 0$$

$$x - 2 > 0$$

3. Για ποιες τιμές του  $x$  ισχύει η διπλή ανίσωση:

$$-3 < -x^2 + 2x + 3 < 0$$

• **ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**

1. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις  $x$  και  $y$  είναι 24 cm. Αν οι διαστάσεις του ορθογωνίου αυξηθούν και οι δύο κατά 2 cm, το εμβαδόν του θα γίνει 60 cm<sup>2</sup>. Να βρεθούν τα  $x$ ,  $y$ .

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Τα μήκη των τριών πλευρών του είναι:

$$x, \quad (x + 3), \quad (x + 6)$$

α) Αποδείξτε ότι το  $x$  είναι λύση της εξίσωσης  $x^2 - 6x - 27 = 0$

β) Λύστε την εξίσωση  $x^2 - 6x - 27 = 0$  και εξετάστε αν και οι δύο λύσεις της είναι λύσεις του προβλήματος.

**ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ**  
**ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΔΟΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ**  
**ΣΤΟ 3ο ΚΑΙ ΤΟ 4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ**

Τα θέματα που συνθέτουν τα σχέδια κριτηρίων που ακολουθούν αντλήθηκαν από τις ερωτήσεις του σχεδιασμού αξιολόγησης του 3ου και 4ου κεφαλαίου της Άλγεβρας, τις ερωτήσεις του παρόντος φυλλαδίου και τις ασκήσεις του διδακτικού βιβλίου της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου.

Φυσικά, όπως αναφέρθηκε και στο εισαγωγικό σημείωμα, ο διδάσκων έχει την ελευθερία και την ευχέρεια να κάνει τους δικούς του σχεδιασμούς και να αντλεί θέματα από κάθε πηγή.

**ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ**  
**ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ**  
**ΣΤΟ 3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**

**ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ:** Διερεύνηση Συστήματος δύο γραμμικών  
 εξισώσεων με δύο αγνώστους  
**1<sup>ο</sup> ΣΧΕΔΙΟ**

*Διάρκεια:* 1 διδακτική ώρα

*Θέματα:* 5

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ	ΘΕΜΑΤΑ
1 μονάδα 1 μονάδα 2 μονάδες	<p><b>1.</b> Δίνεται το σύστημα: <math>2x + 5y = 0</math>  <math>3x + 4y = 0</math></p> <p>α) Το σύστημα αυτό έχει μια προφανή λύση. Ποια;                      β) Υπολογίστε την ορίζουσά του D.                      γ) Μπορεί το παραπάνω σύστημα να έχει άλλη λύση;                      Δικαιολογήστε την απάντησή σας.</p>
5 μονάδες	<p><b>2.</b> Να λυθεί το σύστημα: <math>(1 - \lambda) y = 3</math>  <math>x + 4y = -1</math></p>
3 μονάδες 3 μονάδες	<p><b>3.</b> Δίνεται το σύστημα: <math>ax - y = -\beta</math>  <math>4x - y = -3</math></p> <p>Βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών                      α και β:</p> <p>α) το σύστημα δεν έχει λύση                      β) το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.</p>



ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ	ΘΕΜΑΤΑ	
	<p>4. Κάθε πρόταση της πρώτης στήλης να συνδεθεί με την κατάλληλη τιμή του <math>\lambda</math> που βρίσκεται στη δεύτερη στήλη.</p>	
	<b>στήλη (Α)</b>	<b>στήλη (Β)</b>
2 μονάδες	<p>Το σύστημα <math>x + 3y = 10</math> <math>2x - \lambda y = 2</math> είναι αδύνατο</p>	<p><math>\lambda = 3</math>  <math>\lambda = -6</math></p>
	<p>Το σύστημα <math>x + 3y = \lambda - 1</math> <math>2x + 6y = 4</math> έχει άπειρες λύσεις.</p>	<p><math>\lambda = 0</math>  <math>\lambda = -3</math></p>
	<p>Η ορίζουσα = 15</p>	<p><math>\lambda = 2</math></p>
	<p>Η γραμμική εξίσωση <math>\lambda x + \lambda(\lambda - 3)y = 4</math> δεν παριστάνει ευθεία.</p>	<p><math>\lambda = 1</math></p>

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ	ΘΕΜΑΤΑ
3 μονάδες	<p><b>5. Συμπληρώστε τα κενά με μια εξίσωση:</b></p> <p>α) Το σύστημα <math>2x + 3y = 8</math>  .....  είναι αδύνατο.</p> <p>β) Το σύστημα <math>x + 2y = 8</math>  .....  έχει λύση το ζεύγος (2, 3).</p> <p>γ) Το σύστημα <math>x + 2y = 5</math>  .....  έχει άπειρες λύσεις.</p> <p>δ) Το σύστημα <math>2x - y = 10</math>  <math>2x - y = 13</math>  είναι .....</p> <p>ε) Το σύστημα <math>2x + y = 12</math>  .....  έχει λύση πάνω στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας  ενός ορθογωνίου συστήματος αξόνων.</p> <p>στ) Το σύστημα <math>2x + 5y = 7</math>  .....  έχει για λύση ζεύγος αντιθέτων αριθμών.</p>

**ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ:** Διερεύνηση Συστήματος δύο γραμμικών  
εξισώσεων με δύο αγνώστους  
**2<sup>ο</sup> ΣΧΕΔΙΟ**

*Διάρκεια:* 1 διδακτική ώρα

*Θέματα:* 4

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ	ΘΕΜΑΤΑ
2 μονάδες 3 μονάδες 3 μονάδες	<p><b>1.</b> Δίνεται το σύστημα: <math>2x - 3y = 11 - \lambda</math> <math>x + 5y - \lambda = 7, \quad \lambda \in \mathbb{R}</math></p> <p>α) Αποδείξτε ότι το σύστημα έχει λύση για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό <math>\lambda</math>.</p> <p>β) Υπολογίστε τα <math>x</math> και <math>y</math>.</p> <p>γ) Για ποια τιμή του <math>\lambda</math> η λύση <math>(x, y)</math> που βρήκατε στο (β) επαληθεύει τη σχέση: <math>x + y =</math></p>
7 μονάδες  4 μονάδες  1,5 μονάδες 1,5 μονάδες	<p><b>2.</b> Για τις διάφορες τιμές του <math>\mu</math> να λύσετε το σύστημα:</p> $(\mu - 2)x + 5y = 5$ $x + (\mu + 2)y = 5$ <p><b><i>Η άσκηση αυτή μπορεί να αναλυθεί σε υποερωτήματα ως εξής:</i></b></p> <p>Δίνεται το σύστημα: <math>(\mu - 2)x + 5y = 5</math> <math>x + (\mu + 2)y = 5</math></p> <p>α) Αποδείξτε ότι το σύστημα αυτό έχει μία λύση για οποιαδήποτε πραγματική τιμή του <math>\mu</math> διάφορη του <math>+ 3</math> και του <math>- 3</math>.</p> <p>β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα, όταν:</p> <p>i) <math>\mu = 3</math></p> <p>ii) <math>\mu = - 3</math></p>

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ	ΘΕΜΑΤΑ
3 μονάδες	<p><b>3.</b> Να συμπληρώσετε καθένα από τα κενά με μία από τις παρακάτω φράσεις:</p> <p>α) έχει μια λύση,  β) έχει άπειρες λύσεις,  γ) είναι αδύνατο.</p> <p>A. <math>0x + 0y = 0</math>  <math>0x + y = 0</math>  .....</p> <p>B. <math>0x + 0y = 1</math>  <math>0x + 5y = 7</math>  .....</p> <p>Γ. <math>0x + 0y = 9</math>  <math>0x + 0y = 0</math>  .....</p> <p>Δ. <math>x + 0y = 5</math>  <math>0x + y = 1</math>  .....</p>
2 μονάδες	<p><b>4.</b> Το σύστημα <math>-3x + 2y = \alpha</math> <math>\alpha \neq 0</math>  <math>6x - 4y = \kappa</math>  δέχεται άπειρες λύσεις για μια από τις παρακάτω τιμές του <math>\kappa</math>:</p> <p>A. 1    B. -2    Γ. 3    Δ. <math>\alpha</math>    E. 0</p> <p>Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.</p>

**ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ**

**ΣΤΟ 4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**

**ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ:** Άθροισμα και γινόμενο των ριζών  
της εξίσωσης  $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ,  $a \neq 0$   
**1<sup>ο</sup> ΣΧΕΔΙΟ**

*Διάρκεια:* Ολιγόλεπτο

*Θέματα:* 3

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ	ΘΕΜΑΤΑ		
5 μονάδες	<b>1.</b> Να συμπληρωθεί ο πίνακας:		
	Εξισώσεις της μορφής	άθροισμα ριζών	γινόμενο ριζών
	$ax^2 + bx + \gamma = 0$	$\rho_1 + \rho_2$	$\rho_1 \cdot \rho_2$
	$-7x^2 - 8x + 7 = 0$		
	$x^2 + 8x - 7 = 0$		
	$-x^2 - 8x - 7 = 0$		
8 μονάδες	<b>2.</b> Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x - \lambda^2 - 5 = 0$ με ρίζες $x_1, x_2$ . Να βρεθεί ο $\lambda$ , έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$ .		
	<b>3.</b> Αν $\rho_1, \rho_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ , να σχηματίσετε μια άλλη εξίσωση που να δέχεται ως ρίζες τους αριθμούς $k\rho_1, k\rho_2$ , όπου $k$ ακέραιος αριθμός.		
7 μονάδες			

**ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: Εξισώσεις - Ανισώσεις Δευτέρου Βαθμού  
(ανακεφαλαιωτικό)  
2<sup>ο</sup> ΣΧΕΔΙΟ**

*Διάρκεια: 1 διδακτική ώρα*

*Θέματα: 5*

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ	ΘΕΜΑΤΑ
1 μονάδα 2 μονάδα 2 μονάδες	<b>1.</b> Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 5x + 10 = 0$ α) Για ποια τιμή του $\lambda$ έχει μία ρίζα; β) Για ποια τιμή του $\lambda$ έχει μία ρίζα διπλή; γ) Να βρεθεί η διπλή ρίζα.
5 μονάδες	<b>2.</b> Τα μήκη των τριών πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι τρεις διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.
5 μονάδες	<b>3.</b> Να βρείτε τις τιμές του $x$ για τις οποίες ισχύει: $2x - 1 < x^2 - 4 < 12$

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ	ΘΕΜΑΤΑ	
	<b>4.</b> Κάθε στοιχείο της στήλης (A) αντιστοιχεί με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (B).	
3 μονάδες	<b>Στήλη (A)</b> σχέσεις	<b>στήλη (B)</b> $ax^2 + bx + \gamma > 0$
	$\Delta < 0$ και $a < 0$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• αληθεύει για κάθε <math>x</math></li> </ul>
	$\Delta < 0$ και $a > 0$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• αληθεύει για κάθε <math>x</math> που βρίσκεται μεταξύ των ριζών του τριωνύμου</li> </ul>
	$\Delta > 0$ και $a \neq 0$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• αληθεύει για κάθε <math>x</math> εκτός των ριζών του τριωνύμου</li> <li>• δεν αληθεύει για κανένα <math>x</math></li> <li>• δεν μπορούμε να απαντήσουμε για ποια <math>x</math> αληθεύει η ανίσωση</li> </ul>

<b>B A Θ M O Λ O Γ I A</b>	<b>ΘΕΜΑΤΑ</b>	
	<b>5.</b> Κάθε στοιχείο της στήλης (A) αντιστοιχεί με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (B). Συνδέστε κατάλληλα με μια γραμμή.	
2 μονάδες	<b>Στήλη (A)</b> σχέσεις	<b>στήλη (B)</b> είδος ριζών της $ax^2 + bx + \gamma = 0$
	$\Delta < 0$ $\Delta > 0, \quad > 0$ και $- > 0$ $\Delta = 0$ $\Delta < 0$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• έχει δύο ρίζες πραγματικές και αρνητικές</li> <li>• έχει δύο ρίζες πραγματικές και θετικές</li> <li>• έχει δύο ρίζες πραγματικές και ετερόσημες</li> <li>• έχει ρίζες πραγματικές και ίσες</li> <li>• δεν έχει ρίζες πραγματικές</li> <li>• δεν μπορούμε να απαντήσουμε για το είδος των ριζών της εξίσωσης</li> </ul>

**ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ**  
**ΤΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΔΟΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ**

Αφού συνταχθεί ένα κριτήριο αξιολόγησης της επίδοσης των μαθητών και προκαθοριστούν οι βαθμολογικές μονάδες για κάθε ερώτηση ή υποερώτημα χωριστά, τότε αυτό μπορεί να δοθεί πλέον στην τάξη.

Από την αξιολόγηση - βαθμολόγηση των γραπτών ο διδάσκων θα πάρει χρήσιμες πληροφορίες που θα τον βοηθήσουν να οργανώσει πιο αποτελεσματικά τη διδασκαλία του.

Η βαθμολόγηση ενός κριτηρίου αξιολόγησης της επίδοσης των μαθητών γίνεται αρχικά χωριστά για κάθε ερώτηση ή αντίστοιχα υποερώτημα και αφού προστεθούν οι επιμέρους βαθμολογίες βρίσκειται η συνολική βαθμολογία κάθε γραπτού.

Για τη μελέτη του βαθμού ευκολίας κάθε ερώτησης ή υποερωτήματος (υπόδειγμα σελ. 102) υπολογίζεται ο αριθμός (ή το ποσοστό %) των μαθητών που απάντησαν σωστά στη συγκεκριμένη ερώτηση.

Ερωτήσεις που απαντήθηκαν σωστά από λίγους μόνο μαθητές πρέπει να προβληματίσουν το διδάσκοντα, ειδικότερα οι ερωτήσεις που απαντώνται σωστά από ελάχιστους ή και κανένα μαθητή. Η αποτυχία μιας ολόκληρης τάξης σε μια ερώτηση μπορεί να οφείλεται σε διάφορους λόγους, όπως:

- Η ερώτηση είναι πάνω από τις δυνατότητες της συγκεκριμένης τάξης.
- Η διδασκαλία που προηγήθηκε δεν προετοίμασε κατάλληλα τους μαθητές για να απαντήσουν στην ερώτηση αυτή.
- Η διατύπωση της ερώτησης δεν ήταν η κατάλληλη.



Από πολλούς εκπαιδευτικούς προτείνεται ακόμη σε κάθε κριτήριο αξιολόγησης της επίδοσης του μαθητή να περιέχεται και ένα πολύ μικρό ποσοστό πολύ εύκολων ερωτήσεων που μάλιστα να βρίσκονται στην αρχή κάθε κριτηρίου ώστε να μπορούν να απαντούν σωστά σ' αυτές όλοι οι μαθητές και να κρατούν με τον τρόπο αυτό μια θετική στάση απέναντι στο μάθημα.

Η συνολική βαθμολογία ενός κριτηρίου αξιολόγησης ανάλογα με τη μελέτη της κατανομής της επίδοσης των μαθητών στο συγκεκριμένο κριτήριο μας δίνει τη συνολική εικόνα της τάξης και ταυτόχρονα μας επιτρέπει να διαπιστώσουμε αν το κριτήριο αξιολόγησης που δόθηκε ήταν κατάλληλο για την τάξη αυτή.

Μετά τη βαθμολόγηση και τη μελέτη ενός κριτηρίου αξιολόγησης, αφού συμπληρωθούν οι πίνακες (βλέπε τις επόμενες σελίδες) καλό είναι να ταξινομούνται και να φυλάσσονται από το διδάσκοντα έτσι ώστε να δημιουργηθεί μια προσωπική συλλογή στοιχείων αξιολόγησης, η οποία θα μπορεί να αξιοποιηθεί.

**ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ**

**ΤΗΣ ΕΠΙΔΟΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ**

**ΣΧΟΛΕΙΟ:** .....

**ΤΑΞΗ:** .....

**ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΑΘΗΤΩΝ:** .....

**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** .....

**ΩΡΑ:** .....

**ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ:**.....

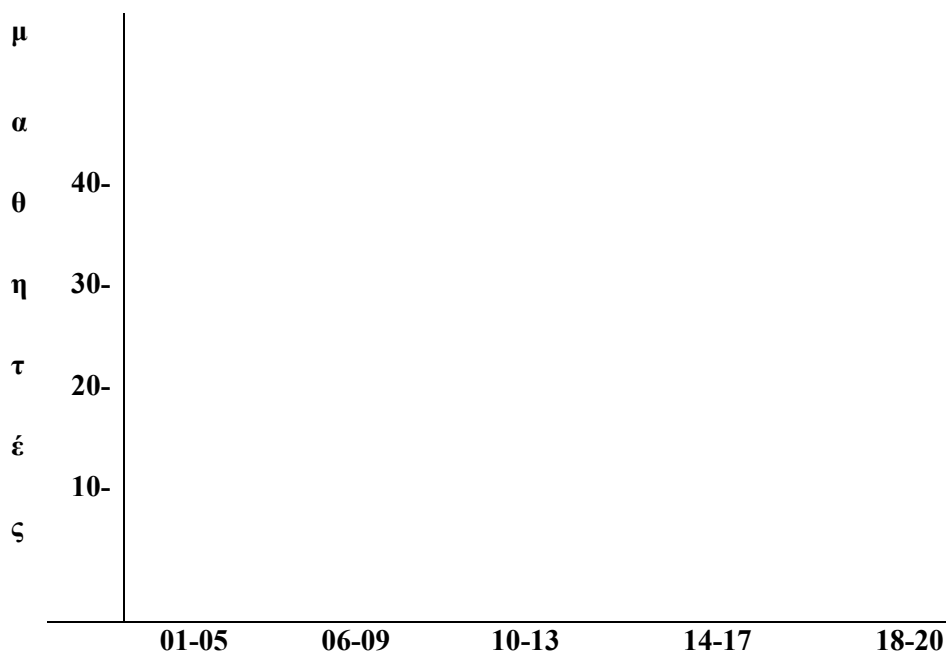
**ΔΙΑΡΚΕΙΑ:** .....

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ	ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ*	ΜΑΘΗΤΕΣ ΠΟΥ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ	
		Αριθμός	Ποσοστό %
.... μονάδες	1.		
.... μονάδες	2.		
.... μονάδες	3.		
<b>ΣΥΝΟΛΟ</b> .... μονάδες			

\* Παρατήρηση: Το πλήθος των ερωτήσεων ποικίλει ανάλογα με τη χρονική διάρκεια του κριτηρίου και το είδος των ερωτήσεων.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΤΑ ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ					
Βαθμολογία	από 01 - 05	από 06 - 09	από 10 - 13	από 14 - 17	από 18 - 20
Αριθμός μαθητών					
Ποσοστό % μαθητών					

**ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ**



**β α θ μ ο λ ο γ ί α**

## **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο**

Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία



• ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

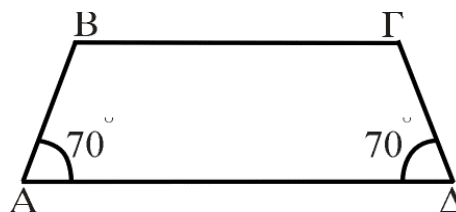
1. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης (Α) με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β):

στήλη (Α) τετράπλευρα	στήλη (Β) ιδιότητες
<ul style="list-style-type: none"> <li>• ορθογώνιο παραλληλόγραμμο</li> <li>• τραπέζιο</li> <li>• ρόμβος</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Δύο απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και άνισες</li> <li>• Οι διαγώνιοι είναι ίσες και τέμνονται κάθετα</li> <li>• Είναι παραλληλόγραμμο και όλες οι πλευρές του είναι ίσες</li> <li>• Το άθροισμα των γωνιών του είναι <math>400^\circ</math></li> <li>• Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.</li> </ul>

2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα με δύο ομοιότητες που αφορούν πλευρές, γωνίες ή διαγωνίους [στήλη (B)] και δύο διαφορές [στήλη (Γ)] μεταξύ των ζευγών των σχημάτων που αναγράφονται στη στήλη (A).

στήλη (A) σχήματα	στήλη (B) ομοιότητες	στήλη (Γ) διαφορές
Τετράγωνο - ρόμβος	i)..... ..... ii)..... .....	i)..... ..... ii)..... .....
Τετράγωνο-ορθογώνιο	i)..... ..... ii)..... .....	i)..... ..... ii)..... .....
Ορθογώνιο - ρόμβος	i)..... ..... ii)..... .....	i)..... ..... ii)..... .....

3. Το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ένα τραπέζιο.



Ένα άλλο τραπέζιο,  $EZH\Theta$  (το οποίο δεν φαίνεται), είναι ίσο (έχει ίδιο σχήμα και μέγεθος) με το  $AB\Gamma\Delta$ . Οι γωνίες  $E$  και  $\Theta$  είναι  $70^\circ$  η καθεμιά. Ποιο από τα παρακάτω θα μπορούσε να είναι το σωστό;

- α)  $EZ = AB$
- β) Η γωνία  $Z$  είναι ορθή
- γ) Όλες οι πλευρές του  $EZH\Theta$  έχουν το ίδιο μήκος
- δ) Η περίμετρος του  $EZH\Theta$  είναι 3 φορές η περίμετρος του  $AB\Gamma\Delta$ .
- ε) Οι γωνίες  $Z$  και  $H$  είναι παραπληρωματικές.

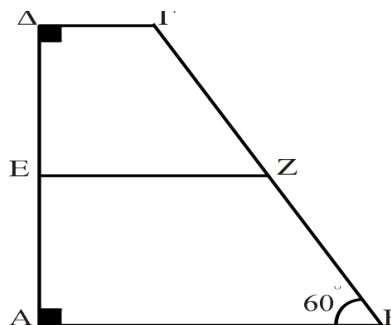
*Δόθηκε στην 3<sup>η</sup> Διεθνή Έρευνα για τα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες (I.E.A.).*

4. Στο τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  είναι

$$A = \Delta = 90^\circ \text{ και } B = 60^\circ.$$

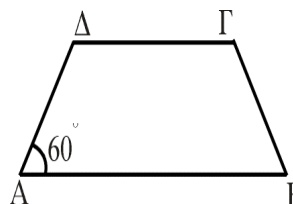
Αν  $\Gamma\Delta = 2x$  και  $B\Gamma = 8x$ , η διάμεσος  $EZ$  του τραπέζιου ισούται με:

- α)  $3x$       β)  $4x$       γ)  $5x$
- δ)  $6x$       ε)  $7x$



5. Στο ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $AB = 5x$ ,  $\Delta\Gamma = 3x$  και  $A = 60^\circ$ . Η περίμετρος του τραπέζιου είναι:

- α)  $10x$       β)  $11x$       γ)  $12x$
- δ)  $13x$       ε)  $14x$



6. Για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο πρέπει:

- α) Να έχει δύο γωνίες ορθές
- β) Οι διαγώνιοί του να διχοτομούνται
- γ) Να είναι παραλληλόγραμμο με μια γωνία ορθή
- δ) Να έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες
- ε) Να έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

7. Ένα παραλληλόγραμμο **δεν** είναι ρόμβος όταν:

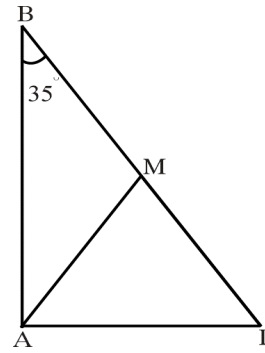
- α) Δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες
- β) Οι διαγώνιοί του τέμνονται καθέτως
- γ) Οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες
- δ) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες



ε) Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.

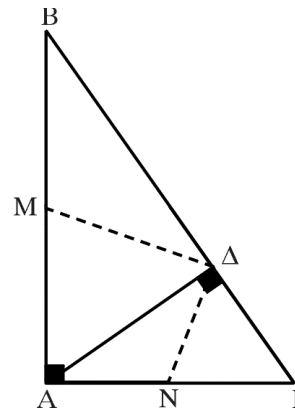
8. Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $A = 90^\circ$  και  $B = 35^\circ$ .  
Αν  $AM$  διάμεσος του  $AB\Gamma$  τότε η γωνία  $AMB$  ισούται με:

- α)  $55^\circ$       β)  $70^\circ$       γ)  $110^\circ$   
δ)  $100^\circ$       ε)  $125^\circ$



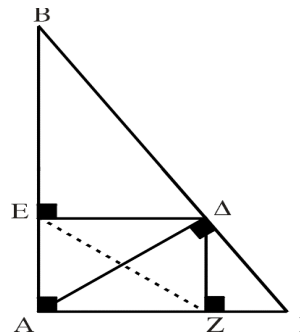
9. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο στο  $A$  και το  $AD$  ύψος του. Αν  $M$  είναι μέσο της  $AB$  και  $N$  μέσο της  $AG$  τότε η περίμετρος του τετραπλεύρου  $AM\Delta N$  ισούται με:

- α)  $AG + B\Gamma$       β)  $AB + B\Gamma$   
γ)  $AB + AG$       δ)  $2AM$   
ε)  $AB + AG + B\Gamma$



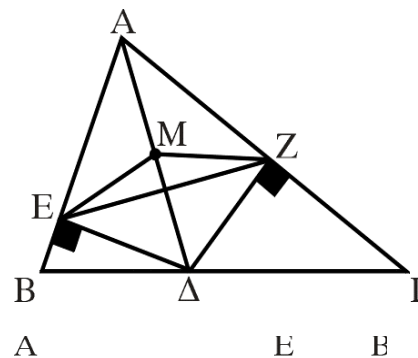
10. Αν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο στο  $A$  και  $AD \perp B\Gamma$ ,  $\Delta Z \perp AG$ ,  $\Delta E \perp AB$ , τότε:

- α)  $EZ = \Delta Z$       β)  $EZ = AZ$   
γ)  $EZ = Z\Gamma$       δ)  $EZ = A\Delta$   
ε)  $EZ = \Delta\Gamma$



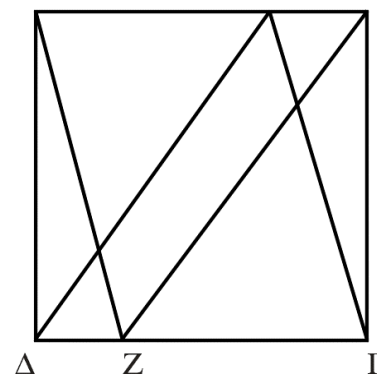
11. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι σκαληνό. Το  $\Delta$  είναι τυχαίο σημείο της  $B\Gamma$ .  
Αν  $\Delta E \perp AB$ ,  $\Delta Z \perp AG$  και  $M$  μέσο της  $A\Delta$ , τότε το πλήθος των ισοσκελών τριγώνων που ορίζονται από τα πέντε σημεία  $A, E, \Delta, Z, M$  είναι:

- α) 2      β) 3      γ) 4      δ) 5      ε) 6



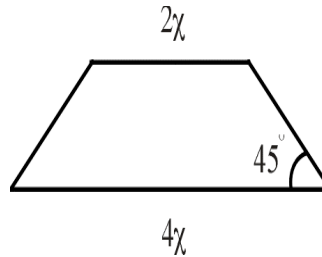
12. Αν στο διπλανό σχήμα το  $AB\Gamma\Delta$  είναι τετράγωνο και  $BE = \Delta Z$ , τότε το πλήθος των παραλληλογράμμων του σχήματος είναι:

- α) 1      β) 2  
γ) 3      δ) 4  
ε) 5



13. Αν το διπλανό τραπέζιο είναι ισοσκελές το ύψος του ισούται με:

- α)  $4x$       β)  $3x$     γ)  $2x$   
δ)  $x$         ε)  $\frac{x}{2}$



14. Να αποδείξετε ότι:

- α) τα μέσα των πλευρών ρόμβου είναι κορυφές ορθογωνίου.  
β) τα μέσα των πλευρών τετραγώνου είναι κορυφές άλλου τετραγώνου

15. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Φέρνουμε τις διαμέσους  $BM$  και  $\Gamma N$  και στις προεκτάσεις τους παίρνουμε ευθύγραμμα τμήματα  $M\Delta = BM$  και  $NE = \Gamma N$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α)  $A\Delta = AE$ , β) τα σημεία  $A, \Delta, E$  βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

16. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και από τις απέναντι κορυφές του  $A$  και  $\Gamma$  φέρνουμε καθέτους  $AE$  και  $\Gamma Z$  στη διαγώνιο  $B\Delta$ .

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $\Gamma B Z$  είναι ίσα.  
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $A\Gamma Z E$  είναι παραλληλόγραμμο.

17. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της ορθής γωνίας ορθογωνίου τριγώνου διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζεται από το ύψος και τη διάμεσο που αντιστοιχούν στην υποτείνουσα.

18. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Από το μέσο  $M$  της  $B\Gamma$  γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα  $M\Delta$  ίσο και παράλληλο προς την  $BA$  και ένα άλλο  $ME$  ίσο και παράλληλο προς την  $\Gamma A$  (τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη  $B\Gamma$  και το σημείο  $A$ ). Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα σημεία  $\Delta, A, E$  βρίσκονται στην ίδια ευθεία    β)  $\Delta A = AE$   
γ) Η περίμετρος του τριγώνου  $M\Delta E$  ισούται με την περίμετρο του  $AB\Gamma$ .

19. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφή το  $A$ . Από τυχαίο σημείο  $M$  της βάσης του γράφουμε  $ME$  παράλληλη προς την  $A\Gamma$  και  $M\Delta$  παράλληλη προς την  $AB$  (τα σημεία  $E$  και  $\Delta$  ανήκουν στις  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα).

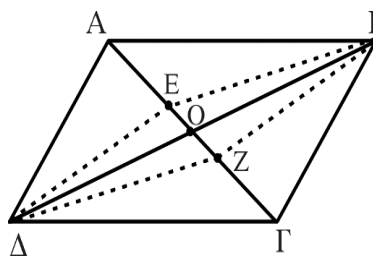
Να αποδείξετε ότι:

- α) Καθεμιά από τις ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ισούται με το άθροισμα δύο διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται.  
β) Το άθροισμα των περιμέτρων των δύο τριγώνων  $EBM$  και  $\Delta M\Gamma$  ισούται με την περίμετρο του  $AB\Gamma$ .

20. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφή το  $A$ . Στην προέκταση της  $B\Gamma$  παίρνουμε σημείο  $M$  από το οποίο γράφουμε ευθείες παράλληλες προς τις  $AB$  και  $A\Gamma$  που τέμνουν τις προεκτάσεις των  $A\Gamma$  και  $AB$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα.  
Να αποδείξετε ότι η διαφορά δύο πλευρών του σχηματιζόμενου παραλληλογράμμου ισούται με καθεμιά από τις ίσες πλευρές του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
21. Τα μήκη των πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι:  $15 - x$ ,  $x + 5$ ,  $2x + 10$ ,  $x + 15$ . Να υπολογισθεί ο  $x$ .
22. Τα μέτρα των διαδοχικών γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι:  $4x$ ,  $3x$ ,  $2x$ ,  $x$ .  
α) Να υπολογιστούν οι γωνίες του τετραπλεύρου.  
β) Να προσδιοριστεί το είδος του τετραπλεύρου.
23. Τέμνουμε ένα τρίγωνο με μια ευθεία. Πώς πρέπει να γίνει η τομή ώστε τα δύο σχήματα που θα προκύψουν τοποθετούμενα το ένα δίπλα στο άλλο κατάλληλα να δίνουν ένα παραλληλόγραμμο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
24. Έχουμε τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα. Αν τα τοποθετήσουμε κατάλληλα το ένα δίπλα στο άλλο, τι είδους τετράπλευρα κατασκευάζουμε; Να γίνουν τα σχήματα.
25. Σε τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $AB = A\Delta$ . Δείξτε ότι η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Delta$ .

26. Το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. Στην προέκταση της  $AB$  παίρνουμε τμήμα  $BE = AB$  και στην προέκταση της  $A\Delta$  τμήμα  $DZ = A\Delta$ . Αποδείξτε ότι η  $EZ$  διέρχεται από το  $\Gamma$ .

27. Το  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με  $O$  σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν  $OE = OZ$ , αποδείξτε ότι:  
α)  $\Delta E = BZ$   
β) το  $\Delta EBZ$  είναι παραλληλόγραμμο.



28. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $H$  σημείο της πλευράς  $B\Gamma$  τέτοιο ώστε  $BH = \frac{B\Gamma}{4}$ . Αν  $E$  είναι το μέσο της διαμέσου  $BA$ , αποδείξτε ότι  $HE \parallel \frac{AB}{4}$ .

29. Οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$  είναι ίσες. Αν  $K$ ,  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$  είναι τα μέσα των πλευρών του, αποδείξτε ότι το  $K\Lambda MN$  είναι ρόμβος.

- 30.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με γωνία  $B = 45^\circ$ . Από το μέσο  $M$  της  $B\Gamma$  φέρνουμε κάθετη πάνω στη  $B\Gamma$  και έστω  $E$  και  $Z$  τα σημεία στα οποία αυτή τέμνει τις  $AB$  και  $\Delta\Gamma$  (ή τις προεκτάσεις τους) αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι το  $EBZ\Gamma$  είναι τετράγωνο.
- 31.** Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με βάσεις  $AB, \Gamma\Delta$  και  $AB = \frac{3}{2} \Gamma\Delta$ . Αν  $E, Z, H$  είναι τα μέσα των  $\Gamma\Delta, BE, A\Delta$  αντιστοίχως, να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο  $HZ\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. Αν  $\Theta$  είναι το σημείο τομής της  $AB$  και της προέκτασης της  $\Gamma Z$ , να αποδειχθεί ότι το  $\Theta B$  ισούται με τη διαφορά των βάσεων του τραpezίου.
- 32.** Δίνεται το τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με βάσεις  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  και  $AB < \Gamma\Delta$ . Παίρνουμε τυχαίο σημείο  $M$  της  $\Gamma\Delta$  και το ενώνουμε με τα μέσα  $E$  και  $Z$  των  $A\Delta$  και  $B\Gamma$  αντιστοίχως. Στις προεκτάσεις των  $MZ$  και  $ME$  παίρνουμε αντιστοίχως ευθύγραμμα τμήματα  $ZH = ZM$  και  $E\Theta = EM$ . Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $\Theta, A, B, H$  είναι συνευθειακά.
- 33.** Σε ένα παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $A = 120^\circ$  και η διχοτόμος της γωνίας  $\Delta$  τέμνει την  $AB$  στο μέσον της  $E$ .
- I. Η γωνία  $\Delta$  είναι:  
 α)  $30^\circ$    β)  $40^\circ$    γ)  $50^\circ$    δ)  $60^\circ$    ε)  $70^\circ$
- II. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές
- III. Αν  $AB = \kappa \cdot A\Delta$  το  $\kappa$  ισούται με:  
 α) 1   β) 2   γ)  $\frac{1}{2}$    δ) 3   ε)  $\frac{1}{3}$
- IV. Αν  $EZ \perp \Delta\Gamma$  αποδείξτε ότι  $\Delta E = 2EZ$ .
- 34.** Κατασκευάστε κυρτό τετράπλευρο με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  ( $AB < \Gamma\Delta$ ) και  $A\Delta = B\Gamma$ . Από το  $\Delta$  φέρνουμε  $\Delta Z$  κάθετη στη  $B\Gamma$  και από τυχαίο σημείο της βάσης του  $\Delta\Gamma$ , έστω  $H$ , φέρνουμε κάθετη  $H\Theta$  στην  $A\Delta$ , την  $HE$  κάθετη στη  $B\Gamma$  και την  $HI$  κάθετη στη  $\Delta Z$ .
- α) Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  λέγεται .....
- β) Το τετράπλευρο  $HIZE$  είναι .....
- γ) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $H\Theta\Delta$  και  $\Delta IH$ .
- δ) Να συμπληρώσετε την ισότητα:  $\Delta\Theta = \dots = \dots$
- ε) Αποδείξτε ότι το άθροισμα  $\Delta\Theta + \Gamma E$  είναι σταθερό.
- 35.** Κατασκευάστε κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$ . Έστω  $E$  το μέσον της  $A\Delta$  και  $Z$  το μέσον της  $B\Gamma$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $B$  τέμνει την  $EZ$  στο  $H$ .
- α) Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  λέγεται .....
- β) Η  $EZ$  λέγεται .....  
 και ισούται με .....
- γ) Αποδείξτε ότι το τρίγωνο  $BHZ$  είναι ισοσκελές.
- Δ) Συμπληρώστε τις ισότητες:  $HZ = \dots = \dots$
- ε) Δείξτε ότι η  $\Gamma H$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Gamma$ .

36. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά του ΑΔ κατά τμήμα ΑΗ = ΑΔ. Φέρνουμε τη διχοτόμο της Δ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ.

- Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές
- Συμπληρώστε τις ισότητες:  $ΑΔ = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
- Αποδείξτε ότι η γωνία ΔΖΗ είναι ορθή.

37. Οι γωνίες Β και Δ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι ορθές. Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ, να δείξετε ότι  $ΚΛ \perp ΒΔ$ .

Λύση: (Γράψτε τις παρακάτω προτάσεις στη σωστή σειρά ώστε να προκύψει η λύση του προβλήματος).

- Ενώνουμε το Κ με τα Β και Δ
- Ομοια  $ΚΔ = \frac{ΑΓ}{2}$
- Επειδή ΒΚΔ ισοσκελές και ΚΛ διάμεσος
- Το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και επειδή  $ΚΑ = ΚΓ$  θα είναι  $ΚΒ = \frac{ΑΓ}{2}$
- θα είναι και ύψος δηλαδή  $ΚΛ \perp ΒΔ$
- Άρα  $ΚΒ = ΚΔ$  και το ΒΚΔ ισοσκελές

38. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος ΑΗ. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση: (Γράψτε τις παρακάτω προτάσεις στη σωστή σειρά ώστε να προκύψει η λύση του προβλήματος).

- Άρα απομένει να αποδείξουμε ακόμη ότι  $ΕΖ = ΔΗ$
- Όμως είναι και  $ΗΔ = \frac{ΑΒ}{2}$ , γιατί ΗΔ είναι διάμεσος του ορθογωνίου ΑΗΒ και ισούται με το μισό της υποτεινουσας
- Άρα έχουμε  $ΖΕ = ΗΔ$
- Το τμήμα ΕΖ συνδέει τα μέσα των ΑΓ και ΓΒ και είναι  $ΕΖ = \frac{ΑΒ}{2}$
- Επειδή το ΔΕ συνδέει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, θα είναι  $ΔΕ \parallel ΒΓ$  και το ΔΕΖΗ θα είναι τραπέζιο

39. Δίνονται οι προτάσεις:

- Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
- Ένα κυρτό τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν οι δύο πλευρές του είναι ίσες.
- Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Από αυτές μία μόνο είναι σωστή. Επιλέξτε τη σωστή και αποδείξτε τη.

40. Σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις υπάρχει κάποιο λάθος. Βρείτε το και δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- Η μεγαλύτερη διαγώνιος ενός παραλληλογράμμου μπορεί να είναι ίση με το άθροισμα δύο διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου.
  - Αν δύο γωνίες ενός τετραπλεύρου είναι ίσες, τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.
  - Δύο διαδοχικές γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι οξείες.
41. Συμπληρώστε τις προτάσεις:
- Το παραλληλόγραμμο που έχει ίσες διαγωνίους λέγεται .....
  - Το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος λέγεται .....
  - Στο τετράγωνο οι διαγώνιοι έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:
    - .....
    - .....
    - .....
42. Από τις παρακάτω προτάσεις η μία είναι λανθασμένη. Ποια είναι αυτή; Πώς πρέπει να διατυπωθεί για να γίνει σωστή;
- Οι διαγώνιοι ενός τετραγώνου σχηματίζουν με τις πλευρές του γωνία  $45^\circ$ .
  - Το τετράγωνο είναι και ρόμβος.
  - Κάθε παραλληλόγραμμο που η μια γωνία του είναι ορθή είναι τετράγωνο.
43. Εξετάστε αν ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- έχει δύο γωνίες ορθές
  - έχει τις διαγωνίους του κάθετες
  - είναι παραλληλόγραμμο και έχει τις διαγωνίους του ίσες.
- Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
44. Μια ευθεία ( $\epsilon$ ) τέμνει τις πλευρές ενός τριγώνου και χωρίζει το τρίγωνο σε ένα τετράπλευρο και σε ένα τρίγωνο. Να γράψετε τις προϋποθέσεις, που αφορούν το είδος του τριγώνου και τη σχετική θέση της ευθείας, ώστε το τετράπλευρο να είναι:
- τραπέζιο, β) ισοσκελές τραπέζιο.

## **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο**

Το Θεώρημα του Θαλή και οι Συνέπειές του





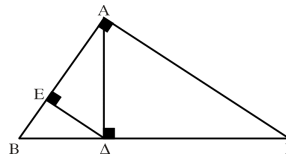
• ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

1. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο στο  $A$ .

Αν  $AD \perp B\Gamma$ ,  $ED \perp AB$  τότε το τρίγωνο  $ADE$

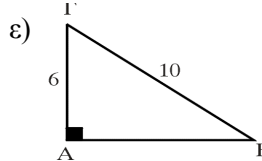
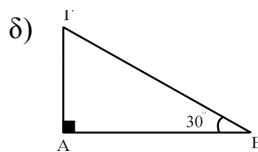
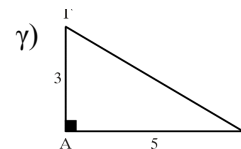
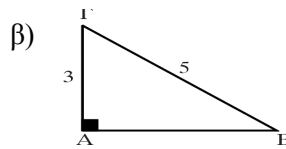
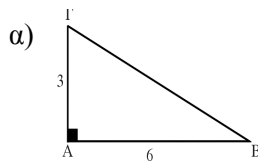
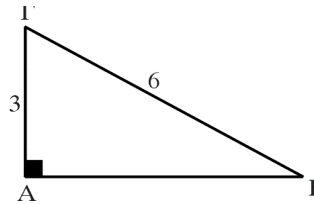
δεν είναι όμοιο με το:

- α)  $AB\Gamma$       β)  $A\Delta\Gamma$       γ)  $A\Delta B$   
 δ)  $EBA$       ε)  $AE\Gamma$



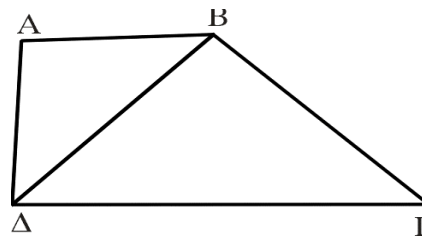
2. Το ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ )

είναι όμοιο με το:



3. Στο σχήμα τα τρίγωνα  $AB\Delta$ ,  $B\Gamma\Delta$  είναι όμοια. Αν  $\Delta A = 4$ ,  $\Gamma\Delta = 9$ , τότε η  $B\Delta$  είναι:

- α) 5      β) 6      γ)  $5\sqrt{3}$   
 δ) 8      ε)  $8 + \sqrt{3}$

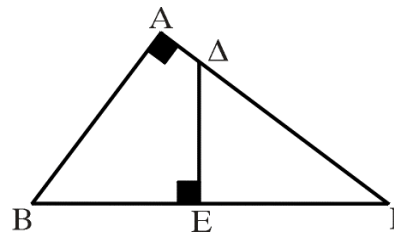


4. Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$

( $A = 90^\circ$ ),  $\Delta E \perp B\Gamma$ .

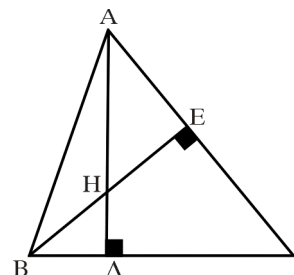
Αν  $AB = 6$ ,  $A\Gamma = 8$  και  $\Delta E = 4$ , τότε το  $E\Gamma$  ισούται με:

- α)  $\frac{16}{3}$       β)  $\frac{20}{3}$       γ) 5  
 δ) 6      ε)  $\frac{19}{4}$



5. Στο οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  τα  $A\Delta$  και  $BE$  είναι ύψη. Το τρίγωνο  $AHE$  είναι όμοιο με το:

- α)  $AH\Gamma$       β)  $\Delta HE$       γ)  $\Delta HB$

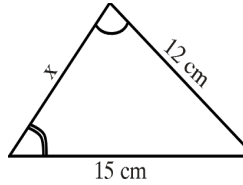
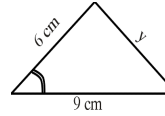


- δ) ΑΗΒ      ε) ΑΒΓ

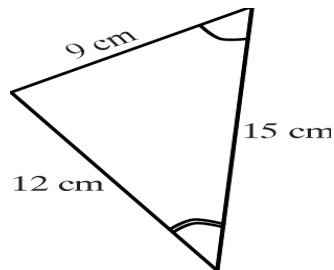
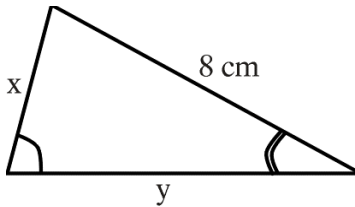
6. Για καθεμιά απ' τις τρεις περιπτώσεις να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

	x	y
(Α)		
(Β)		
(Γ)		

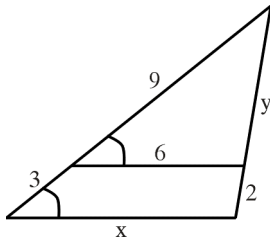
(Α)



(Β)



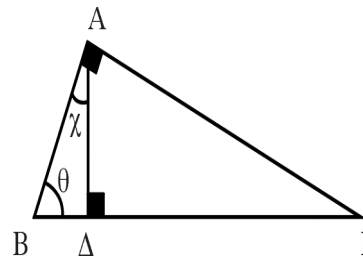
(Γ)



7. Στο σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α και ΑΔ ύψος του.

- Α. Να βρείτε μια γωνία ίση με τη θ  
 Β. Να βρείτε μια γωνία ίση με τη χ  
 Γ. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω:

- α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι όμοιο με το ....Α....  
 β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι όμοιο με το ....Β....  
 γ) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι όμοιο με το ....Γ....

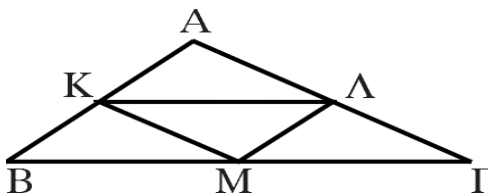


Δ. Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες απαντήσεις, συμπληρώστε τις αναλογίες:

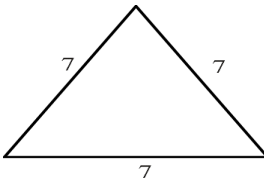
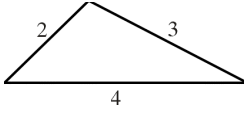
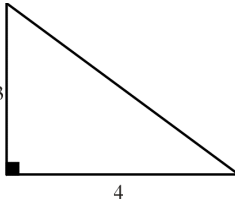
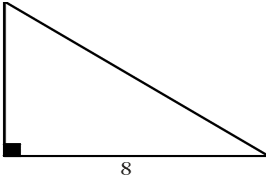
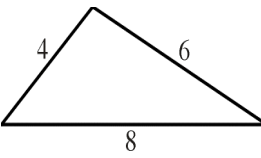
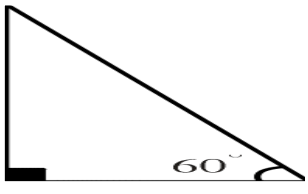
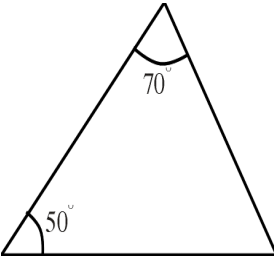
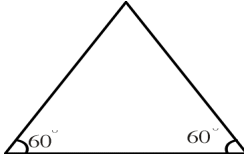
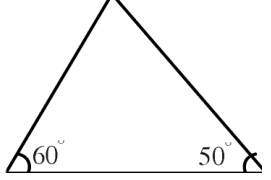
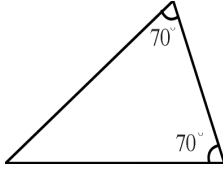
$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}, \quad \frac{AB}{B\Delta} = \frac{A\Gamma}{B\Delta} = \frac{A\Gamma}{B\Delta}, \quad \frac{A\Delta}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma}$$

8. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές με μήκη 12 cm, 8 cm και 6 cm. Το τρίγωνο που έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ έχει περίμετρο ίση με:

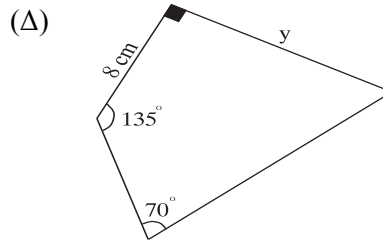
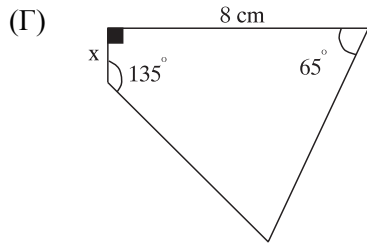
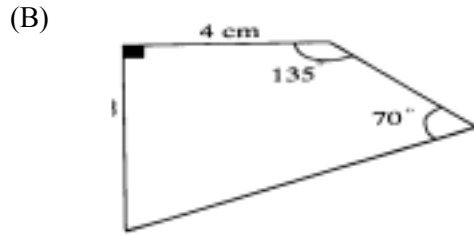
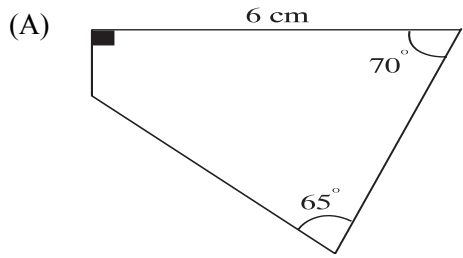
- α) 20 cm    β) 18 cm    γ) 14 cm    δ) 13 cm    ε) 10 cm



2. Κάθε τρίγωνο της πρώτης στήλης είναι όμοιο με ένα τρίγωνο της δεύτερης στήλης.  
Συνδέστε με μία γραμμή τα όμοια τρίγωνα:

στήλη (Α)	στήλη (Β)
	
	
	
	
	
	

10. Τρία από τα παρακάτω σχήματα είναι όμοια.



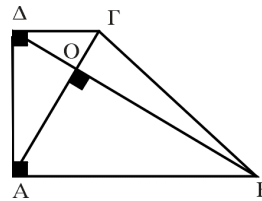
- α) Ποιο **δεν** μπορεί να είναι όμοιο με τα υπόλοιπα;  
 β) Δικαιολογήστε την απάντησή σας.  
 γ) Να υπολογίσετε τα μήκη  $x$  και  $y$ .

11. Στο σχήμα είναι:  $A = \Delta = 90^\circ$  και  $AG \perp BD$ .

- α) Το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι όμοιο με το  $\dots\Gamma\dots$   
 Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

β) Συμπληρώστε τις ισότητες:  $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{\Delta\Gamma}$

- γ) Αποδείξτε ότι  $A\Delta^2 = AB \cdot \Gamma\Delta$



12. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $B - \Gamma = 90^\circ$ . Αν  $A\Delta$  το ύψος του, δείξτε ότι:  $A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$ .

13. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο, δύο διαδοχικές πλευρές του είναι αντιστρόφως ανάλογες προς τα αντίστοιχα ύψη του.

14. Να αποδείξετε ότι δύο τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν ένα ύψος τους και τις περιέχουσες αυτό πλευρές τους, ανάλογες.

15. Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$ , κάθε παράλληλη ευθεία προς τη διάμεσο  $AM$ , ορίζει στις πλευρές της γωνίας  $A$  τμήματα ανάλογα προς τις πλευρές αυτές.

16. Να αποδείξετε ότι δύο τυχαία ύψη τριγώνου, είναι αντιστρόφως ανάλογα προς τις αντίστοιχες βάσεις τους.

17. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  ορθογώνιο στο  $A$ . Φέρνουμε το ύψος του  $A\Delta$  και παίρνουμε στις

$$AB, A\Gamma \text{ και } A\Delta \text{ τμήματα } AB' = \frac{AB}{3}, A\Gamma' = \frac{A\Gamma}{3}, A\Delta' = \frac{A\Delta}{3}.$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\Delta'B'\Gamma'$  είναι όμοιο προς το  $AB\Gamma$ .

18. Από την κορυφή  $A$  παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  φέρνουμε τυχαία ευθεία που τέμνει τις πλευρές  $B\Gamma$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι:

α) Τα τρίγωνα  $ABE$  και  $A\Delta Z$  είναι όμοια.

β) Το γινόμενο  $BE \cdot \Delta Z$  είναι σταθερό και ίσο με το γινόμενο δύο διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου.

19. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  παίρνουμε τα μέσα  $\Delta$  και  $E$  των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντιστοίχως. Αν  $Z$  είναι τυχαίο σημείο της  $B\Gamma$ , αποδείξτε ότι η  $\Delta E$  διχοτομεί την  $AZ$ .

20. Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ). Αν η διάμεσος  $MN$  του τραpezίου τέμνει τη διαγώνιο  $B\Delta$  στο  $E$ , αποδείξτε ότι  $\Delta E = EB$ .

21. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και από σημείο  $M$  της  $B\Gamma$  φέρνουμε παράλληλη προς τη διάμεσο  $A\Delta$  που τέμνει τις  $AB, A\Gamma$  στα  $N, P$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α)  $\frac{MN}{A\Delta} = \frac{MB}{B\Delta}$

β)  $\frac{MP}{A\Delta} = \frac{M\Gamma}{\Delta\Gamma}$

γ)  $MN + MP = \text{σταθερό}$

22. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) φέρνουμε το ύψος  $A\Delta$  και από το  $\Delta$  φέρνουμε  $\Delta E \perp AB$ . Να αποδείξετε ότι  $A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta E$ .

23. Οι βάσεις ενός τραpezίου έχουν μήκη  $a$  και  $3a$  και οι μη παράλληλες πλευρές  $\beta$  και  $3\beta$ . Αν οι μη παράλληλες πλευρές τέμνονται στο  $M$ , να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου που έχει κορυφή το σημείο  $M$  και βάση τη μεγαλύτερη από τις βάσεις του τραpezίου.

24. Σε δύο κυρτά τετράπλευρα  $AB\Gamma\Delta$  και  $A'B'\Gamma'\Delta'$  τα τμήματα  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A, A\Gamma$  είναι ανάλογα προς τα τμήματα  $A'B', B'\Gamma', \Gamma'\Delta', \Delta A', A'\Gamma'$ . Να δείξετε ότι τα τετράπλευρα είναι όμοια.

Δύση: Γράψτε με τη σωστή σειρά τις παρακάτω προτάσεις για να έχετε τη λύση.

- Επίσης αφού  $\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$ , είναι το τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  όμοιο με το τρίγωνο  $A'\Delta'\Gamma'$ , οπότε  $\Delta = \Delta'$ ,  $A_2 = A'_2$  και  $\Gamma_2 = \Gamma'_2$ .
- Τα τετράπλευρα λοιπόν εκτός από τις ανάλογες πλευρές έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες.
- Έχουμε  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta A}{\Delta'A'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$ .
- Είναι επομένως όμοια.
- Άρα  $A = A'$ ,  $\Gamma' = \Gamma_1$  ως αθροίσματα ίσων γωνιών.
- Αφού  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$ , θα είναι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  όμοιο με το τρίγωνο  $A'B'\Gamma'$ , οπότε  $B = B'$ ,  $A_1 = A'_1$  και  $\Gamma_1 = \Gamma'_1$ .

**ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ**  
**ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΔΟΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ**  
**ΣΤΟ 3ο ΚΑΙ ΤΟ 4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ**





**ΣΧΕΔΙΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ**  
**ΣΤΟ 3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**

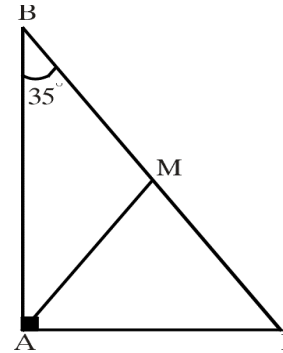
**ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ:**  
**Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία**

*Διάρκεια:* 1 διδακτική ώρα

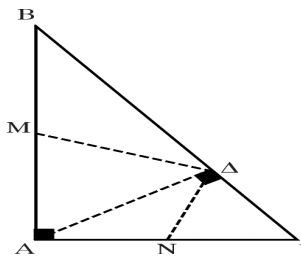
*Θέματα:* 3

**ΘΕΜΑ 1ο**

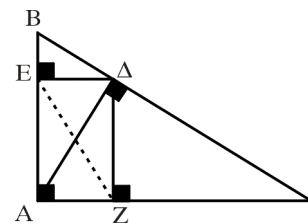
- A. i) Στο τρίγωνο ABΓ είναι  $A = 90^\circ$  και  $B = 35^\circ$ . Αν AM διάμεσος του ABΓ τότε η γωνία AMB ισούται με:  
α)  $55^\circ$     β)  $70^\circ$     γ)  $110^\circ$   
δ)  $100^\circ$     ε)  $125^\circ$



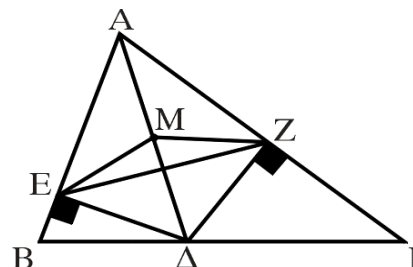
- ii) Το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο A και το AΔ ύψος του. Αν M είναι μέσο της AB και N μέσο της AΓ τότε η περίμετρος του τετραπλεύρου AMΔN ισούται με:  
α)  $AG + BG$                       β)  $AB + BG$   
γ)  $AB + AG$                       δ)  $2AM$   
ε)  $AB + AG + BG$



- iii) Αν το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο A και  $AΔ \perp BΓ$ ,  $ΔZ \perp AΓ$ ,  $ΔE \perp AB$ , τότε:  
α)  $EZ = ΔZ$     β)  $EZ = AZ$     γ)  $EZ = ZΓ$   
δ)  $EZ = AΔ$     ε)  $EZ = ΔΓ$



- iv) Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι σκαληνό. Το Δ είναι τυχαίο σημείο της BΓ. Αν  $ΔE \perp AB$ ,  $ΔZ \perp AΓ$  και M μέσο της AΔ, τότε το πλήθος των ισοσκελών τριγώνων που ορίζονται από τα πέντε σημεία A, E, Δ, Z, M είναι:  
α) 2                      β) 3                      γ) 4  
δ) 5                      ε) 6



(Μονάδες 2)

B. Συμπληρώστε τις προτάσεις:

- α) Το παραλληλόγραμμο που έχει ίσες διαγωνίους λέγεται .....
- β) Το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος λέγεται .....
- γ) Γράψτε τρεις ιδιότητες που αφορούν τις διαγωνίους του τετραγώνου.
- i) .....
- ii) .....
- iii) .....

(Μονάδες 3)

### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την ΒΑ και ένα άλλο ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη ΒΓ και το σημείο Α).

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα σημεία Δ, Α, Ε βρίσκονται στην ίδια ευθεία
- β)  $\Delta A = A E$
- γ) Η περίμετρος του τριγώνου ΜΔΕ ισούται με την περίμετρο του ΑΒΓ.

(Μονάδες  $8 = 4 + 2 + 2$ )

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ και  $A B = \frac{3}{2} \Gamma \Delta$ . Αν Ε, Ζ, Η είναι τα μέσα των

ΓΔ, ΒΕ, ΑΔ αντίστοιχως, να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΗΖΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Αν Θ είναι το σημείο τομής της ΑΒ και της προέκτασης της ΓΖ, να αποδειχθεί ότι το ΘΒ ισούται με τη διαφορά των βάσεων.

(Μονάδες 7)

**ΣΧΕΔΙΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ  
ΣΤΟ 4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ**

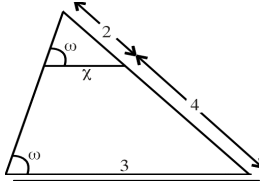
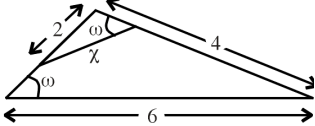
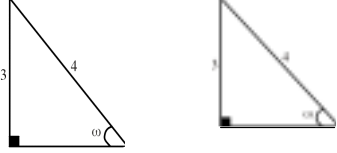
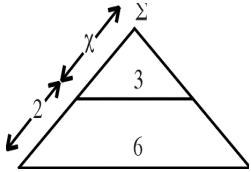
**ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: Το  
Θεώρημα του Θαλή και οι Συνεπειές  
του**

**Διάρκεια:** 1 διδακτική ώρα

**Θέματα:** 3

**ΘΕΜΑ 1ο**

A. Η τιμή του  $x$  που εμφανίζεται σε κάθε περίπτωση της στήλης (A), για κάθε σχήμα, δίνεται με αριθμό στη στήλη (B). Να συνδέσετε με γραμμές τα αντίστοιχα σχήματα με τους αντίστοιχους αριθμούς.

στήλη (A) σχήμα	στήλη (B) αριθμός
	<p>1</p> <p>1,5</p>
	<p>2</p> <p>3</p>
	<p>4</p> <p>4,5</p>
	

(Μονάδες 3)

B. Δίνονται οι προτάσεις:

- α) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια.
- β) Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια.
- γ) Δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια.
- δ) Δύο παραλληλόγραμμα με μια γωνία ίση είναι όμοια.

Ποιες από τις παραπάνω προτάσεις είναι αληθείς;

- A. όλες                      B. η (α) και η (β)                      Γ. η (δ)  
 Δ. η (α) και η (γ)                      E. η (β)

(Μονάδες 2)

**ΘΕΜΑ 2ο**

Σε τυχαίο σημείο P της υποτεινούσας ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ευθεία κάθετη που κόβει την ΑΓ στο σημείο Ν και την προέκταση της ΑΒ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα ΡΜΒ και ΡΓΝ είναι όμοια
- β)  $PM \cdot PN = PB \cdot PG$

(Μονάδες 7 = 3 + 4)

**ΘΕΜΑ 3ο**

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ και ευθεία παράλληλη προς τις βάσεις του ΑΒ, ΓΔ που τέμνει την ΑΔ στο σημείο Ε, την ΒΓ στο σημείο Ζ, την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΒΔ στο σημείο Λ.

Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\frac{EK}{\Gamma\Delta} = \frac{AE}{A\Delta}$
- β)  $\frac{\Lambda Z}{\Gamma\Delta} = \frac{BZ}{B\Gamma}$
- γ)  $EK = \Lambda Z$

(Μονάδες 8 = 2,5 + 2,5 + 3)

## ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Το τμήμα που αναφέρεται στην Τριγωνομετρία, διαιρείται σε δύο ενότητες:

Α'. Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου και

Β'. Τη Γενική Τριγωνομετρία.

Σ' όλη την έκταση του κειμένου της Τριγωνομετρίας, καταβάλλεται προσπάθεια να συνδεθούν οι σχετικές έννοιες μεταξύ τους και στο επίπεδο των εικόνων και στο επίπεδο των ορισμών τους.

Η δημιουργική και κριτική σκέψη που επιδιώκουμε να αναπτύξουμε στους μαθητές, σύμφωνα με τα πορίσματα της Γνωστικής Ψυχολογίας, *κινείται ιεραρχημένα*, περνάει πρώτα μέσα από τις εικόνες και στη συνέχεια μέσα από τους ορισμούς των εννοιών.

Η προσέγγιση αυτή συμφωνεί με την άποψη του R. Skemp<sup>1</sup> για τα σύμβολα μιας έννοιας, τα οποία διακρίνει:

στο «*οπτικό σύμβολο*, την *εικόνα* της έννοιας, που αντιστοιχεί στην *ενορατική γνώση* της και αναπαριστά περισσότερο την *ατομική σκέψη*» και

στο «*λεκτικό σύμβολο*, την *ονομασία* της έννοιας, που αντιστοιχεί στη *λογική γνώση* της και αναπαριστά την *κοινωνική σκέψη*, η οποία προκύπτει από την ανάγκη της επικοινωνίας».

Αξίζει, όμως, να σημειωθεί ότι πολύ πριν από τις διαπιστώσεις αυτές της Γνωστικής Ψυχολογίας ο Αριστοτέλης<sup>2</sup> υποστήριζε ότι:

**«Τα Φαντάσματα<sup>3</sup> αποτελούν για τη σκέψη το απαραίτητο νοητικό υλικό πάνω στο οποίο ενεργεί ο νους».**

Στηριζόμενοι στις θέσεις αυτές ευελπιστούμε ότι με τη χρήση των εικόνων θα ενισχυθούν οι νοητικές διαδικασίες του συνειρμού και θα επιτευχθεί αποτελεσματικότερα η μάθηση των μαθηματικών εννοιών.

Τα προβλήματα και οι ασκήσεις που περιλαμβάνονται μαζί με τα σχήματα ή τους πίνακες που τις συνοδεύουν, μπορούν να αξιοποιηθούν με διάφορους τρόπους από το διδάσκοντα Καθηγητή. Ενδεικτικά σημειώνουμε ότι μπορούν:

- να δίνονται προς λύση στους μαθητές κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας,
- να αναπαράγονται σε *διαφάνειες*, που θα προβάλλονται και θα συμπληρώνονται κατά τη διάρκεια του μαθήματος, έτσι ώστε να κερδίζεται πολύτιμος χρόνος και να υποβοηθείται αποτελεσματικότερα η αφομοίωση των σχετικών εννοιών από το μαθητή,

<sup>1</sup> The Psychology of Learning Mathematics - Skemp R, σελ. 100.

<sup>2</sup> Αρχαία Ελληνική Γνωσιοθεωρία - Δημ. Ζ. Ανδριόπουλος, σελ. 144.

<sup>3</sup> Οι εικόνες.

- να χρησιμοποιούνται σε *φύλλα εργασίας*, τα οποία συντάσσει ο διδάσκων και συμπληρώνουν οι μαθητές, διαδικασία που μπορεί να αξιοποιηθεί τόσο για την ανάπτυξη της διδασκαλίας όσο και για την αξιολόγηση των μαθητών,
- να μετατρέπονται σε *κριτήρια αξιολόγησης* του μαθητή και
- να χρησιμοποιούνται ως *θέματα εργασιών για το σπίτι*.

# Τ Ρ Ι Γ Ω Ν Ο Μ Ε Τ Ρ Ι Α

## Α΄

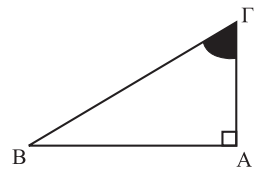
Τριγωνομετρικοί αριθμοί  
οξείας γωνίας  
ορθογωνίου τριγώνου





**Τριγωνομετρικοί αριθμοί που συνδέονται με τις οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου**

1. α) Με βάση το διπλανό σχήμα να χαρακτηρίσετε με σωστό ή λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν:



**Σωστό Λάθος**

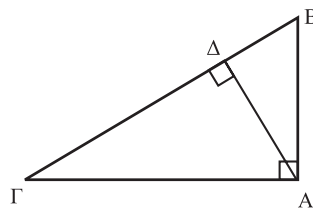
- η ΑΓ είναι η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας Β    
 η ΑΒ είναι η προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας Γ

β) Για το ίδιο σχήμα να συμπληρώσετε τις προτάσεις:

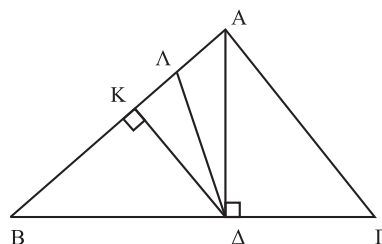
- η ΑΓ είναι η προσκείμενη ..... της οξείας .....  
 - η ΑΒ είναι η απέναντι ..... της οξείας .....

2. Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα συνδέστε κατάλληλα κάθε στοιχείο της στήλης (Α) με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β):

στήλη (Α)	στήλη (Β)
ημΒ	$\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$
εφΓ	$\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$
συνΒ	$\frac{ΑΔ}{ΔΒ}$
ημΓΑΔ	$\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$
σφΔΑΒ	$\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$
	$\frac{ΔΓ}{ΑΓ}$
	$\frac{ΒΓ}{ΑΔ}$
	$\frac{ΒΓ}{ΑΒ}$



3. Με βάση το παρακάτω σχήμα:



α) Το συνΒ ισούται με:

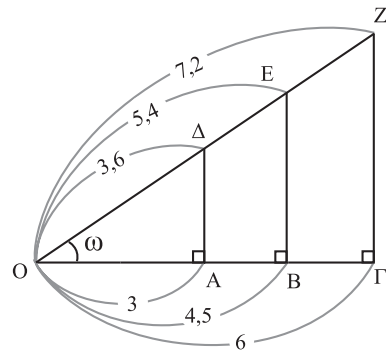
**A.**  $\frac{B\Lambda}{B\Delta}$     **B.**  $\frac{BA}{B\Gamma}$     **Γ.**  $\frac{BK}{B\Delta}$     **Δ.**  $\frac{B\Delta}{BK}$     **Ε.**  $\frac{B\Lambda}{\Lambda\Delta}$

β) Το ημB ισούται με:

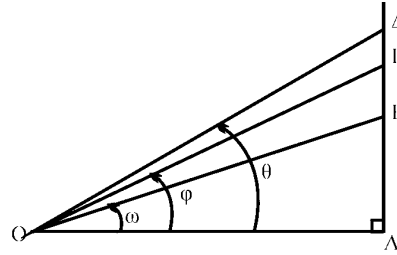
**A.**  $\frac{\Delta\Lambda}{B\Delta}$     **B.**  $\frac{\Lambda\Delta}{B\Delta}$     **Γ.**  $\frac{\Lambda\Delta}{AB}$     **Δ.**  $\frac{\Delta K}{BK}$     **Ε.**  $\frac{B\Lambda}{B\Delta}$

4. Η γωνία  $\omega$ , στο διπλανό σχήμα, ανήκει σε τρία ορθογώνια τρίγωνα: στο ....., στο ..... και στο ..... Ζητείται το  $\sin\omega$ .

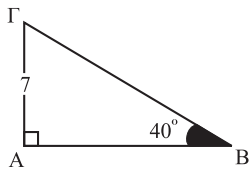
- α) Σε ποιο από τα τρία τρίγωνα θα το υπολογίσετε; .....
- β) Πόσο είναι ακριβώς το  $\sin\omega$ ;
- γ) Αν επιλέγατε ένα άλλο τρίγωνο για να το υπολογίσετε, το  $\sin\omega$  θα ήταν ίσο, μεγαλύτερο ή μικρότερο από αυτό που βρήκατε στο (β) ερώτημα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



5. Στο διπλανό σχήμα είναι  $\omega < \varphi < \theta$ .
- α) Να βρείτε τους αριθμούς:  $\text{συν}\omega$ ,  $\text{συν}\varphi$ ,  $\text{συν}\theta$ .
- β) Να συγκρίνετε τους παραπάνω αριθμούς και να τους διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

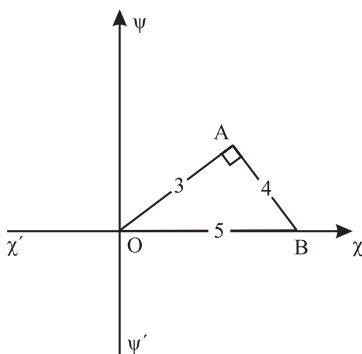


6. Στο παρακάτω σχήμα η υποτείνουσα ισούται με:



- A.  $7 \cdot \text{συν}40^\circ$     B.  $7 \cdot \eta\mu40^\circ$     Γ.  $\frac{7}{\text{συν}40^\circ}$     Δ.  $\frac{7}{\eta\mu40^\circ}$     Ε.  $7 \cdot \epsilon\phi40^\circ$

7. Η κλίση της ευθείας OA του παρακάτω σχήματος είναι:  
(κλίση ευθείας: εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$ ).

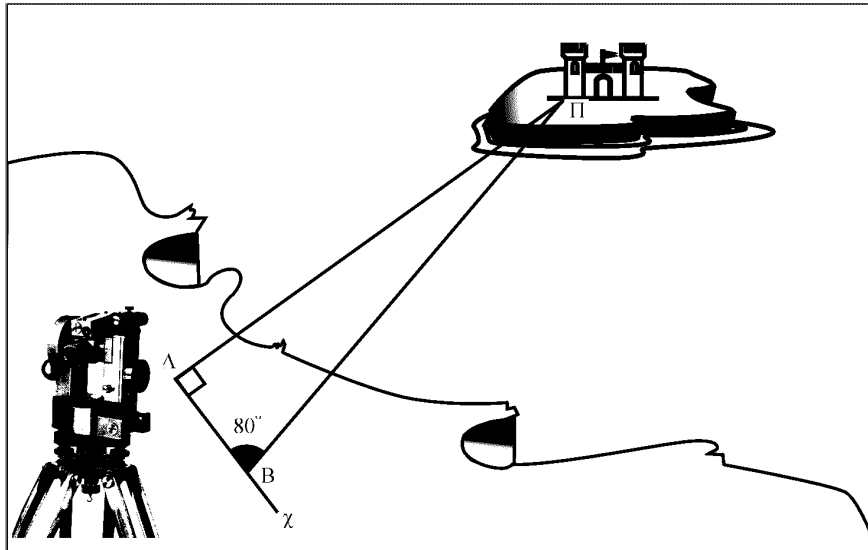


- A.  $\frac{5}{3}$     B.  $\frac{3}{4}$     Γ.  $\frac{4}{3}$     Δ.  $\frac{3}{5}$     Ε.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ - Θαλής 1992).

**Σχέσεις μεταξύ των κυρίων στοιχείων του τριγώνου, πλευρών και γωνιών**

1. Ένας τοπογράφος θέλει να μετρήσει την απόσταση ενός πύργου που βρίσκεται σ' ένα νησί από την ακτή:



Στήνει ένα θεοδόλιχο σε κάποιο σημείο A της ακτής. Προσδιορίζει μ' αυτόν δύο διευθύνσεις AΠ και Ax κάθετες μεταξύ τους. Πάνω στη διεύθυνση Ax διανύει 100 m και φθάνει στο σημείο B. Μετράει τη γωνία ABΠ και βρίσκει ότι είναι 80°. Στη συνέχεια υπολογίζει:

$$BΠ = \frac{100}{0,17} = 588,23$$

AΠ .....

Να ελέγξετε την πορεία των μετρήσεων και των υπολογισμών του μηχανικού.

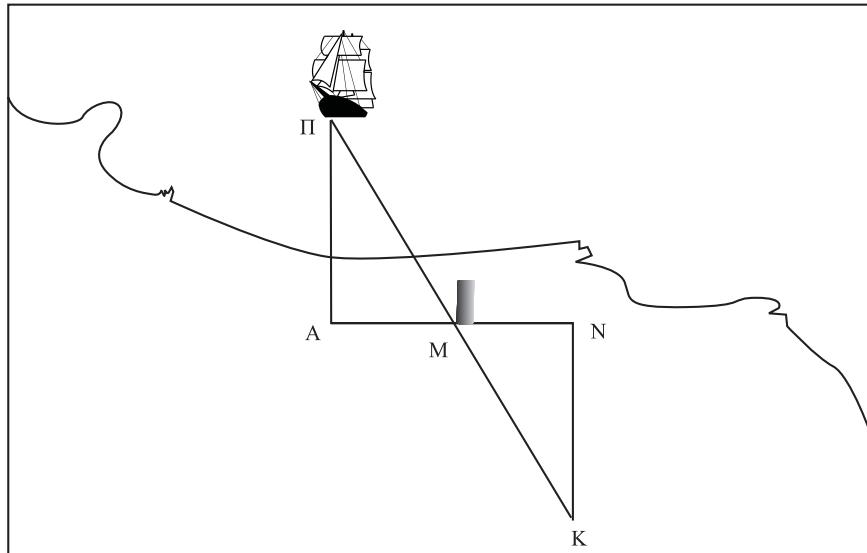
α) Γιατί προσδιόρισε δύο κάθετες διευθύνσεις;

β) Το πηλίκο  $\frac{100}{0,17}$  ορίζει πράγματι την απόσταση BΠ;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

γ) Τι έκανε ο τοπογράφος στη συνέχεια για να βρει την απόσταση AΠ του πύργου από την ακτή;

δ) Ανάλογο πρόβλημα αντιμετώπισε ο Θαλής ο Μιλήσιος θέλοντας να προσδιορίσει την απόσταση ενός πλοίου από την ακτή και το έλυσε γεωμετρικά ως εξής:



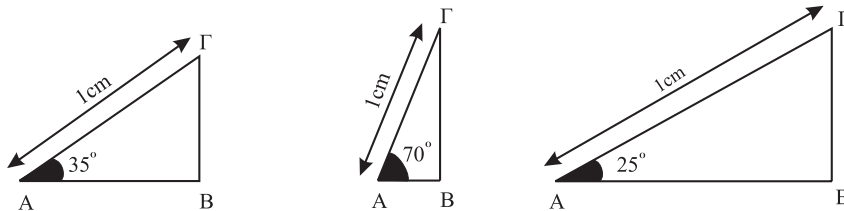
Θεώρησε το τμήμα  $ΠΑ$  που είναι ίσο με την απόσταση του πλοίου από την ακτή. Περπάτησε κατά μήκος της ακτής κάθετα προς το ευθύγραμμο τμήμα  $ΠΑ$ . Έφτασε σ' ένα σημείο  $Μ$  και εκεί στερέωσε στην άμμο έναν πάσσαλο. Συνέχισε να προχωράει στην ίδια διεύθυνση έως ότου να διανύσει μια απόσταση  $ΜΝ$  ίση με την  $ΑΜ$ . Ξεκινώντας από το  $Ν$  και σε διεύθυνση κάθετη προς την  $ΑΝ$  προχώρησε προς το εσωτερικό της ξηράς έως ότου έφτασε σε σημείο  $Κ$  από το οποίο έβλεπε το πλοίο  $Π$  και τον πάσσαλο στο  $Μ$  σε ευθεία γραμμή. Βρήκε δε ότι η ζητούμενη απόσταση είναι η  $ΝΚ$ .

- i) Συμφωνείτε ότι η  $ΝΚ$  είναι ίση με την απόσταση του πλοίου από την ακτή και γιατί;
- ii) Θα μπορούσατε να λύσετε αυτό το πρόβλημα τριγωνομετρικά με το θεοδόλιχο και πώς;
- iii) Ποια από τις δύο μεθόδους μέτρησης είναι ακριβέστερη και γιατί;

2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ):

- α) Δίνονται  $B = 32^\circ$  και  $B\Gamma = 6$  m. Υπολογίστε τις πλευρές  $A\Gamma$  και  $AB$ .  
 β) Δίνονται  $AB = 5$  m και  $B = 41^\circ$ . Υπολογίστε τις πλευρές  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$ .  
 γ) Δίνονται  $B\Gamma = 8$  m και  $A\Gamma = 5$  m. Υπολογίστε τις γωνίες  $B$  και  $\Gamma$  του τριγώνου, χρησιμοποιώντας τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών.

3. Δίνονται τα σχήματα:



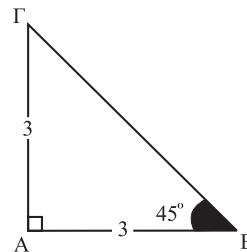
Κάνοντας τις απαραίτητες μετρήσεις (προσέξτε την κλίμακα των σχεδίων) να συμπληρώσετε τον πίνακα:

γωνία $\theta$	$35^\circ$	$70^\circ$	$25^\circ$
συν $\theta$			
ημ $\theta$			

### Τριγωνομετρικοί αριθμοί των αξιοσημείωτων γωνιών $45^\circ$ , $30^\circ$ , $60^\circ$

1. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με κάθετες πλευρές 3 cm. Να υπολογίσετε:

- α) την υποτείνουσά του  
 β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας των  $45^\circ$  και να συμπληρώσετε τον πίνακα.

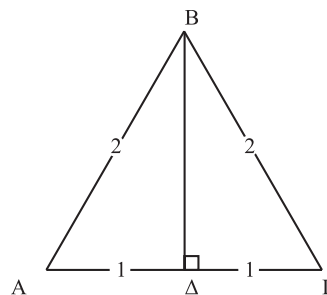


ημ $45^\circ$	συν $45^\circ$	εφ $45^\circ$	σφ $45^\circ$

2. Στο διπλανό σχήμα να εντοπίσετε γωνίες:

- α)  $60^\circ$  και β)  $30^\circ$ .

Στη συνέχεια να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς και να συμπληρώσετε τον πίνακα.



γωνία $\alpha$	$30^\circ$	$60^\circ$
ημ $\alpha$		
συν $\alpha$		
εφ $\alpha$		
σφ $\alpha$		

3. Επαληθεύστε τις ισότητες:
- α)  $\text{συν}60^\circ = \text{συν}^2 30^\circ - \eta\mu^2 30^\circ$
  - β)  $\eta\mu 60^\circ = 2\eta\mu 30^\circ \cdot \text{συν} 30^\circ$
  - γ)  $\text{συν} 60^\circ = 2\text{συν}^2 30^\circ - 1$
  - δ)  $\text{συν} 60^\circ = 1 - 2\eta\mu^2 30^\circ$
4. Χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των  $30^\circ$  και  $45^\circ$  επαληθεύστε ότι:
- α)  $\eta\mu 15^\circ = \eta\mu 45^\circ \text{συν} 30^\circ - \text{συν} 45^\circ \eta\mu 30^\circ$
  - β)  $\eta\mu 75^\circ = \eta\mu 45^\circ \text{συν} 30^\circ + \text{συν} 45^\circ \eta\mu 30^\circ$
- Σ' όλους τους υπολογισμούς να γίνεται χρήση των τετραγωνικών ριζών.
5. Επαληθεύστε τις παρακάτω ανισότητες:
- α)  $2\eta\mu 30^\circ \neq \eta\mu 60^\circ$
  - β)  $2\text{συν} 45^\circ \neq \text{συν} 90^\circ$
  - γ)  $3\eta\mu 15^\circ \neq \text{συν} 45^\circ$
  - δ)  $\frac{1}{2} \text{συν} 60^\circ \neq \text{συν} 30^\circ$
6. Να δειχθεί ότι:  $\frac{\eta\mu 45^\circ - \eta\mu 3^\circ}{\text{συν} 45^\circ + \text{συν} 60^\circ} = 3 - 2\sqrt{2}$ .

**Σχέσεις μεταξύ των τεσσάρων τριγωνομετρικών αριθμών της ίδιας οξείας γωνίας**

Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω βασικές ταυτότητες (α) - (στ), να λύσετε τις ασκήσεις που ακολουθούν:

α) $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\text{συν}\omega}$	β) $\sigma\phi\omega = \frac{\text{συν}\omega}{\eta\mu\omega}$	γ) $\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$
δ) $\text{συν}\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon\phi^2\omega}}$	ε) $\eta\mu\omega = \frac{\epsilon\phi\omega}{\sqrt{1 + \epsilon\phi^2\omega}}$	στ) $\eta\mu^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1$

1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°):
- α) Δίνεται  $\text{συν}B = 0,6$ . Υπολογίστε: i)  $\eta\mu B$ , ii)  $\epsilon\phi B$ .
  - β) Δίνεται  $\eta\mu B = \frac{\sqrt{3}}{4}$ . Υπολογίστε: i)  $\text{συν}B$ , ii)  $\epsilon\phi B$ .
  - γ) Δίνεται  $\epsilon\phi B = \frac{8}{15}$ . Υπολογίστε: i)  $\eta\mu B$ , ii)  $\text{συν}B$ , iii)  $\sigma\phi B$
2. Αποδείξτε ότι:  $(\eta\mu x + \text{συν}x)^2 = 1 + 2\eta\mu x \cdot \text{συν}x$ .
3. Απλοποιήστε τις παραστάσεις:
- α)  $\epsilon\phi x \cdot \text{συν}x$
  - β)  $\eta\mu x \cdot \text{συν}^2 x + \eta\mu^3 x$

$$\gamma) \sqrt{1 - \eta\mu x} \cdot \sqrt{1 + \eta\mu x}$$

4. Απλοποιήστε τις κλασματικές παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{\sigma\upsilon\nu^4 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^4 x - \eta\eta^2 x}$$

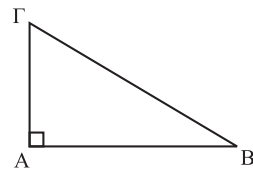
$$\beta) \frac{\eta\mu^2 x - \eta\mu^2 y}{\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 y}$$

**Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών δύο συμπληρωματικών γωνιών**

1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°)

α) Για τις οξείες γωνίες του Β και Γ αποδείξτε ότι:

i)  $\eta\mu B = \sigma\upsilon\nu \Gamma$  ii)  $\epsilon\phi\Gamma = \sigma\phi B$



β) Με βάση τα παραπάνω συμπεράσματα, συμπληρώστε τις ισότητες:

$\eta\mu\Gamma = \dots\dots\dots$

$\epsilon\phi B = \dots\dots\dots$

2. Στον παρακάτω πίνακα υπάρχουν ζεύγη συμπληρωματικών γωνιών.

	A	B	Γ	Δ	E
γωνία θ	0	30°	45°	60°	90°
ημθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφθ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	δεν ορίζεται
σφθ	δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

α) Σημειώστε τα ζεύγη αυτά:  $\dots\dots + \dots\dots = 90^\circ$  κ.λπ.

β) Συνδέστε κατάλληλα τα στοιχεία της στήλης Α και της στήλης Ε, γράφοντας τις αντίστοιχες ισότητες.  $\eta\mu 0^\circ = \sigma\upsilon\nu 90^\circ$ ,  $\dots\dots = \dots\dots$  κ.λπ.

γ) Συνδέστε κατάλληλα τα στοιχεία της στήλης Β και της στήλης Δ, γράφοντας τις αντίστοιχες ισότητες.



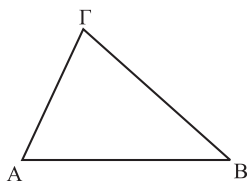
3. Να συμπληρώσετε τις στήλες του παρακάτω πίνακα με τους τριγωνο-μετρικούς αριθμούς που λείπουν:

x (μοίρες)	ημx°	εφx°	σφx°	συνx°
0	0,000 0	0,000	δεν ορίζεται	1,000 0
1	0,017 5	0,017 5	57,290	0,999 8
2	0,034 9	0,034 9	28,636	0,999 4
3	0,052 3	0,052 4	19,081	0,998 6
4	0,069 8	0,069 9	14,301	0,997 6
5	0,087 2	0,087 5	11,430	0,996 2
6	0,104 5	0,105 1	9,514	0,994 5
7	0,121 9	0,122 8	8,144	0,992 5
8	0,139 2	0,140 5	7,115	0,990 3
9	0,156 4	0,158 4	6,314	0,987 7
10	0,173 6	0,176 3	5,671	0,984 8
11	0,190 8	0,194 4	5,145	0,981 6
12	0,207 9	0,212 6	4,705	0,978 1
13	0,225 0	0,230 9	4,331	0,974 4
14	0,241 9	0,249 3	4,011	0,970 3
15	0,258 8	0,267 9	3,732 1	0,965 9
16	0,275 6	0,286 7	3,487 4	0,961 3
17	0,292 4	0,305 7	3,270 9	0,956 3
18	0,309 0	0,324 9	3,077 7	0,951 1
19	0,325 6	0,344 3	2,904 2	0,945 5
20	0,342 0	0,364 0	2,747 5	0,939 7
21	0,358 4	0,383 9	2,605 1	0,933 6
22	0,374 6	0,404 0	2,475 1	0,927 2
23	0,390 7	0,424 5	2,355 9	0,920 5
24	0,406 7	0,445 2	2,246 0	0,913 5
25	0,422 6	0,466 3	2,144 5	0,906 3
26	0,438 4	0,487 7	2,050 3	0,898 8
27	0,454 0	0,509 5	1,962 6	0,891 0
28	0,469 5	0,531 7	1,880 7	0,882 9
29	0,484 8	0,554 3	1,804 1	0,874 6
30	0,500 0	0,577 4	1,732 1	0,866 0
31	0,515 0	0,600 9	1,664 3	0,857 2
32	0,529 9	0,624 9	1,600 3	0,848 0
33	0,544 6	0,649 4	1,539 9	0,838 7
34	0,559 2	0,674 5	1,482 6	0,829 0
35	0,573 6	0,700 2	1,428 2	0,819 2
36	0,587 8	0,726 5	1,376 4	0,809 0
37	0,601 8	0,753 6	1,327 0	0,798 6
38	0,615 7	0,781 3	1,279 9	0,788 0
39	0,629 3	0,809 8	1,234 9	0,777 1
40	0,642 8	0,839 1	1,191 8	0,766 0
41	0,656 1	0,869 3	1,151 8	0,755 0
42	0,669 1	0,900 4	1,110 6	0,743 1
43	0,682 0	0,932 5	1,072 4	0,731 4
44	0,694 7	0,965 7	1,035 5	0,719 3
45	0,707 1	1,000 0	1,000 0	0,707 1
46	0,720		0,965 7	0,695
47	0,731		0,932 5	0,682
48	0,743		0,900 4	0,669
49	0,755		0,869 3	0,656
50	0,766		0,839 1	0,643
51	0,777	1,235		0,629
52	0,788	1,280		0,616
53	0,799	1,327		0,602
54		1,376		0,588
55		1,428	0,700 2	0,574
56		1,483	0,674 5	0,559
57		1,540	0,649 4	
58		1,600	0,624 9	
59	0,857	1,664	0,600 9	
60	0,866	1,732	0,577 4	

4. Αν  $\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$  και  $\eta\mu 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1)$  να βρείτε:

- α) το  $\sigma\upsilon\nu 15^\circ$   
 β) την  $\epsilon\phi 15^\circ$

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ.



α) Χαρακτηρίστε με Σ ή Λ τις σχέσεις:

i)  $\eta\mu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{B+\Gamma}{2}$

Σωστό  Λάθος

ii)  $\epsilon\phi \frac{A}{2} = \sigma\phi \frac{B+\Gamma}{2}$

Σωστό  Λάθος

β) Αποδείξτε ότι:

i)  $\eta\mu \frac{A+B}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}$

ii)  $\epsilon\phi \frac{A+B}{2} = \sigma\phi \frac{\Gamma}{2}$

γ) Χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα του (β) ερωτήματος, να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

i)  $\eta\mu \frac{A}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{B+\Gamma}{2}$

ii)  $\epsilon\phi \frac{A}{2} \cdot \epsilon\phi \frac{B+\Gamma}{2}$

iii)  $\eta\mu^2 \frac{A}{2} + \eta\mu^2 \frac{B+\Gamma}{2}$

## Προβλήματα

1. Να κατασκευάσετε μια γωνία  $xAy$ , γνωρίζοντας ότι:

α)  $\text{εφ } xAy = \frac{3}{5}$

β)  $\text{συν } xAy = 0,8$

γ)  $\text{ημ } xAy = 0,4$

2. Να κατασκευάσετε μια γωνία  $\alpha^\circ$  τέτοια ώστε:  $\text{εφ } (90^\circ - \alpha) = \frac{4}{7}$ .

3. Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  με ύψος  $AH$  έτσι ώστε:

$\text{ημ}B = \frac{1}{3}$  και  $\text{εφ}\Gamma = \frac{1}{3}$ .

α) Περιγράψτε την κατασκευή.

β) Υπολογίστε: i)  $\text{ημ}BAH$ , ii)  $\text{συν}\Gamma AH$ .

4. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  ορθογώνιο στο  $A$ .

α) Εάν  $AB = 3$  m και  $A\Gamma = 4$  m, υπολογίστε τις γωνίες  $B$  και  $\Gamma$ .

β) Εάν  $B\Gamma = 37$  m και  $B = 25^\circ$ , υπολογίστε τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$ .

γ) Εάν  $AB = 36$  m και  $B = 65^\circ$ , υπολογίστε τη  $B\Gamma$  και την  $A\Gamma$ .

δ) Εάν  $A\Gamma = 35$  m και  $\text{συν}\Gamma = \frac{5}{6}$ , υπολογίστε:

i) την  $AB$ ,

ii) τη  $B\Gamma$  και

iii) τη γωνία  $B$ .

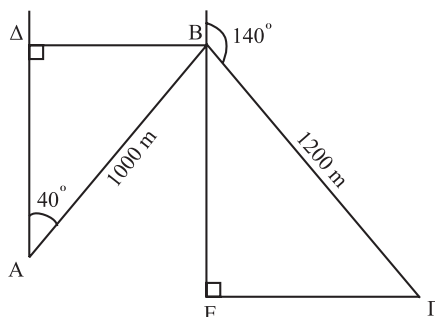
ε) Εάν  $B\Gamma = 4,8$  m και  $\text{εφ}\Gamma = 0,6$ , υπολογίστε:

i)  $AB$ ,

ii)  $A\Gamma$  και

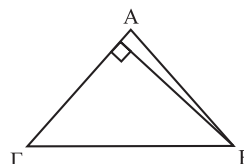
iii) τη γωνία  $B$ .

5. Το διπλανό σχήμα παριστάνει κάποιον χώρο ενός πάρκου και δυο δρόμους που ήδη υπάρχουν. Προκειμένου να χαραχθούν και άλλοι δρόμοι, υπολογίστε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων:  $A\Delta$ ,  $\Delta B$ ,  $BE$  και  $E\Gamma$ .

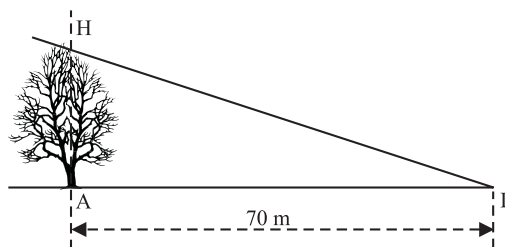


6. Δίνεται τρίγωνο ΚΛΜ με γωνίες  $K = 37^\circ$  και  $M = 53^\circ$ .
- Τι είδους τρίγωνο είναι το ΚΛΜ;
  - Γνωρίζοντας ότι  $ΚΛ = 25$  m, να υπολογίσετε:
    - την ΚΜ και
    - την ΛΜ.
7. Σε τρίγωνο ΓΑΒ οι πλευρές ΓΑ, ΑΒ και ΒΓ έχουν μήκη 5, 12, 13 αντίστοιχα. Υπολογίστε τις γωνίες του τριγώνου.
8. Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων τοποθετήστε τα σημεία Α (2, 4), Β (2, -2) και Γ (5, -2).
- Υπολογίστε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.
  - Υπολογίστε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ( $ΑΒ = ΑΓ$ ) όπου  $Α = 84^\circ$  και  $ΑΒ = 50$  m. Υπολογίστε:
- την πλευρά ΒΓ,
  - το ύψος ΑΗ.

10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ( $ΑΒ = ΑΓ$ ) στο οποίο  $ΒΓ = 26$  cm και  $ΑΒΓ = 47^\circ$ . Υπολογίστε:
- την πλευρά ΑΒ,
  - το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΓ.

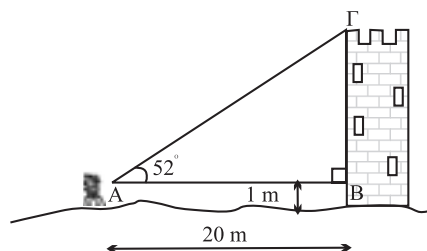


11. Υπολογίστε το ύψος ΑΗ του δέντρου της διπλανής εικόνας αν γνωρίζουμε ότι η γωνία των ακτίνων του ήλιου με τον ορίζοντα είναι  $18^\circ$  και ότι η σκιά του δέντρου ΑΓ έχει μήκος 70 m.



12. Ένας μηχανικός για να μετρήσει το ύψος ενός πύργου του οποίου η βάση είναι προσπελάσιμη κάνει τα εξής βήματα:

- Τοποθετείται 20 m μακριά από τον πύργο.



- Με το θεοδόλιχο βρίσκει τη γωνία που σχηματίζει η οριζόντια διεύθυνση και η ευθεία που συνδέει το θεοδόλιχο με την κορυφή του πύργου· όπως δείχνει το σχήμα η γωνία αυτή είναι  $52^\circ$ .

Χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις του μηχανικού υπολογίστε το ύψος του πύργου.

13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α με υποτείνουσα ΒΓ = 1 m. Έστω ΑΗ το ύψος του τριγώνου που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ.

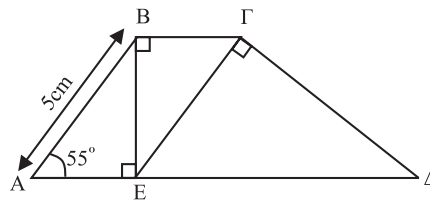
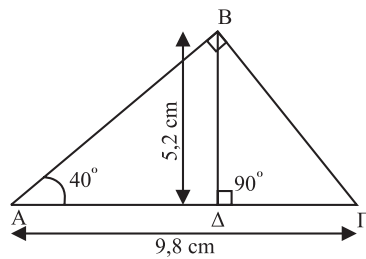
α) Εάν το μέτρο της γωνίας B είναι  $x$ , υπολογίστε συναρτήσει του  $x$  τα μέτρα των εξής ευθυγράμμων τμημάτων:

i) AH, ii) BH και iii) ΓH

β) Εφαρμόστε τα αποτελέσματα για  $x = 28^\circ$ :

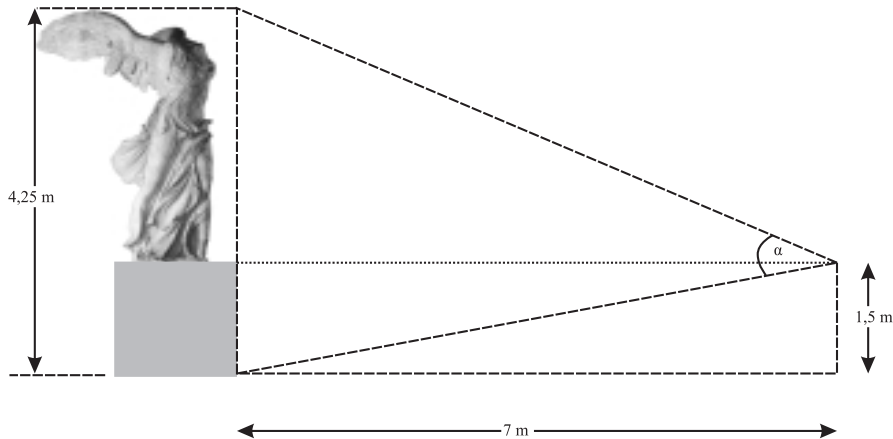
AH = ..... BH = ..... ΓH = .....

14. Με τα δεδομένα που σημειώνονται στα παρακάτω σχήματα υπολογίστε (χωρίς να χρησιμοποιήσετε το πυθαγόρειο θεώρημα):



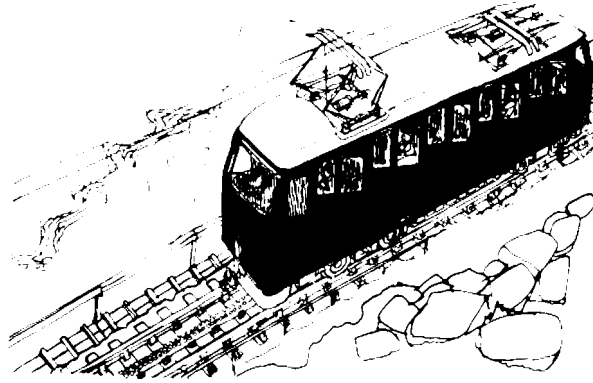
α) i) την AΔ, ii) την AB, iii) τη BΓ      β) i) την AE, ii) τη γωνία Δ, iii) τη ΓΔ.

15. Στο Μουσείο του Λούβρου των Παρισίων ένας γλύπτης παρατηρεί και μελετάει το γνωστό ελληνικό άγαλμα η «Νίκη της Σαμοθράκης» ύψους 4,25 m, που βρίσκεται σε απόσταση 7 m από τη θέση του.



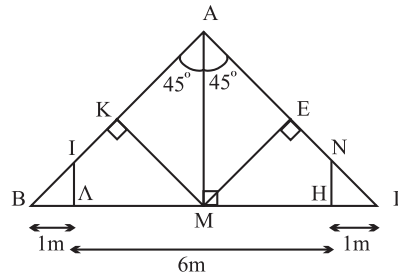
Εάν ο οφθαλμός του βρίσκεται σε ύψος 1,50 m από το δάπεδο της αίθουσας, να βρείτε το μέγεθος της γωνίας υπό την οποία ο γλύπτης βλέπει το άγαλμα.

16. Το τρενάκι της εικόνας που ανεβαίνει στην πλαγιά του βουνού για να κερδίσει 10 m σε ύψος πρέπει να διανύσει 109,5 m. Ζητείται η γωνία κλίσεως της πλαγιάς.

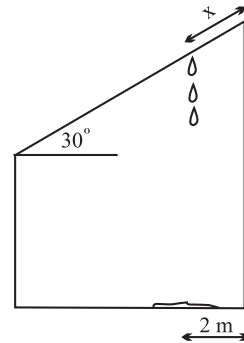


- α) Αποδώστε το πρόβλημα μ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο.  
β) Υπολογίστε τη γωνία κλίσεως της πλαγιάς.

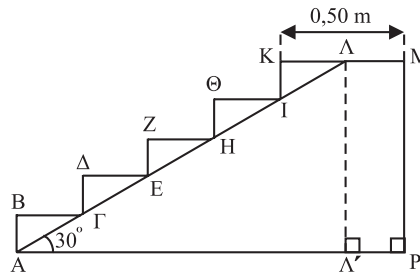
17. Στο σχήμα αποδίδεται η τομή μιας σκεπής. Εάν το σημείο I είναι το μέσο της BK, υπολογίστε τα μήκη των δοκαριών AM, AB, KM και ΙΛ.



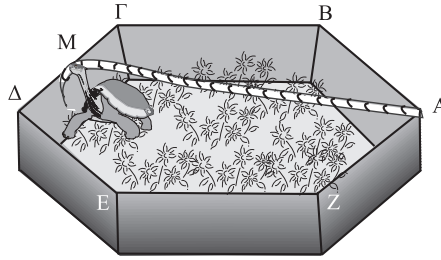
18. Η κεραμοσκεπή ενός δωματίου, που έχει κλίση  $30^\circ$ , έπαθε ζημιά. Μετά από μια καταιγίδα μια κηλίδα νερού εμφανίστηκε στο δάπεδο σε απόσταση 2 m από τον τοίχο. Σε ποια απόσταση από το ψηλότερο σημείο της σκεπής βρίσκεται το σπασμένο κεραμίδι;



19. Στο σχήμα δίνεται η τομή μιας σκάλας. Το σημείο Λ είναι μέσο της απόστασης KM. Υπολογίστε:  
α) Το μήκος ενός βήματος ( $BΓ = ΔΕ = ΖΗ = ΘΙ = ΚΛ$ ).  
β) το πλάτος της σκάλας AP.



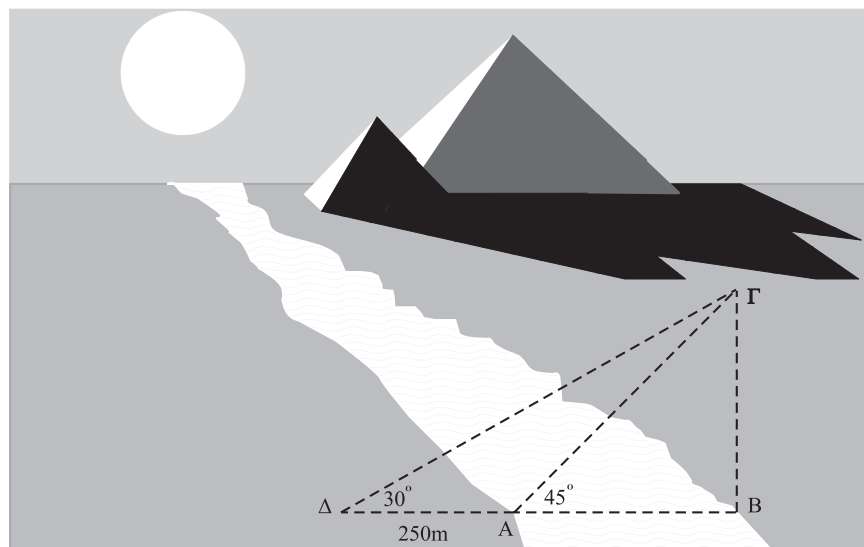
20. Ένας ζωολογικός κήπος έχει σχήμα κανονικού εξαγώνου πλευράς 2 km. Μια χελώνα βαδίζει κατά μήκος της περιμέτρου του κήπου, διανύει 5 km και σταματάει.



Πόσα km απέχει το σημείο Μ στο οποίο στέκει η χελώνα από το σημείο Α που ξεκίνησε; (Φτιάξτε το γεωμετρικό σχήμα που αντιστοιχεί στο πρόβλημα. Υπολογίστε την ΑΓ και στη συνέχεια την ΑΜ).

21. Κατασκευάστε ένα κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R και θεωρήστε μια διάμετρό του ΑΒ που διαιρεί τον κύκλο σε δύο ημικύκλια. Έστω Ν το μέσο του ενός ημικυκλίου και Η το μέσο της ακτίνας ΟΒ. Χαράξτε τη μεσοκάθετο της ΟΒ και έστω Μ το σημείο στο οποίο αυτή τέμνει το ημικύκλιο που δεν περιέχει το Ν.
- Υπολογίστε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΝΒΜ.
  - Χρησιμοποιώντας γνωστές σας τριγωνομετρικές σχέσεις υπολογίστε τις πλευρές του τετραπλεύρου συναρτήσει του R.
  - Υπολογίστε τα ΗΑ, ΗΒ και ΗΜ συναρτήσει του R.

22. Σ' ένα κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R εγγράψτε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ).
- Εάν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΒΟΜ = ΒΑΓ.
  - Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 2RημΑ.
23. Αιγύπτιοι μηχανικοί, για να προσδιορίσουν το πλάτος του ποταμού Νείλου μεταξύ δύο σημείων Α και Β, προσδιόρισαν με το θεοδόλιχο μια διεύθυνση κάθετη προς την ΑΒ και σκόπευσαν πάνω σ' αυτή σημείο Γ έτσι ώστε: η γωνία ΒΑΓ = 45°. Στη συνέχεια διάνυσαν πάνω στη διεύθυνση ΒΑ μια απόσταση ΑΔ = 250 m και μέτρησαν τη γωνία ΑΔΓ = 30°. Μ' αυτές τις μετρήσεις που σημειώνονται στο παρακάτω σχήμα, βρήκαν ότι το πλάτος ΑΒ του Νείλου είναι 343,66 m.

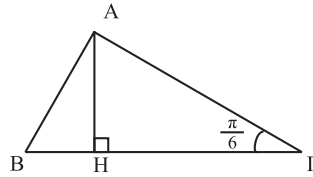


Βρείτε τους συλλογισμούς με τους οποίους οι μηχανικοί υπολόγισαν το πλάτος του Νείλου. Κλειδί των συλλογισμών αυτών είναι η γωνία των  $45^\circ$ . Γιατί επέλεξαν οι μηχανικοί η γωνία  $\text{BA}\Gamma$  να είναι  $45^\circ$ ; Δώστε απάντηση σ' αυτό το ερώτημα και χρησιμοποιήστε τη ως αφετηρία των σκέψεών σας.

24. Ισοσκελούς τριγώνου  $\text{AB}\Gamma$  ( $\text{AB} = \text{A}\Gamma = a$ ) η γωνία της κορυφής  $\text{A}$  έχει σε ακτίνια μέτρο  $\theta$ .

Αποδείξτε ότι η βάση  $\text{B}\Gamma = 2a\eta\mu\frac{\theta}{2}$ .

25. Στο διπλανό σχήμα είναι:  $\text{BH} = 1$  m και  $\text{GH} = 3$  m. Ποια είναι η ακριβής τιμή της περιμέτρου του τριγώνου  $\text{AB}\Gamma$ ;



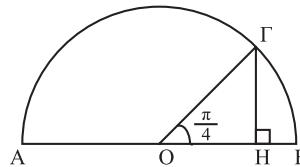
26. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $\text{AB}\Gamma$  με πλευρές  $\alpha, \beta, \gamma$ .

- α) Χαράζετε το ύψος  $\text{AH}$ . Υπολογίστε τα  $\eta\mu\text{B}$  και  $\eta\mu\Gamma$  στα τρίγωνα  $\text{ABH}$  και  $\text{A}\Gamma\text{H}$  αντίστοιχα και συμπεράνατε από αυτά την ισότητα:  $\beta\eta\mu\Gamma = \gamma\eta\mu\text{B}$ .  
 β) Βρείτε ανάλογη ισότητα χρησιμοποιώντας τα ορθογώνια τρίγωνα που ορίζονται από το ύψος  $\text{BK}$ .  
 γ) Χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα των ερωτημάτων (α) και (β), να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\text{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu\text{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$$

27. Στο διπλανό σχήμα είναι  $\text{OA} = \text{OB} = \text{O}\Gamma = 1$  m και  $\text{BO}\Gamma = \pi/4$  rad.

- α) Υπολογίστε την  $\text{OH}$  και την  $\text{AH}$  και στη συνέχεια δείξτε ότι:



$$\sigma\upsilon\upsilon\text{B}\text{A}\Gamma = \frac{2 + \sqrt{2}}{2\text{A}\Gamma} \quad (1)$$

- β) Βρείτε το είδος του τριγώνου  $\text{A}\Gamma\text{B}$  και στη συνέχεια δείξτε ότι:

$$\sigma\upsilon\upsilon\text{B}\text{A}\Gamma = \frac{\text{A}\Gamma}{2} \quad (2)$$

- γ) Αποδείξτε ότι: i)  $\text{B}\text{A}\Gamma = \frac{\pi}{8}$  και

$$\text{ii) } \sigma\upsilon\upsilon\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$



28. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  ορθογώνιο στο  $A$  και τέτοιο ώστε  $B\Gamma = 2a$  και  $B = \frac{\pi}{8}$  rad.

α) Εάν  $O$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$  και  $AH$  το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα  $B\Gamma$ :

i) Αποδείξτε ότι  $\angle AOH = \frac{\pi}{4}$  rad.

ii) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο συμπέρασμα δικαιολογήστε γιατί  $AH = OH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

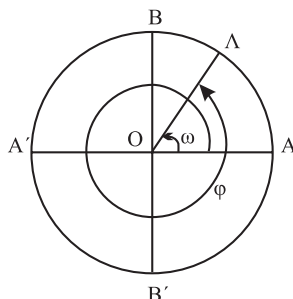
iii) Στη συνέχεια δείξτε ότι:  $AB = a\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ .

β) Με τη βοήθεια του τριγώνου  $AHB$  υπολογίστε: το συν  $\frac{\pi}{8}$  και το ημ  $\frac{\pi}{8}$ .

**Β΄**  
**Γενική Τριγωνομετρία**

**Τριγωνομετρικός κύκλος - Τριγωνομετρικοί αριθμοί γενικευμένης γωνίας**

1. Η γωνία  $\omega$  του παρακάτω σχήματος είναι θετική.



α) Συνδέστε κατάλληλα τα στοιχεία των δύο στηλών:

Στήλη (A)	Στήλη (B)
ΟΛ	αρχική πλευρά της $\omega$
ΟΑ	τελική πλευρά της $\omega$

β) Αν  $\text{AO}\Lambda = \omega$ , συμπληρώστε την ισότητα:

$\varphi = \dots\dots\dots$

γ) Συμπληρώστε τις φράσεις:

Η γωνία  $720^\circ + \omega$  έχει αρχική πλευρά την  $\dots\dots\dots$

Η γωνία  $-360^\circ + \omega$  έχει τελική πλευρά την  $\dots\dots\dots$

2. Στους κύκλους της διπλανής σελίδας έχουν αντιστοιχηθεί:

- κάποιοι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και το 0, στον πρώτο
  - κάποιοι αρνητικοί αριθμοί και το 0, στο δεύτερο
- με βάση τη συμφωνία ότι ο αριθμός 1 αντιστοιχεί σε τόξο 1 rad.

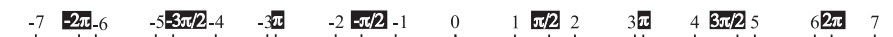
Αν συνεχίσουμε την τοποθέτηση των πραγματικών αριθμών πάνω στους κύκλους αυτούς:

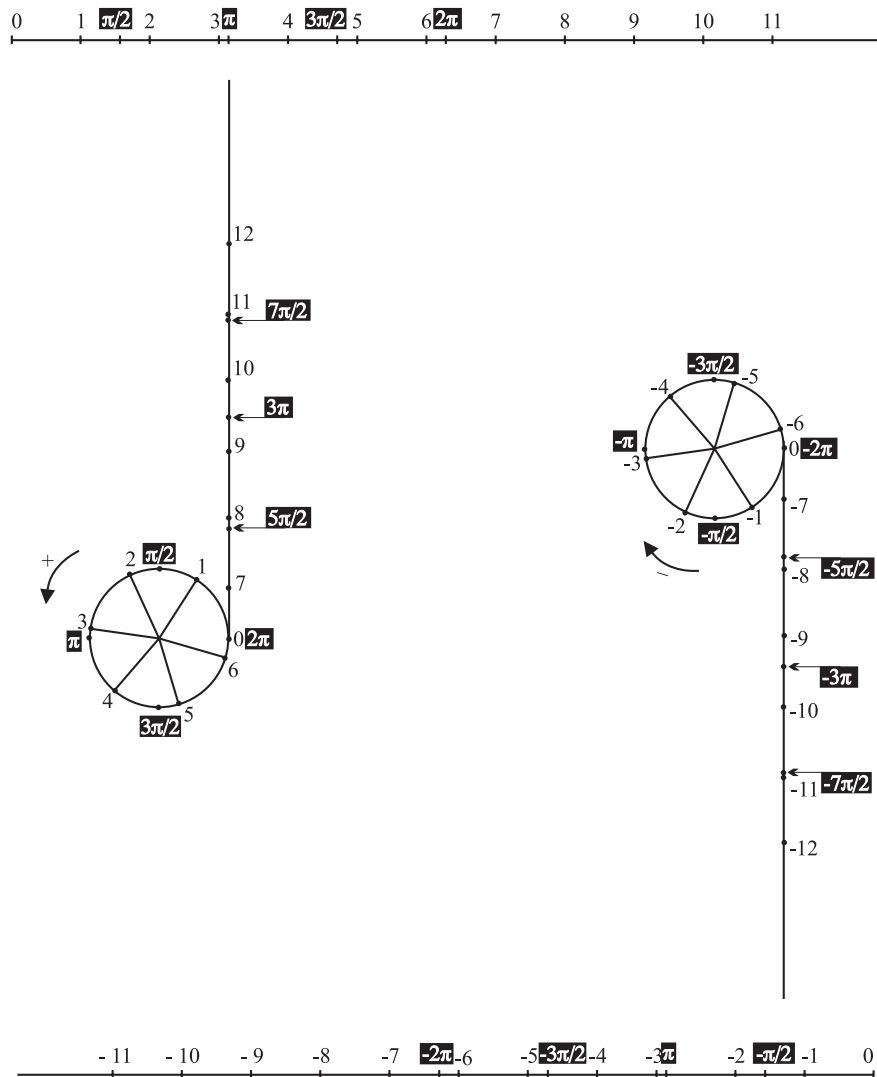
α) Ο 7 θα συμπέσει με τον αριθμό 1; Αν ναι, γιατί;

Αν όχι, θα προηγείται ή θα έπεται του 1 και κατά πόσα ακτίνια;

β) Ο -14 θα συμπέσει με τον αριθμό -2; Αν ναι, γιατί;

Αν όχι, θα προηγείται ή θα έπεται του -2 και κατά πόσα ακτίνια;





3. Χρησιμοποιώντας τον τύπο  $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ , να συμπληρώσετε τον πίνακα:

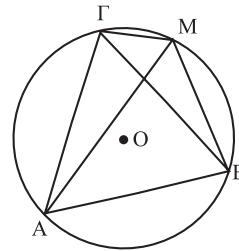
Μέτρο γωνίας σε μοίρες	0°	30°	45°			120°		150°	180°		1°
Μέτρο γωνίας σε ακτίνια	0			$\pi/3$	$\pi/2$		$3\pi/4$		$\pi$	1	

4. Πόσο είναι σε ακτίνια οι γωνίες:  
α) ενός ισόπλευρου τριγώνου;  
β) ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου;

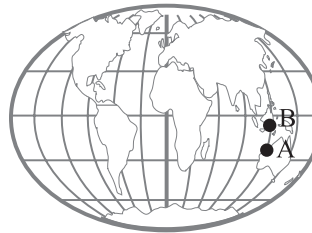
5. Συμπληρώστε τον πίνακα:

Μέτρο γωνίας σε μοίρες	10°	53°	60°	18°				
Μέτρο γωνίας σε ακτίνια					$2\pi/3$	$\pi/4$	$3\pi/8$	2

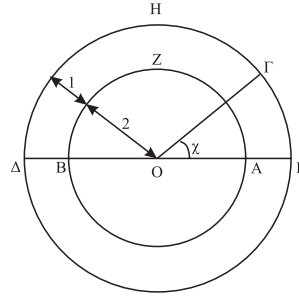
6. Εκφράστε σε ακτίνια τις γωνίες A, B και Γ τριγώνου ABΓ:  
α) όταν  $A = 72^\circ$  και  $B = 18^\circ$ ,  
β) όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές και  $A = 45^\circ$   
(θα εξετάσετε και τις δύο πιθανές περιπτώσεις).



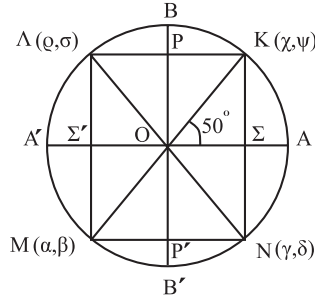
7. Το τρίγωνο ABΓ του διπλανού σχήματος είναι ισόπλευρο. Υπολογίστε σε ακτίνια τις γωνίες AOB, AMB και BMΓ.
8. Σε τρίγωνο ABΓ είναι  $A = \pi/6$  rad και  $B = 2\pi/6$  rad. Τι είδους τρίγωνο είναι το ABΓ;
9. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και με ακτίνες R και R' αντίστοιχα. Μια γωνία xOy αποκόπτεται από τον K ένα τόξο με μήκος 9 και από τον K' ένα τόξο με μήκος 20. Αποδείξτε ότι  $\frac{R'}{R} = \frac{20}{9}$ .
10. Σε κύκλο ακτίνας  $R = 4$ , υπολογίστε το μήκος τόξων που αντιστοιχούν στις γωνίες:  
α)  $\alpha = \pi/4$  rad,      β)  $\alpha = 2\pi/3$  rad,      γ)  $\alpha = 36^\circ$
11. Δύο πόλεις A και B νησιών του Ινδικού Ωκεανού βρίσκονται πάνω στον ίδιο Μεσημβρινό και έχουν γεωγραφικό πλάτος  $20,52^\circ$  Νότιο και  $4,38^\circ$  Νότιο αντίστοιχα. Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των δύο πόλεων ακολουθώντας τον Μεσημβρινό του οποίου το συνολικό μήκος είναι 40.000 km.



12. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι: το τόξο ΓΗΔ του εξωτερικού κύκλου έχει το ίδιο μήκος με το ημικύκλιο ΑΖΒ του εσωτερικού κύκλου. Ποια πρέπει να είναι η τιμή της γωνίας  $x = \text{ΑΟΓ}$  σε rad;

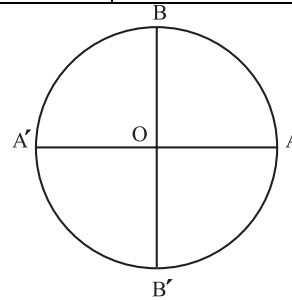


13. Με βάση το παρακάτω σχήμα, συμπληρώστε τον πίνακα:

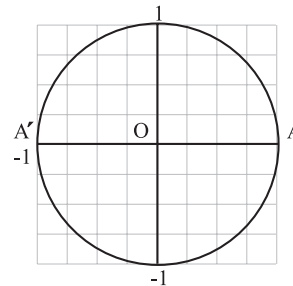


γωνία	τελική πλευρά	μέτρο γωνίας σε μοίρες	ημίτονο γωνίας	συνημίτονο γωνίας
θετική ΑΟΚ		50°	$y = + (OP)$	
θετική ΑΟΛ				$\rho = - (O\Sigma')$
θετική ΑΟΜ				
Αρνητική ΑΟΝ				

14. α) Τοποθετήστε στο διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο τη γωνία  $\text{ΑΟΑ}_1 = 25^\circ$  και προσδιορίστε γραφικά το ημίτονο και το συνημίτονό της. Να γίνει το ίδιο για τις γωνίες  $\text{ΑΟΑ}_2 = 76^\circ$ ,  $\text{ΑΟΑ}_3 = 135^\circ$ .

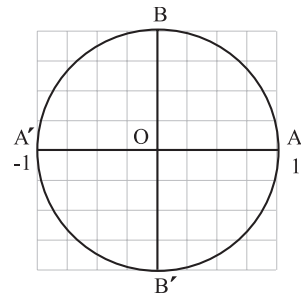


- β) Στον άξονα Α'ΟΑ προσδιορίστε σημείο Η με τετμημένη 0,75. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε γραφικά τις γωνίες που έχουν συνημίτονο τον αριθμό 0,75. Να προσδιορίσετε γραφικά και τα ημίτονα των γωνιών αυτών.



- γ) Να γίνει ότι και στο (β) για σημείο Κ με τετμημένη 0,50 και για σημείο Λ με τετμημένη -0,60.

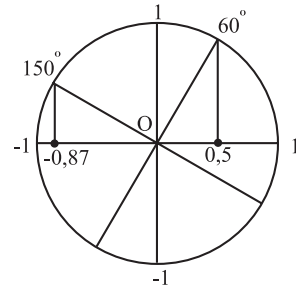
δ) Στον άξονα Β'ΟΒ να προσδιορίσετε σημείο Κ με τεταγμένη 0,50. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε γραφικά τις γωνίες που έχουν ημίτονο τον αριθμό 0,50. Να προσδιορίσετε γραφικά και το συνημίτονο των γωνιών αυτών.



ε) Να γίνει ότι και στο (δ) για σημείο Ν με τεταγμένη 0,80.

15. Με βάση τα στοιχεία που σημειώνονται στο διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο και τις απαραίτητες ευθείες που πρέπει να χαράξετε, να βρείτε:

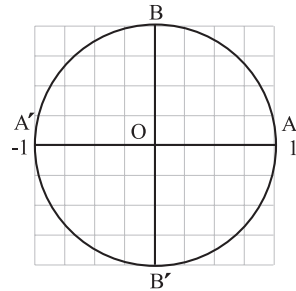
- α)  $\sin 0^\circ$                       β)  $\sin 30^\circ$   
 $\sin 90^\circ$                        $\sin 120^\circ$   
 $\sin 180^\circ$                        $\sin 240^\circ$   
 $\sin 270^\circ$                        $\sin 330^\circ$



Δικαιολογήστε την απάντησή σας στο (β) ερώτημα.

16. Στο διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο:

Να σχεδιάσετε τις γωνίες που σημειώνονται στους πίνακες Α, Β, Γ και στη συνέχεια να συμπληρώσετε τους πίνακες αυτούς.



Πίνακας Α				
γωνία	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
τελική πλευρά	OB			

Πίνακας Β				
γωνία	$\pi/4$	$3\pi/4$	$5\pi/4$	$7\pi/4$
τελική πλευρά				

Πίνακας Γ							
γωνία	$\pi/8$	$2\pi/8$	$3\pi/8$	$\pi/2$	.....	$15\pi/8$	$2\pi$
τελική πλευρά							

Τι είδους πολύγωνο ορίζουν στον τριγωνομετρικό κύκλο οι τελικές πλευρές των γωνιών του Πίνακα Γ;

17. Να γράψετε δύο γωνίες που να έχουν την ίδια αρχική και την ίδια τελική πλευρά με τη γωνία:

- α)  $60^\circ$ , β)  $-20^\circ$ .

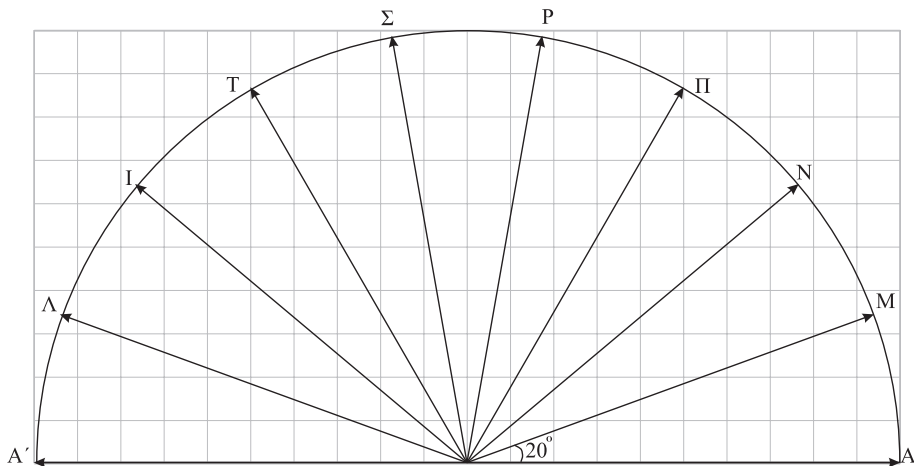
18. Να τοποθετήσετε στον τριγωνομετρικό κύκλο τις γωνίες:

$90^\circ$ ,  $-90^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $210^\circ$ ,  $-240^\circ$ ,  $750^\circ$ ,  $-4\pi/3$  rad,  $-\pi$  rad.

**19.** Να εξετάσετε αν οι γωνίες  $\varphi = 760^\circ$  και  $\omega = -320^\circ$  έχουν την ίδια τελική πλευρά.

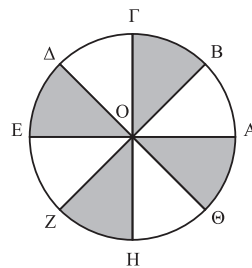


20. Με βάση το παρακάτω σχήμα συμπληρώστε τον πίνακα που ακολουθεί:



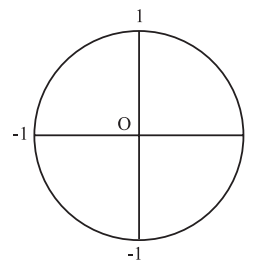
Γωνία	0°	20°	40°	60°	120°	140°	160°	180°
Τελική πλευρά		OM						
Πέρασ αντ. Τόξου			N					
Τετμημένη				0,50				
Τεταγμένη		0,34						

21. Ο διπλανός κυκλικός δίσκος έχει διαιρεθεί σε οκτώ ίσους κυκλικούς τομείς. Να βρείτε σε ακτίνια τα μέτρα των γωνιών: AOB, ZOE, HOB και ZOΘ.



22. Στον τριγωνομετρικό κύκλο:

- Να σχεδιάσετε τις γωνίες:  $\pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3, 2\pi$ .
- Ποιες από τις παραπάνω γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο;
- Ποιες από τις παραπάνω γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο;
- Τι είδους πολύγωνο ορίζουν τα σημεία τομής των τελικών πλευρών των γωνιών αυτών με τον τριγωνομετρικό κύκλο;
- Γράψτε τα μέτρα των γωνιών αυτών σε μοίρες.



23. Στον τριγωνομετρικό κύκλο να σχεδιάσετε τα πέρατα των τόξων:

$$x_k = k\pi/3 \text{ με } k \in \mathbb{Z}$$

Πόσες διαφορετικές τιμές θα έχει η συνάρτηση  $\eta\mu x_k$ ; η  $\sigma\upsilon\nu x_k$ ;

24. Στον τριγωνομετρικό κύκλο:

α) Να σχεδιάσετε τις γωνίες:

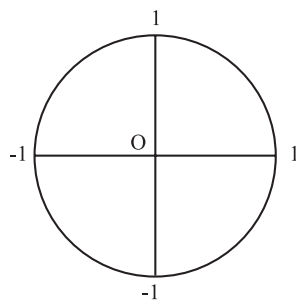
$$\pi/6, 2\pi/6, \dots, 11\pi/6, 2\pi.$$

β) Ποιες από τις παραπάνω γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο;

γ) Ποιες από τις παραπάνω γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο;

δ) Τι είδους πολύγωνο ορίζουν τα σημεία τομής των τελικών πλευρών των γωνιών αυτών με τον τριγωνομετρικό κύκλο;

ε) Γράψτε τα μέτρα των γωνιών αυτών σε μοίρες.



25. Στον τριγωνομετρικό κύκλο να σχεδιάσετε τα πέρατα των τόξων:

$$y_k = k\pi/6 \text{ με } k \in \mathbb{Z}$$

Πόσες διαφορετικές τιμές θα έχει η συνάρτηση  $\sin y_k$ ;

26. Τι είδους πολύγωνο ορίζουν στον τριγωνομετρικό κύκλο οι τελικές πλευρές των γωνιών  $k\pi/12$  με  $k \in \mathbb{Z}$ ;

27. Το ημω:

A. μετριέται με μοίρες

B. μετριέται με rad

Γ. μετριέται με m

Δ. μετριέται με cm

E. δεν μετριέται με καμιά μονάδα

28. Από τις παρακάτω τιμές **δεν μπορεί** να είναι ημίτονο γωνίας:

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $-\frac{3}{2}$

Γ.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Δ.  $-\frac{1}{2}$

E.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

29. Αν  $|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x| = 2$  τότε η γωνία  $x$  ισούται με:  
 Α.  $0^\circ$     Β.  $90^\circ$     Γ.  $180^\circ$     Δ.  $270^\circ$     Ε. κανένα από τα προηγούμενα.

30. Για οποιαδήποτε γωνία  $x$ :  
 Α.  $\sigma\upsilon\nu x < -1$     Β.  $\sigma\upsilon\nu x > 1$     Γ.  $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$   
 Δ. το  $\sigma\upsilon\nu x$  δεν ορίζεται    Ε. δεν ισχύει κανένα από τα προηγούμενα.

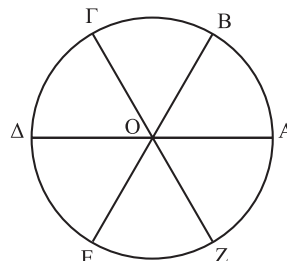
31. Ο κύκλος του διπλανού σχήματος είναι χωρισμένος σε έξι ίσα τόξα.

α) Να δώσετε σε ακτίνια το μέτρο των γωνιών:

$\angle AOB = \dots\dots\dots$      $\angle BO\Delta = \dots\dots\dots$

β) Να δώσετε ένα μέτρο των τόξων:

$AB$      $B\Delta$      $E\Gamma$      $\Delta A$



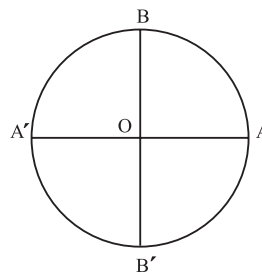
γ) Να προσδιορίσετε το σημείο M του κύκλου στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- i) το τόξο BM να έχει μέτρο  $2\pi/3$
- ii) το τόξο ZM να έχει μέτρο  $-\pi/3 + 8\pi$
- iii) τα τόξα AE και ΓM να έχουν το ίδιο μέτρο.

32. Δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος που δείχνει το διπλανό σχήμα.

α) Να γράψετε σε μοίρες δύο γωνίες:

- i) που να έχουν τελική πλευρά την OA ..... ..
- ii) που να έχουν τελική πλευρά την OB ..... ..
- iii) που να έχουν τελική πλευρά την OA' ..... ..
- iv) που να έχουν τελική πλευρά την OB' ..... ..



β) Να γράψετε σε ακτίνια όλες τις γωνίες που έχουν τελική πλευρά την OA, την OB, την OA' και την OB'.

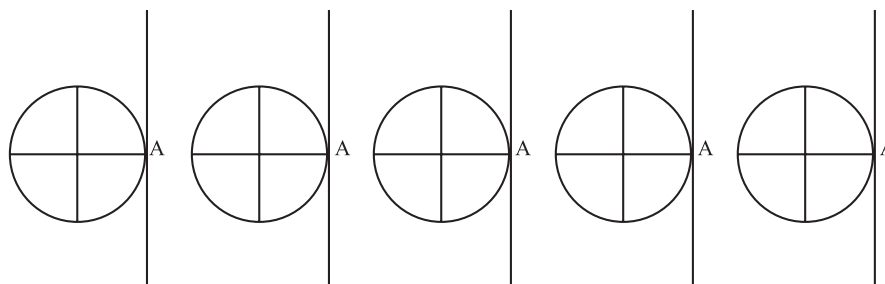
γ) Να γράψετε σε ακτίνια όλες τις γωνίες που να έχουν τελική πλευρά:

- i) την OA ή την OA'
- ii) την OB ή την OB'.

δ) Ποια είναι η τελική πλευρά των γωνιών:

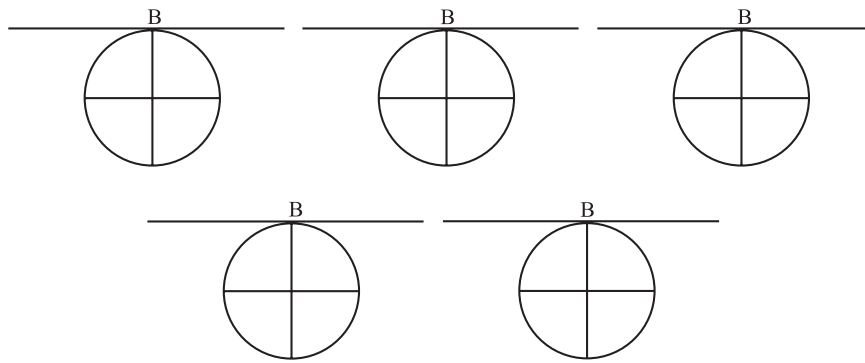
- i)  $2k\pi + 3\pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- ii)  $2k\pi - \pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

33. α) Στους παρακάτω τριγωνομετρικούς κύκλους έχουν σχεδιαστεί οι άξονες των εφαπτομένων. Να σχεδιάσετε σε καθέναν απ' αυτούς τις εφαπτόμενες των εξής γωνιών:  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $0^\circ$ .



β) Σε ποιο τεταρτημόριο πρέπει να βρίσκεται η τελική πλευρά μιας γωνίας για να είναι η εφαπτομένη της θετική;

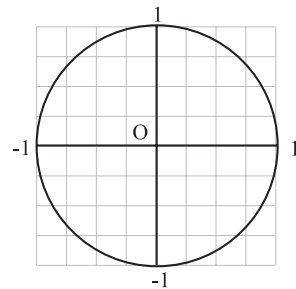
34. α) Στους παρακάτω τριγωνομετρικούς κύκλους έχουν σχεδιαστεί οι άξονες των συναρτημένων. Να σχεδιάσετε σε καθέναν απ' αυτούς τις συναρτηόμενες των εξής γωνιών:  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $0^\circ$ .



β) Σε ποιο τεταρτημόριο πρέπει να βρίσκεται η τελική πλευρά μιας γωνίας για να είναι η συναρτηόμενη της αρνητική;

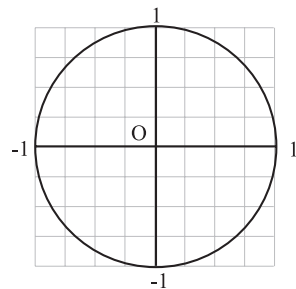
35. Στον τριγωνομετρικό κύκλο του διπλανού σχήματος τοποθετήστε τις γωνίες:  $\pi/3$ ,  $2\pi/3$ ,  $\pi$ ,  $4\pi/3$ ,  $5\pi/3$ ,  $2\pi$ .

- α) Ποιες από τις γωνίες αυτές έχουν την ίδια εφαπτομένη;  
β) Ποιες από τις γωνίες αυτές έχουν την ίδια συναρτηόμενη;



36. Στον τριγωνομετρικό κύκλο του διπλανού σχήματος τοποθετήστε τις γωνίες:  $\pi/4$ ,  $\pi/2$ ,  $3\pi/4$ ,  $\pi$ ,  $5\pi/4$ ,  $3\pi/2$ ,  $7\pi/4$ ,  $2\pi$ .

- α) Ποιες από τις γωνίες αυτές έχουν την ίδια εφαπτομένη;  
β) Ποιες από τις γωνίες αυτές έχουν την ίδια συναρτηόμενη;



**Το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών γενικευμένης γωνίας**

1. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα με το πρόσημο (+) ή (-) λαμβάνοντας υπόψη το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας.

	Τεταρτημόριο			
τελική πλευρά γωνίας $\theta$	$1^\circ$	$2^\circ$	$3^\circ$	$4^\circ$

πρόσημο ημθ				
πρόσημο συνθ				
πρόσημο εφθ				
πρόσημο σφθ				

2. Από τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς είναι θετικός ο:  
**A.** ημ $200^\circ$    **B.** συν $160^\circ$    **Γ.** συν  $(-140^\circ)$    **Δ.** ημ  $(-200^\circ)$    **Ε.** συν  $(-240^\circ)$
3. Συμπληρώστε στον παρακάτω πίνακα το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας  $\theta$ .

	τεταρτημόριο τελικής πλευράς
ημθ > 0 και συνθ < 0	
εφθ < 0 και συνθ < 0	
σφθ > 0 και συνθ > 0	
εφθ < 0 και συνθ > 0	
ημθ < 0 και εφθ < 0	
σφθ < 0 και ημθ > 0	
ημθ > 0 και εφθ > 0	
ημθ > 0 και συνθ < 0	

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

γωνία $\theta$	πρόσημο ημθ	πρόσημο συνθ	πρόσημο εφθ	πρόσημο σφθ
$117^\circ$				
$-100^\circ$				
$925^\circ$				
$-40^\circ$				

5. Αν ημθ < 0 και εφθ > 0, τότε η τελική πλευρά της γωνίας  $\theta$  βρίσκεται:  
**A.** στο 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο   **B.** στο 2<sup>ο</sup> τεταρτημόριο   **Γ.** στο 3<sup>ο</sup> τεταρτημόριο  
**Δ.** στον ημιάξονα  $Ox'$    **Ε.** στο 4<sup>ο</sup> ή 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο
6. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω γινομένων:  
α) ημ $80^\circ$  . συν $260^\circ$   
β) συν $120^\circ$  . εφ $310^\circ$   
γ) ημ $100^\circ$  . συν $100^\circ$   
δ) εφ $240^\circ$  . συν $320^\circ$
7. Αν  $0 < x < 90^\circ$  βρείτε το πρόσημο της παράστασης  
ημ  $(180^\circ - x)$  + εφ  $(90^\circ - x)$  - συν  $(270^\circ - x)$ .

8. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω διαφορών:

- α)  $\eta\mu 20^\circ - \eta\mu 23^\circ$
- β)  $\sigma\upsilon\nu 243^\circ - \sigma\upsilon\nu 250^\circ$
- γ)  $\epsilon\phi 200^\circ - \epsilon\phi 190^\circ$
- δ)  $\sigma\phi 72^\circ - \sigma\phi 294^\circ$

9. Αν  $0 < x < 360^\circ$ , τότε η σχέση  $\eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\nu^2 x$  αληθεύει για:

- A. μια τιμή του x
- B. δύο τιμές του x
- Γ. τρεις τιμές του x
- Δ. τέσσερις τιμές του x
- E. καμία τιμή του x

10. Με μοναδική πληροφορία την τιμή του αριθμού:

$$\pi = 3,14159264\dots$$

να βρείτε το πρόσημο του  $\eta\mu$  και του  $\sigma\upsilon\nu$  των παρακάτω γωνιών:

- α) 3,1 rad
- β) 1,58 rad
- γ) 4,5 rad
- δ) 31,4 rad

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Αξιοσημείωτες γωνίες						
$30^\circ / \frac{\pi}{6}$	$45^\circ / \frac{\pi}{4}$	$60^\circ / \frac{\pi}{3}$	$90^\circ / \frac{\pi}{2}$	$180^\circ / \pi$	$270^\circ / \frac{3\pi}{2}$	$360^\circ / 2\pi$

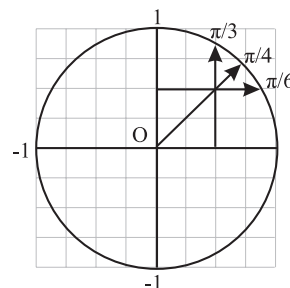
1. Συνδέστε κατάλληλα κάθε στοιχείο της στήλης (A) με ένα στοιχείο της στήλης (B).

Στήλη (A)	Στήλη (B)
$\sigma\upsilon\nu 30^\circ$	1/2
$\sigma\upsilon\nu 45^\circ$	$\sqrt{3}/2$
$\epsilon\phi \pi/4$	0
$\sigma\phi 60^\circ$	1
$\sigma\upsilon\nu \pi/3$	$-\sqrt{3}$
	$\sqrt{3}$
	$\sqrt{3}/3$
	-1
	$\sqrt{2}/2$

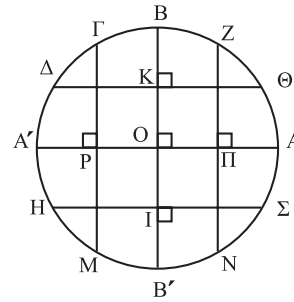
2. Εξηγήστε την κατασκευή στο διπλανό σχήμα.

Πώς προσδιορίστηκαν:

- α) Το πέρασ του τόξου  $\pi/4$ ;
- β) Το πέρασ του τόξου  $\pi/3$ ;
- γ) Το πέρασ του τόξου  $\pi/6$ ;
- δ) Ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των περάτων των τόξων  $\pi/3$  και  $\pi/6$ ;



3. Στο διπλανό σχήμα γνωρίζοντας ότι Π, Κ, Ρ και Ι είναι τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΑ' και ΟΒ' αντίστοιχα, να βρείτε τα μέτρα των γωνιών: ΑΟΘ, ΑΟΖ, ΑΟΓ, ΑΟΔ, ΑΟΗ, ΑΟΜ, ΑΟΝ, ΑΟΣ. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



4. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης:

$$\sin^2 0 + \sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{2}$$

5. Το  $\eta\mu 0^\circ + \eta\mu 30^\circ + \eta\mu 45^\circ + \eta\mu 60^\circ + \eta\mu 90^\circ$  ισούται με:

Α.  $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}$       Β.  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}$       Γ.  $\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{2}$   
 Δ.  $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$       Ε.  $\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2}{4}$

6. Η τιμή του γινομένου:  $\sin 0^\circ \cdot \sin 90^\circ \cdot \sin 180^\circ \cdot \sin 270^\circ \cdot \sin 360^\circ$  είναι:

Α. -1      Β. 1      Γ. 0      Δ. 2      Ε.  $\frac{1}{2}$

7. α) Συμπληρώστε στον παρακάτω πίνακα τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών που σημειώνονται.

Γωνία θ	0° 0	90° π/2	180° π	270° 3π/2	360° 2π
ημθ	.....	.....	.....	.....	.....
συνθ	.....	.....	.....	.....	.....
εφθ	.....	.....	.....	.....	.....
σφθ	.....	.....	.....	.....	.....

- β) Αντικαταστήστε στον ίδιο πίνακα τις τελείες με το (+) ή με το (-) ανάλογα με το πρόσημο των γωνιών που βρίσκονται μεταξύ των δεδομένων γωνιών.

**Σχέσεις μεταξύ των τεσσάρων τριγωνομετρικών αριθμών της ίδιας γωνίας**

1. Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω βασικές ταυτότητες (α) - (στ)

α) $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$	β) $\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$	γ) $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$
δ) $\sigma\upsilon\nu\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega}}$	ε) $\eta\mu\omega = \pm \frac{\varepsilon\varphi\omega}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega}}$	στ) $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

να λύσετε τις ασκήσεις που ακολουθούν:

2. Δίνεται:

α)  $\sigma\upsilon\nu\theta = 0,6$  όπου  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ . Υπολογίστε: i)  $\eta\mu\theta$ , ii)  $\varepsilon\varphi\theta$

β)  $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{4}$  όπου  $180^\circ < \theta < 270^\circ$ . Υπολογίστε: i)  $\eta\mu\theta$ , ii)  $\varepsilon\varphi\theta$



3. Εάν  $\eta\mu\theta = 0,4$  και  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ , υπολογίστε το  $\sigma\upsilon\nu\theta$  και την  $\epsilon\phi\theta$ .
4. Εάν  $\eta\mu\gamma = \frac{\sqrt{2}}{3}$  και  $90^\circ < \gamma < 180^\circ$ , υπολογίστε το  $\sigma\upsilon\nu\gamma$  και την  $\epsilon\phi\gamma$ .
5. Εάν  $\epsilon\phi\theta = \frac{8}{15}$  και  $180^\circ < \theta < 270^\circ$ , υπολογίστε τους άλλους τριγωνο-μετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\theta$ .
6. Εάν  $\epsilon\phi\theta = -\frac{3}{4}$  και  $270^\circ < \theta < 360^\circ$ , να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνο-μετρικούς αριθμούς της γωνίας αυτής.
7. Να βρείτε τη γωνία  $\theta$ , αν γνωρίζετε ότι  $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  και  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ .
8. Να γίνουν οι πράξεις:  
 α)  $(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)^2$   
 β)  $(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 - (\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)^2$
9. Αν είναι  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , τότε να αποδείξετε ότι:  $\frac{1}{\epsilon\phi^2\alpha} = \frac{1}{\eta\mu^2\alpha} - 1$ .
10. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις  $x > \frac{2}{3}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  και  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  και συμβαίνει  $\eta\mu\alpha = \sqrt{\frac{3x-2}{3x}}$  και  $\epsilon\phi\beta = \sqrt{\frac{3x-2}{2}}$ , τότε να αποδείξετε ότι  $\alpha = \beta$ .
11. Αν  $2\epsilon\phi\theta - 3 = 0$  και  $\eta\mu\theta < 0$ , να βρεθεί το  $\sigma\upsilon\nu\theta$ .
12. Αν  $6\eta\mu^2x + \eta\mu x - 1 = 0$  και  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ , να βρεθεί το  $\sigma\upsilon\nu x$ .
13. Αν  $2\sigma\upsilon\nu^2x - 5\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$  και  $270^\circ < x < 360^\circ$ , να βρεθεί η  $\epsilon\phi x$ .
14. Αποδείξτε ότι για οποιεσδήποτε γωνίες  $x$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  ισχύουν:  
 α)  $(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1 - 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$   
 β)  $\eta\mu^4x - \sigma\upsilon\nu^4x = \eta\mu^2x - \sigma\upsilon\nu^2x = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2x = 2\eta\mu^2x - 1$   
 γ)  $(1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 2(1 + \sigma\upsilon\nu x)(1 + \eta\mu x)$   
 δ)  $\frac{1 - \epsilon\phi^2x}{1 + \epsilon\phi^2x} = 1 - 2\eta\mu^2x$   
 ε)  $1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1 + \eta\eta\mu} = \eta\mu x$   
 στ)  $\eta\mu^2\alpha(1 + \sigma\phi^2\alpha) + \sigma\upsilon\nu^2\alpha(1 + \epsilon\phi^2\alpha) = 2$

$$\zeta) \frac{\varepsilon\phi\alpha + \sigma\phi\beta}{\sigma\phi\alpha + \varepsilon\phi\beta} = \frac{\varepsilon\phi\alpha}{\varepsilon\phi\beta}$$

15. Αν  $|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x| = 1$ , τότε η γωνία  $x$  παίρνει:

- Α. καμία τιμή                      Β. μια τιμή                      Γ. τρεις τιμές  
 Δ. άπειρες τιμές                  Ε. τέσσερις τιμές

16. Αν  $|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x| = 0$ , τότε η τελική πλευρά της γωνίας  $x$  βρίσκεται:

- Α. στο 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο          Β. στο 2<sup>ο</sup> τεταρτημόριο  
 Γ. στο 3<sup>ο</sup> τεταρτημόριο          Δ. στο 4<sup>ο</sup> τεταρτημόριο  
 Ε. δεν υπάρχει γωνία  $x$  που να ικανοποιεί αυτή τη σχέση

17. Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις ισχύουν:

α)  $\eta\mu x = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \lambda > 1$

β)  $\eta\mu x = \frac{\pi}{4}$

γ)  $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\pi}{2}$

δ)  $\eta\mu x = \sqrt{3} - 2$

ε)  $\sigma\upsilon\nu x = -\sqrt[3]{7}$

στ)  $\eta\mu\alpha = \sqrt[3]{29} - \sqrt{11}$

ζ)  $\eta\mu x = \sqrt{2} - 1$

η)  $\varepsilon\phi x = \frac{\pi}{2}$

18. Αν  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , τότε:

- A.  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x > 1$     B.  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x < 1$     Γ.  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 1$   
Δ.  $\epsilon\phi x < \eta\mu x$     Ε. κανένα από τα παραπάνω

19. Αν  $\kappa = 2\sigma\upsilon\nu x + 5$ , τότε η μεγαλύτερη τιμή του  $\kappa$  είναι:

- A. 5    B. 3    Γ. - 2    Δ. 7    Ε. - 7

20. Αν  $45^\circ < x < 90^\circ$ , τότε:

- A.  $\eta\mu x > \sigma\upsilon\nu x$     B.  $\eta\mu x < \sigma\upsilon\nu x$     Γ.  $\epsilon\phi x < 1$

- Δ.  $|\eta\mu x| = |\sigma\upsilon\nu x|$     Ε.  $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x < \frac{1}{2}$

21. Να τοποθετήσετε το κατάλληλο σύμβολο (>), (<) ή (=) στις παρακάτω σχέσεις:

- α)  $\eta\mu 40^\circ \dots \eta\mu 40^\circ \eta\mu 60^\circ$   
β)  $\eta\mu 55^\circ \dots (\eta\mu 55^\circ)^2$   
γ)  $\sigma\upsilon\nu 170^\circ \dots \sigma\upsilon\nu 170^\circ \sigma\upsilon\nu 25^\circ$   
δ)  $\eta\mu 340^\circ \dots \epsilon\phi 340^\circ$   
ε)  $\sigma\upsilon\nu 70^\circ \dots \epsilon\phi 70^\circ$

22. Να δείξετε ότι η ανίσωση  $2\sigma\upsilon\nu^2 x - 11\sigma\upsilon\nu x + 15 > 0$  αληθεύει για οποιαδήποτε γωνία  $x$ .

23. Βρείτε τα  $x$  και  $y$  αν  $0 < y < x < \frac{\pi}{2}$  και  $3\eta\mu(x + y) + \sigma\upsilon\nu(x - y) = 4$ .

24. Βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή των παραστάσεων:

α)  $y = 2 + 3\sigma\upsilon\nu x$

β)  $y = 5 + \eta\mu^2 x$

γ)  $y = \frac{1}{2 - \eta\mu x}$

25. Αν  $\epsilon\phi x = \kappa$ , τότε το  $\frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2}$  ισούται με:  
 Α.  $1 + \eta\mu^2 x$     Β.  $\sigma\upsilon\nu^2 x$     Γ.  $\sigma\phi^2 x$     Δ.  $\eta\mu^2 x$     Ε.  $\epsilon\phi^2 x + 1$
26. Από τις παρακάτω σχέσεις σημειώστε αυτή που **δεν ισχύει πάντοτε** (χρειάζεται περιορισμούς):  
 Α.  $\eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$     Β.  $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$     Γ.  $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2 x}$   
 Δ.  $\eta\mu^2 x = 1 - \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2 x}$     Ε.  $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$
27. Αν  $x_1, x_2$  είναι ρίζες της εξίσωσης  
 $(1 + \eta\mu\phi) x^2 - (1 + \eta\mu^2\phi) x + (1 - \eta\mu\phi) \eta\mu\phi = 0$ ,  $\eta\mu\phi \neq -1$   
 τότε να δείξετε ότι:  $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = 1$
28. Να δείξετε ότι αν  $\epsilon\phi^2 x = 1 + 2\epsilon\phi^2 y$ , τότε  $\sigma\upsilon\nu^2 y = 2\sigma\upsilon\nu^2 x$ .
29. Αν  $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \sqrt{2} \eta\mu x$ , τότε και  $\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu x$ .
30. Αν  $3\eta\mu\theta + 5\sigma\upsilon\nu\theta = 5$ , τότε να δείξετε ότι:  $(3\sigma\upsilon\nu\theta - 5\eta\mu\theta)^2 = 9$ .
31. Αν το  $\eta\mu x = \frac{5}{13}$ ,  $90^\circ < x < 180^\circ$ , τότε το  $\sigma\upsilon\nu x$  ισούται με:  
 Α.  $-\frac{12}{13}$     Β.  $\frac{12}{13}$     Γ.  $\frac{8}{13}$     Δ.  $-\frac{8}{13}$     Ε.  $\frac{13}{5}$
32. Για οποιαδήποτε γωνία  $x$ , με  $x \neq \kappa\pi$  και  $\kappa \in \mathbb{Z}$ , η έκφραση  $(\eta\mu 2x)^2$  ισούται με:  
 Α.  $4\eta\mu x^2$     Β.  $\eta\mu^2 2x$     Γ.  $\eta\mu 4x^2$     Δ.  $\eta\mu 4x$     Ε.  $4\eta\mu x$

33. Αν  $x = 2\sigma\upsilon\upsilon\eta$  και  $y = 3\eta\mu\theta$ , τότε ισχύει:

A.  $x^2 - y^2 = -5$       B.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$       Γ.  $x^2 + y^2 = 13$

Δ.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$       E.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

34. Η παράσταση  $\kappa = (\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\upsilon\chi)^2 + (\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\upsilon\chi)^2$  ισούται με:

A. 1      B. 0      Γ. 2      Δ. 4      E.  $\frac{1}{2}$

35. Η παράσταση  $\kappa = \eta\mu^3\chi + \eta\mu\chi\sigma\upsilon\upsilon\eta^2\chi$  ισούται με:

A.  $\eta\mu\chi$       B.  $-\eta\mu\chi$       Γ.  $\epsilon\phi^2\chi$       Δ. 0      E. 1

36. Να δείξετε ότι:

α)  $|3\sigma\upsilon\upsilon\chi + 2\eta\mu\chi| \leq 5$

β)  $|2\eta\mu\chi - 10\sigma\upsilon\upsilon\chi| \leq 12$

## ΓΩΝΙΕΣ ΠΟΥ ΣΥΝΔΕΟΝΤΑΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ

*Γωνίες με την ίδια τελική πλευρά*

*Γωνίες με άθροισμα  $180^\circ$  - Γωνίες με διαφορά  $180^\circ$  - Γωνίες αντίθετες*

*Γωνίες με άθροισμα  $90^\circ$  - Γωνίες με διαφορά  $90^\circ$*

### Γωνίες με την ίδια τελική πλευρά

1. Συμπληρώστε τις ισότητες:

α)  $\eta\mu(2\kappa\pi + \alpha) = \dots\dots\dots$

β)  $\epsilon\phi(8\pi - \alpha) = \dots\dots\dots$

γ)  $\sigma\upsilon\nu(\alpha - 2\lambda\pi) = \dots\dots\dots$

δ)  $\sigma\phi(10\pi - \alpha) = \dots\dots\dots$

2. Να χαρακτηρίσετε με σωστό ή λάθος τις ισότητες:

**Σωστό    Λάθος**

α)  $\eta\mu 500^\circ = \eta\mu 140^\circ$                            

β)  $\sigma\upsilon\nu 750^\circ = \sigma\upsilon\nu 30^\circ$                            

γ)  $\epsilon\phi(-1200^\circ) = \epsilon\phi(-120^\circ)$                            

3. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

$780^\circ, \quad 1110^\circ, \quad \frac{17\pi}{3}$

4. Το  $\eta\mu 660^\circ$  ισούται με το:

**A.**  $\eta\mu 120^\circ$     **B.**  $\sigma\upsilon\nu 60^\circ$       **Γ.**  $\sigma\upsilon\nu 120^\circ$       **Δ.**  $\eta\mu(-60^\circ)$       **E.**  $\eta\mu 260^\circ$

5. Να δείξετε ότι:  $\epsilon\phi(740^\circ + x - y) - \epsilon\phi(20^\circ + x - y) = 0$ .

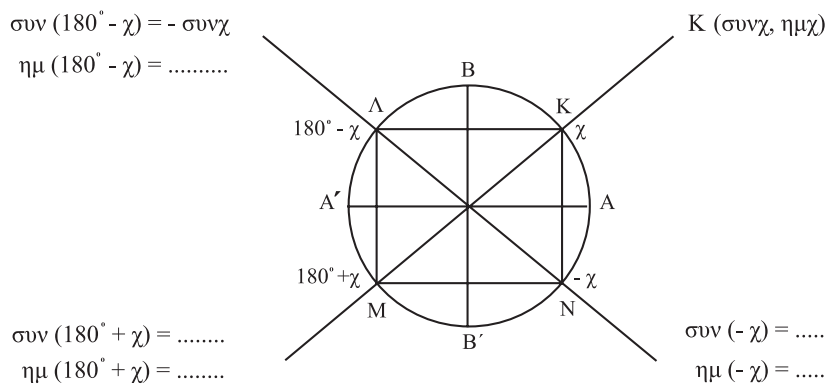
6. Να απλοποιηθεί το κλάσμα:  $\frac{\eta\mu(3\pi + \alpha)\sigma\phi(7\pi + \alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu(3\pi + \alpha)\sigma\phi(4\pi + \alpha)\eta\mu\alpha}$

7. Να αντιστοιχήσετε τις γωνίες της στήλης (A) στις γωνίες της στήλης (B), με τις οποίες έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

στήλη (A)	στήλη (B)
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{15\pi}{6}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{6}$
$\frac{2\pi}{7}$	$\frac{19\pi}{4}$
	$\frac{15\pi}{4}$
	$\frac{30\pi}{7}$
	$\frac{23\pi}{7}$

**Γωνίες με άθροισμα  $180^\circ$  - Γωνίες με διαφορά  $180^\circ$  - Γωνίες αντίθετες**

1. Με τη βοήθεια του παρακάτω τριγωνομετρικού κύκλου συνδέστε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $x$  με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:  $180^\circ - x$ ,  $180^\circ + x$  και  $-x$  στις παρακάτω ισότητες.



2. Υπολογίστε:

α)  $\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$                       β)  $\epsilon\phi(-45^\circ)$

γ)  $\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{3}\right)$                       δ)  $\sigma\phi(-60^\circ)$

3. Εάν  $x$  και  $y$  είναι δύο οποιεσδήποτε γωνίες, να δείξετε ότι:

α)  $\sigma\upsilon\nu(x - y) = \sigma\upsilon\nu(y - x)$

β)  $\eta\mu(x - y) = -\eta\mu(y - x)$

4. Επαληθεύστε τις ισότητες:

α)  $\sigma\upsilon\nu(x - \pi) = \sigma\upsilon\nu(x + \pi)$

β)  $\eta\mu(x - \pi) = \eta\mu(\pi + x)$

5. Να εκφράσετε συναρτήσει του  $\sigma\upsilon\nu x$  και του  $\eta\mu x$  την παράσταση:

$A = \sigma\upsilon\nu(-x) + \eta\mu(-x) + \eta\mu(\pi + x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x)$

6. Δίνεται:  $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ .

Υπολογίστε:

α)  $\eta\mu\frac{\pi}{8}$

β)  $\eta\mu\frac{7\pi}{8}$  και  $\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{8}$

γ)  $\eta\mu\frac{9\pi}{8}$  και  $\sigma\upsilon\nu\frac{9\pi}{8}$

δ)  $\eta\mu\left(-\frac{\pi}{8}\right)$  και  $\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

ε)  $\eta\mu\frac{325\pi}{8}$  και  $\sigma\upsilon\nu\frac{325\pi}{8}$

7. Συμπληρώστε τον πίνακα:

Γωνία	150°	135°	120°	210°	225°	240°
ημ						
συν						
εφ						



8. Εάν  $A, B, \Gamma$  είναι γωνίες τριγώνου, να αποδείξετε ότι:  
α)  $\eta\mu (B + \Gamma) = \eta\mu A$     β)  $\sigma\upsilon\nu (B + \Gamma) = -\sigma\upsilon\nu A$     γ)  $\epsilon\varphi (B + \Gamma) = -\epsilon\varphi A$

9. Εάν  $A, B, \Gamma, \Delta$  είναι γωνίες κυρτού τετραπλεύρου, να αποδείξετε ότι:

α)  $\eta\mu \frac{A+B}{2} = \eta\mu \frac{\Gamma+\Delta}{2}$

β)  $\epsilon\varphi \frac{A+\Gamma}{2} = -\epsilon\varphi \frac{B+\Delta}{2}$

γ)  $\sigma\upsilon\nu \frac{A+\Delta}{2} = -\sigma\upsilon\nu \frac{B+\Gamma}{2}$

10. Να αποδείξετε ότι:  $\sigma\upsilon\nu 560^\circ \eta\mu 140^\circ - \eta\mu 680^\circ \sigma\upsilon\nu 380^\circ = 0$

11. Να βρείτε συναρτήσσει του  $\eta\mu x$  και του  $\sigma\upsilon\nu x$  τα ημίτονα και τα συνημίτονα των αριθμών:

α)  $x - \pi$ ,    β)  $x + 4\pi$ ,    γ)  $-x + 5\pi$

12. Αν  $\kappa \in \mathbb{Z}$ , να δειχθεί ότι:  $\eta\mu \left( \frac{4\kappa\pi - \alpha}{2} \right) = -\eta\mu \frac{\alpha}{2}$ .

13. Δίνεται  $\eta\mu 42^\circ = 0,66$ . Να βρείτε το  $\eta\mu 138^\circ$  και το  $\sigma\upsilon\nu 222^\circ$ .

14. Εάν  $\sigma\upsilon\nu 146^\circ = -0,82$ , να βρείτε το  $\sigma\upsilon\nu 34^\circ$  και το  $\eta\mu 214^\circ$ .

15. Δίνεται μια οξεία γωνία  $\alpha$  και η γωνία  $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ .

α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  και  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  είναι παραπληρωματικές.

β) Γράψτε τις ισότητες που συνδέουν τους αριθμούς  $\eta\mu\beta$ ,  $\sigma\upsilon\nu\beta$ ,  $\epsilon\varphi\beta$ ,

με τους  $\eta\mu \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ ,  $\sigma\upsilon\nu \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ ,  $\epsilon\varphi \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ .

16. Δίνεται ότι:  $\text{csc} \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ .

α) Να υπολογίσετε: i)  $\eta\mu \frac{\pi}{5}$  και ii)  $\epsilon\phi \frac{\pi}{5}$ .

β) Από τα  $\eta\mu \frac{\pi}{5}$  και  $\text{csc} \frac{\pi}{5}$ , να υπολογισθούν:

i)  $\eta\mu \frac{4\pi}{5}$  και  $\text{csc} \frac{4\pi}{5}$ , ii)  $\eta\mu \frac{6\pi}{5}$  και  $\text{csc} \frac{6\pi}{5}$

17. Δίνεται ότι  $\eta\mu \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ :

α) Υπολογίστε: i)  $\text{csc} \frac{\pi}{12}$ , ii)  $\epsilon\phi \frac{\pi}{12}$ .

β) Στη συνέχεια υπολογίστε το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών:

i)  $\frac{11\pi}{12}$ , ii)  $\frac{13\pi}{12}$ , iii)  $\frac{143\pi}{12}$

18. Υπολογίστε το ημίτονο και το συνημίτονο των παρακάτω γωνιών:

α)  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{4\pi}{3}$ ,  $-\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{71\pi}{3}$ ,  $\frac{97\pi}{3}$

β)  $-\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{5\pi}{4}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{81\pi}{4}$ ,  $-\frac{108\pi}{4}$

γ)  $\frac{5\pi}{6}$ ,  $-\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{7\pi}{6}$ ,  $\frac{11\pi}{6}$ ,  $\frac{13\pi}{6}$

δ)  $-\frac{8\pi}{3}$ ,  $\frac{11\pi}{6}$ ,  $\frac{13\pi}{4}$

Χρησιμοποιήστε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  και  $\frac{\pi}{6}$  καθώς και τους τύπους που συνδέουν τις γωνίες.

19. Το  $\eta\mu(-\omega)$  ισούται με:

**A.**  $\eta\mu\omega$     **B.**  $\text{csc}(\pi - \omega)$     **Γ.**  $-\text{csc}(\pi + \omega)$     **Δ.**  $-\eta\mu\omega$

**E.** κανένα από τα προηγούμενα

20. Το  $-\text{csc}(-\omega)$  ισούται με:

**A.**  $\text{csc}\omega$     **B.**  $-\text{csc}\omega$     **Γ.**  $\eta\mu\omega$     **Δ.**  $\eta\mu(-\omega)$

**E.** κανένα από τα προηγούμενα

21. Το  $\text{csc}(-\omega)$  ισούται με:

**A.**  $\text{csc}\omega$     **B.**  $-\text{csc}\omega$     **Γ.**  $\eta\mu(\pi - \omega)$     **Δ.**  $-\eta\mu(\pi - \omega)$

**E.** κανένα από τα προηγούμενα

22. Η  $\epsilon\phi(-\omega)$  ισούται με:

**A.**  $-\text{csc}\omega$     **B.**  $-\epsilon\phi\omega$     **Γ.**  $\epsilon\phi(\pi + \omega)$     **Δ.**  $\text{csc}\omega$

**E.** κανένα από τα προηγούμενα

23. Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης:  
 $A = \eta\mu (x - y) \sigma\upsilon\nu (y - x) + \eta\mu (y - x) \sigma\upsilon\nu (x - y)$
24. Αν  $\kappa$  ακέραιος, τότε για κάθε γωνία  $x$  ναδειχθεί ότι:  
 α)  $\eta\mu [(-1)^{2\kappa+1} x] = -\eta\mu x$   
 β)  $\sigma\upsilon\nu [(-1)^{2\kappa+1} x] = \sigma\upsilon\nu x$   
 γ)  $\epsilon\phi [(-1)^{2\kappa} x] = \epsilon\phi x$
25. Να δειχθεί ότι αν  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ , τότε  $\sigma\upsilon\nu|x| = |\sigma\upsilon\nu(-2\kappa\pi + x)|$ .
26. Το  $\eta\mu(\pi - \omega)$  ισούται με:  
 Α.  $\sigma\upsilon\nu\omega$     Β.  $-\eta\mu\omega$     Γ.  $\eta\mu\omega$     Δ.  $-\sigma\upsilon\nu\omega$   
 Ε. κανένα από τα προηγούμενα
27. Το  $\sigma\upsilon\nu(\pi + \omega)$  ισούται με:  
 Α.  $\eta\mu(-\omega)$     Β.  $\sigma\upsilon\nu\omega$     Γ.  $\eta\mu\omega$     Δ.  $-\sigma\upsilon\nu\omega$   
 Ε. κανένα από τα προηγούμενα
28. Η  $\epsilon\phi(\pi + \omega)$  ισούται με:  
 Α.  $\sigma\phi\omega$     Β.  $\epsilon\phi\omega$     Γ.  $-\epsilon\phi\omega$     Δ.  $\sigma\phi(-\omega)$   
 Ε. κανένα από τα προηγούμενα

29. Το  $\eta\mu 315^\circ$  ισούται με:

A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     B.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$     Γ.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     Δ.  $\frac{1}{2}$     Ε.  $-\frac{1}{2}$

30. Η  $\epsilon\phi 315^\circ$  ισούται με:

A. 1    B. -1    Γ.  $\sqrt{3}$     Δ.  $-\sqrt{3}$     Ε.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

31. Το  $\eta\mu(\pi + \omega)$  ισούται με:

A.  $\eta\mu\omega$     B.  $-\eta\mu\omega$     Γ.  $\sigma\upsilon\nu\omega$     Δ.  $\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega)$   
Ε. κανένα από τα προηγούμενα

32. Το  $\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega)$  ισούται με:

A.  $\eta\mu(-\omega)$     B.  $\sigma\upsilon\nu\omega$     Γ.  $-\sigma\upsilon\nu\omega$     Δ.  $\eta\mu\omega$   
Ε. κανένα από τα προηγούμενα

33. Αν  $\eta\mu\theta = \eta\mu 42^\circ$  και  $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ , τότε η γωνία  $\theta$  είναι:

A.  $132^\circ$     B.  $138^\circ$     Γ.  $142^\circ$     Δ.  $148^\circ$     Ε.  $157^\circ$

34. Μας δίνονται οι σχέσεις:

α)  $\epsilon\phi\theta = -\frac{1}{3}$     β)  $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$     γ)  $\sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2\theta}$

δ)  $\epsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$     ε)  $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$

Για να υπολογίσουμε το  $\eta\mu\theta$  θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις:

A. (α), (β), (γ), (δ)    B. (α), (γ), (ε)    Γ. (α), (γ), (δ)  
Δ. (α), (β), (δ)    Ε. (α), (β), (γ)

35. Αν  $\eta\mu x = \frac{4}{5}$  και  $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{3}{5}$ , τότε η γωνία  $x$  βρίσκεται ανάμεσα:

A.  $0 < x < \pi$                       B.  $0 < x < \frac{\pi}{2}$                       Γ.  $0 < x < \frac{3\pi}{2}$

Δ.  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$                       Ε.  $0 < x < 2\pi$

Ποια από τις πέντε περιπτώσεις **δεν μπορεί** να είναι σωστή;

36. Αν  $0 \leq x \leq 180^\circ$ , τότε η σχέση  $2\eta\mu x - \sqrt{5} = 0$  αληθεύει για:

A. μια τιμή του  $x$                       B. δύο τιμές του  $x$                       Γ. για καμία τιμή του  $x$   
Δ. για άπειρες τιμές του  $x$                       Ε. για δύο αντίθετες τιμές του  $x$

37. Σε ένα τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  έχουμε  $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma + \eta\mu \Delta = 4$ .

Τότε αυτό είναι:

A. τετράγωνο ή ορθογώνιο                      B. ρόμβος  
Γ. τραπέζιο                      Δ. τυχαίο τετράπλευρο  
Ε. δεν μπορούμε να καθορίσουμε το είδος του τετραπλεύρου

38. Ναδειχθεί ότι  $\eta\mu^2(\kappa 360^\circ + x) + \sigma\upsilon\nu^2(\kappa 360^\circ - x) = 1$ .

39. Αν  $\eta\mu x = \frac{3}{5}$ ,  $90^\circ < x < 180^\circ$ , τότε  $\epsilon\phi x$  ισούται με:

A.  $\frac{3}{4}$                       B.  $\frac{4}{3}$                       Γ.  $-\frac{3}{4}$                       Δ.  $\frac{9}{16}$                       Ε.  $\frac{9}{3}$

40. Το άθροισμα  $\eta\mu(-\omega) + \sigma\upsilon\nu(-\omega) + \eta\mu(180^\circ - \omega) + \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)$  ισούται με:

A. 1                      B. -1                      Γ. 0                      Δ. 2                      Ε.  $2\eta\mu\omega$

41. Αν  $A, B, \Gamma$  γωνίες τριγώνου, τότε το  $\sigma\upsilon\nu(2A + 2B + 2\Gamma)$  ισούται με:

A.  $2\sigma\upsilon\nu(A + B + \Gamma)$                       B. 0                      Γ. -1                      Δ. 1                      Ε.  $-\eta\mu(A + B + \Gamma)$

42. Αν  $0 < x_1 < x_2 < 180^\circ$  γράψτε όλες τις δυνατές σχέσεις μεταξύ  $\eta\mu x_1$  και  $\eta\mu x_2$  (χρησιμοποιήστε τον τριγωνομετρικό κύκλο).

43. Να εξετάσετε αν οι ρίζες της εξίσωσης  $4x^2 + 2(\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$  μπορούν να είναι το ημίτονο και το συνημίτονο μιας γωνίας  $\theta$ .

44. Να βρείτε όλες τις τιμές των:

α)  $\eta\mu\kappa\pi$                       β)  $\sigma\upsilon\nu\kappa\pi$                       γ)  $\epsilon\phi\kappa\pi$ , όπου  $\kappa \in \mathbb{Z}$

45. Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο  $ΑΒΓ$  έχουμε:

α)  $\eta\mu A = \eta\mu(B + \Gamma)$

$$\beta) \eta\mu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2(A + \Gamma) = 1$$

46. Να δείξετε ότι:  $0 < \frac{\epsilon\phi(\pi - x)}{\sigma\phi(\pi - x) - \epsilon\phi x} < 1.$

47. Αν  $A', B', \Gamma'$  οι εξωτερικές γωνίες ενός τριγώνου  $AB\Gamma$ , τότε  $\eta\mu(A' + B' + \Gamma') = 0.$

48. Αν  $A', B', \Gamma', \Delta'$  οι εξωτερικές γωνίες ενός κυρτού τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ , τότε  $\eta\mu(A' + B' + \Gamma' + \Delta') = 0.$

49. Να δειχθεί ότι οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$  τέμνονται κάθετα αν το άθροισμα των ημιτόνων των τεσσάρων γωνιών που έχουν κορυφή το σημείο τομής των διαγωνίων είναι 4.

50. Να δειχθεί ότι η εφαπτομένη κάθε εξωτερικής γωνίας οξυγώνιου τριγώνου είναι αρνητικός αριθμός.

51. Αν  $x$  γωνία τριγώνου, να δειχθεί ότι  $\eta\mu|x - 360^\circ| = -\eta\mu x.$

52. Να τοποθετήσετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α)  $\eta\mu(-\frac{\pi}{2})$ ,  $\eta\mu(-\frac{\pi}{3})$ ,  $\eta\mu(-\frac{\pi}{4})$ ,  $\eta\mu(-\frac{\pi}{6})$ ,  $\eta\mu 0$ ,  $\eta\mu \frac{\pi}{6}$ ,  $\eta\mu \frac{\pi}{4}$ ,  $\eta\mu \frac{\pi}{3}$ ,  $\eta\mu 90^\circ$ .

β)  $\epsilon\phi(-\frac{\pi}{6})$ ,  $\epsilon\phi \frac{\pi}{4}$ ,  $\epsilon\phi(-\frac{\pi}{4})$ ,  $\epsilon\phi \frac{\pi}{3}$ ,  $\epsilon\phi(-\frac{\pi}{3})$ ,  $\epsilon\phi 0$ .

γ)  $\sigma\upsilon\nu(-170^\circ)$ ,  $\sigma\upsilon\nu 40^\circ$ ,  $\sigma\upsilon\nu(-150^\circ)$ ,  $\sigma\upsilon\nu(-90^\circ)$ ,  $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}$ ,  $\sigma\upsilon\nu(-\frac{\pi}{3})$ .

53. Να δείξετε ότι: 
$$\frac{\eta\mu \frac{5\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{6} \cdot \epsilon\phi \frac{4\pi}{3}}{2\eta\eta\mu \frac{4\pi}{3} \cdot \epsilon\phi \frac{5\pi}{4} \cdot \sigma\phi \frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

**Γωνίες με άθροισμα 90° - Γωνίες με διαφορά 90°**

1. Να αντιστοιχήσετε τα στοιχεία της στήλης (A) που είναι ίσα με στοιχεία της στήλης (B).

στήλη (A)	στήλη (B)
$\eta\mu(90 - \omega)$	- $\eta\mu\omega$
$\sigma\upsilon\nu(90 - \omega)$	$\epsilon\phi\omega$
$\epsilon\phi(90 - \omega)$	$\eta\mu\omega$
$\sigma\phi(90 - \omega)$	- $\sigma\upsilon\nu\omega$
	$\sigma\upsilon\nu\omega$
	- $\epsilon\phi\omega$
	$\sigma\phi\omega$
	- $\sigma\phi\omega$

2. Το  $\eta\mu(\frac{\pi}{2} + \omega)$  ισούται με:

- A.  $\eta\mu(-\omega)$     B.  $\sigma\upsilon\nu\omega$     Γ. -  $\sigma\upsilon\nu\omega$     Δ.  $\eta\mu\omega$   
 E. κανένα από τα προηγούμενα

3. Το  $\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + \omega)$  ισούται με:

- A.  $\eta\mu\omega$     B.  $\sigma\upsilon\nu(-\omega)$     Γ. -  $\sigma\upsilon\nu\omega$     Δ. -  $\eta\mu\omega$   
 E. κανένα από τα προηγούμενα

4. Η  $\epsilon\phi(\frac{\pi}{2} + \omega)$  ισούται με:

- A.  $\epsilon\phi\omega$     B. -  $\sigma\phi\omega$     Γ. -  $\epsilon\phi\omega$     Δ.  $\sigma\phi\omega$   
 E. κανένα από τα προηγούμενα

5. Να γράψετε συναρτήσει των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας θετικής και μικρότερης από 45° τις εκφράσεις:

α)  $\epsilon\phi 85^\circ$ , β)  $\eta\mu 65^\circ$ , γ)  $\sigma\upsilon\nu 125^\circ$

6. Να αποδείξετε ότι:  $\eta\mu 450^\circ + \epsilon\phi 220^\circ + \sigma\phi 410^\circ = 1 + 2\epsilon\phi 40^\circ$
7. Αν  $\alpha$  οξεία γωνία να δείξετε ότι:
- α) οι γωνίες  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  και  $-\alpha$  είναι συμπληρωματικές
- β)  $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\eta\mu\alpha$
- γ)  $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sigma\phi\alpha$
8. Δίνεται:  $\eta\mu 28^\circ = 0,47$  και  $\sigma\upsilon\nu 28^\circ = 0,88$ .
- α) Υπολογίστε:  $\eta\mu 62^\circ$ ,  $\sigma\upsilon\nu 62^\circ$  και  $\epsilon\phi 62^\circ$ .
- β) Υπολογίστε:  $\eta\mu 118^\circ$ ,  $\sigma\upsilon\nu 118^\circ$  και  $\epsilon\phi 118^\circ$ .
9. Αν  $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ , να υπολογίσετε το  $\eta\mu\frac{3\pi}{8}$ .
10. Αν  $x + y = \frac{\pi}{2}$  και  $\eta\mu x = 0,28$ , να υπολογίσετε:
- α)  $\sigma\upsilon\nu y$ , β)  $\eta\mu y$  και γ)  $\epsilon\phi y$
11. Να εκφράσετε συναρτήσει του  $\eta\mu x$  και του  $\sigma\upsilon\nu x$  τις παραστάσεις:
- $$A = \sigma\upsilon\nu\left(x - \pi\right) + \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \eta\mu\left(x - \pi\right) + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
- $$B = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\pi + x\right) - \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
12. Δίνονται δύο γωνίες  $x$  και  $y$ ,  $0 < x < 90^\circ$  και  $0 < y < 90^\circ$ .  
Δίνεται επίσης ότι:  $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu y$  (1) και  $x = 2y$  (2)
- α) Τι συμπεραίνετε από την (1) για τις γωνίες  $x$  και  $y$ ;
- β) Βρείτε τις γωνίες  $x$  και  $y$ .
13. Η παράσταση  $\eta\mu^2 x + \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  ισούται με:
- A. 2      B. 0      Γ.  $2\eta\mu^2 x$       Δ. 1      E.  $1 - \eta\mu^2 x$
14. Αν σε τρίγωνο ABΓ είναι  $\eta\mu(B + \Gamma) = 1$ , τότε να αποδείξετε ότι το ABΓ είναι ορθογώνιο.
15. Η τιμή της παράστασης  $\kappa = \eta\mu(45^\circ + x) - \sigma\upsilon\nu(45^\circ - x)$  είναι:
- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       B.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       Γ. 0      Δ.  $\eta\mu x$       E.  $\sigma\upsilon\nu x$
16. Αν οι γωνίες  $x$  και  $y$  είναι συμπληρωματικές, ποια από τις παρακάτω σχέσεις **δεν ισχύει**:
- A.  $\eta\mu^2 x + \eta\mu^2 y = 1$       B.  $(\eta\mu x + \eta\mu y)^2 = 1 - 2\eta\mu x \eta\mu y$
- Γ.  $\epsilon\phi x \epsilon\phi y = 1$       Δ.  $\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 y = 1$       E.  $\sigma\phi x \cdot \sigma\phi y = 1$



17. Ναδειχθεί ότι:  $\eta\mu x + \eta\mu(x + 90^\circ) + \eta\mu(x + 180^\circ) + \eta\mu(x + 270^\circ) = 0$ .

18. α) Να αποδείξετε ότι:  $\sigma\upsilon\nu(x + 45^\circ) = \eta\mu(45^\circ - x)$

β) Να βρεθεί η αριθμητική τιμή του αθροίσματος:

$$\sigma\upsilon\nu^2(x + 45^\circ) + \sigma\upsilon\nu^2(x - 45^\circ) + \eta\mu^2(45^\circ - y) + \eta\mu^2(y + 45^\circ).$$

19. Να αποδείξετε ότι:  $\frac{-\eta\mu(270^\circ + \theta)}{1 + \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \theta)} = \frac{\eta\mu(180^\circ + \theta) - 1}{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta)}$ .

20. Να απλοποιηθεί η κλασματική παράσταση:  $\frac{\eta\mu(\pi + x) \eta\mu(\frac{\pi}{2} - x)}{\sigma\upsilon\nu(-x) \sigma\upsilon\nu(\pi + x)}$ .

21. Να δείξετε ότι για κάθε  $k \in \mathbb{Z}$  είναι:

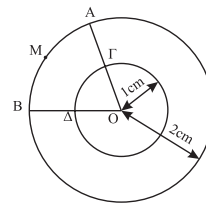
$$\eta\mu kx = (-1)^k \sigma\upsilon\nu[(2k + 1)\frac{\pi}{2} - x]$$

**Ερωτήσεις του τύπου «σωστό - λάθος»**

Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

**Σωστό Λάθος**

1. Εάν τα δύο τόξα του διπλανού σχήματος ΓΔ και ΑΜ έχουν το ίδιο μήκος, τότε η ΟΜ είναι η μεσοκάθετος της χορδής ΑΒ.



2. Το μέτρο μιας γωνίας σε μοίρες βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε το μέτρο της γωνίας

σε ακτίνια επί  $\frac{\pi}{180}$ .

3. Αν μια γωνία έχει μέτρο  $-\frac{11\pi}{6}$ , τότε έχει την

ίδια αρχική και τελική πλευρά με τη γωνία  $-\frac{\pi}{6}$ .

4. Τα σημεία του τριγωνομετρικού κύκλου που αντιστοιχούν στους αριθμούς  $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi,$

$-\frac{2\pi}{3}$  και  $-\frac{\pi}{3}$  είναι κορυφές κανονικού εξαγώνου.

5. Εάν μια γωνία φ είναι αρνητική τότε ένας τουλάχιστον από τους  $\eta\mu\phi$  και  $\sigma\upsilon\nu\phi$  είναι επίσης αρνητικός.

6.  $\eta\mu^2 \frac{\pi}{12} + \eta\mu^2 \frac{5\pi}{12} = 1$ .

7. Αν  $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ , τότε  $\eta\mu x = -\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}$ .
8. Εάν μια γωνία  $\omega$  αυξηθεί κατά  $\pi$ , τότε το  $\sigma\upsilon\nu\omega$  και το  $\eta\mu\omega$  αλλάζουν πρόσημο.
9. Εάν ο  $y$  αλλάξει πρόσημο, τότε αλλάζει και το πρόσημο του  $\eta\mu y$  και του  $\sigma\upsilon\nu y$ .
10. Για οποιαδήποτε γωνία  $x$  ισχύει:  
 $\eta\mu 2x = 2\eta\mu x$ .
11. Υπάρχουν γωνίες  $\omega$  τέτοιες ώστε  $\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega = 1$ .  
 Αν  $A, B, \Gamma$  γωνίες τριγώνου τότε  
 $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = 3$ .
12. Αν  $90^\circ < x < 180^\circ$  και  $\eta\mu x = \frac{3}{5}$  τότε  $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{4}{5}$ .
13. Αν  $180^\circ < x < 270^\circ$  και  $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{2}{3}$  τότε  $\eta\mu x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .
14. Αν  $\eta\mu x = 0$  τότε  $\sigma\upsilon\nu x = 0$ .
15. Αν  $\eta\mu x = 1$  τότε  $\sigma\upsilon\nu x = 1$ .
16. Αν  $\eta\mu x > 0$  και  $\sigma\upsilon\nu x > 0$  τότε  $\epsilon\phi x > 0$ .
17. Είναι  $|\eta\mu x| \leq 2$ .
18. Είναι  $|\sigma\upsilon\nu x| > 1$ .
19. Αν  $90^\circ \leq x \leq 180^\circ$  τότε  $\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{1 - \eta\mu^2 x}$ .
20. Αν  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  τότε  $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \cdot \epsilon\phi x = -1$ .
21. Υπάρχει  $x$  ώστε  $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\eta\mu x}{\epsilon\phi x}$ .
22. Αν  $0^\circ < x < 90^\circ$  τότε  $\eta\mu x < \epsilon\phi x$ .
23. Αν  $\epsilon\phi x = 1$  τότε  $|\eta\mu x| = |\sigma\upsilon\nu x|$ .
24. Ισχύει  $3\eta\mu 30^\circ = \eta\mu 90^\circ$ .
25. Αν  $|\sigma\upsilon\nu x| = \sigma\upsilon\nu x$  τότε  $-90^\circ \leq x \leq 90^\circ$ .
26. Αν  $0^\circ < x < 360^\circ$  και  $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$  τότε  $x = 45^\circ$  ή  $x = 225^\circ$ .
27. Αν  $45^\circ < x < 90^\circ$  τότε  $\frac{1}{\epsilon\phi x} < 1$ .
28. Αν  $90^\circ < x < 180^\circ$  τότε  $\epsilon\phi x < 0$ .
29. Αν  $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$  τότε  $\eta\mu x \geq 0$ .
30. Αν  $0 < \omega < \varphi < \frac{\pi}{2}$  τότε  $\sigma\upsilon\nu\omega < \sigma\upsilon\nu\varphi$ .
31. Αν  $\omega + \varphi = \frac{\pi}{2}$  τότε  $\sigma\upsilon\nu\varphi = \eta\mu\omega$ .
32. Αν  $\omega + \varphi = \frac{\pi}{2}$  τότε  $\sigma\upsilon\nu 2\omega = \eta\mu 2\varphi$ .
33. Αν  $\frac{\pi}{2} < \varphi < \omega < \pi$  τότε  $\eta\mu\varphi < \eta\mu\omega$ .

34. Αν  $v \in \mathbb{N}^*$  τότε  $|\eta\mu x|^v \leq |\eta\mu x|$ .
35. Αν  $\eta\mu\omega < 0$  τότε  $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$  ή  $\frac{3\pi}{2} < \omega < 2\pi$ .
36. Υπάρχουν  $\alpha, \beta$  με  $\alpha = 2\beta$  ώστε  $\eta\mu\alpha = 2\eta\mu\beta$ .
37. Αν  $\eta\mu\alpha = \eta\mu\beta$  τότε  $\sigma\upsilon\nu\beta = -\sigma\upsilon\nu\alpha$ .
38. Αν  $\alpha - \beta = 2\kappa\pi$  τότε οι  $\alpha, \beta$  έχουν ίσους  
τριγωνομετρικούς αριθμούς.
39. Αν  $x + y = 0$  τότε  $\eta\mu x = \eta\mu y$ .
40. Αν  $x = \kappa 360^\circ + \omega$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$ , τότε  $\eta\mu x = \eta\mu \omega$ .
41. Αν  $y = -\kappa 360^\circ + \omega$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$ , τότε  $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu y$ .
42. Αν  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  τότε  $\eta\mu 2x > 0$ .
43. Σε ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχουμε  
 $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = \frac{3}{2}$ .
44. Σε ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma + \eta\mu \Delta = 4$ .
45. Για οποιαδήποτε γωνία  $x$  ισχύει:  
 $\sqrt{(1 - \sigma\upsilon\nu x)^2} + \sqrt{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2} = 2$ .
46. Ισχύει  $(3 - 2\sigma\upsilon\nu x)^2 + (\eta\mu x - 1)^2 = 0$ .
- α) Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\eta\mu A = \eta\mu (B + \Gamma)$ .
- β) Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\eta\mu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{2}$ .
- γ) Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \eta\mu \frac{B + \Gamma}{2}$ .
- δ) Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\sigma\upsilon\nu A = -\sigma\upsilon\nu (B + \Gamma)$ .
47. Σε κάθε κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  έχουμε:  
α)  $\eta\mu (A + B + \Gamma + \Delta) = 1$
- β)  $\sigma\upsilon\nu (A + B + \Gamma + \Delta) = 0$
- γ)  $\eta\mu (A + B) = \eta\mu (\Gamma + \Delta)$
- δ)  $\sigma\upsilon\nu (A + \Gamma) = \sigma\upsilon\nu (B + \Delta)$
48. Για κάθε γωνία ή τόξο  $x$  είναι  $|\eta\mu (\pi + x)| = |\eta\mu (\pi - x)|$ .
49. Ισχύει πάντοτε  $\epsilon\phi |x| = |\epsilon\phi x|$ .
50. Υπάρχει τρίγωνο που το ημίτονο μιας γωνίας του είναι  $-\frac{1}{2}$ .
51. Είναι  $|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x| > 1$

**ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ  
ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ**



**1ο ΣΧΕΔΙΟ**

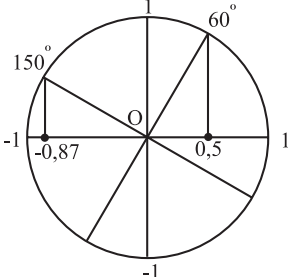
**ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ:** Η γενικευμένη γωνία  
**Το ημίτονο και το συνημίτονό της**

*Διάρκεια:* Ολιγόλεπτο

*Θέματα:* 3

<b>ΒΑΘ/ΓΙΑ</b>	<b>ΘΕΜΑ 1ο</b>
8 μονάδες	<p><b>1.</b> Με βάση το παρακάτω σχήμα, συμπληρώστε τον πίνακα:</p>

γωνία	τελική πλευρά	μέτρο γωνίας σε μοίρες	ημίτονο γωνίας	συνημίτονο γωνίας
θετική AOK		50°	y = + (OP)	
θετική AOA				ρ = - (OΣ')
θετική AOM				
αρνητική AON				

ΒΑΘ/ΓΙΑ	ΘΕΜΑ 2ο
<p>1,5 μονάδες</p> <p>1,5 μονάδες</p> <p>1,5 μονάδες</p> <p>3,5 μονάδες</p>	<p>1. Με βάση τα στοιχεία που σημειώνονται στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο και τις απαραίτητες ευθείες που πρέπει να χαράξετε να βρείτε:</p>  <p>α) <math>\text{syn}330^\circ = \dots\dots\dots</math></p> <p>β) <math>\text{syn}(-300^\circ) = \dots\dots\dots</math></p> <p>γ) <math>\text{syn}(-210^\circ) = \dots\dots\dots</math></p> <p>δ) <math>\text{syn}240^\circ = \dots\dots\dots</math></p> <p>Δικαιολογήστε την απάντησή σας.</p>
ΒΑΘ/ΓΙΑ	ΘΕΜΑ 3ο
<p>2 μονάδες</p> <p>2 μονάδες</p>	<p>1. Από τις παρακάτω τιμές δεν μπορεί να είναι ημίτονο γωνίας η:</p> <p>Α. <math>\frac{1}{2}</math>      Β. <math>-\frac{3}{2}</math>      Γ. <math>\frac{\sqrt{2}}{2}</math>      Δ. <math>-\frac{1}{2}</math></p> <p>Ε. <math>\frac{\sqrt{3}}{2}</math></p> <p>2. Για οποιαδήποτε γωνία x:</p> <p>Α. <math>\text{syn}x &lt; -1</math>      Β. <math>\text{syn}x &gt; 1</math>      Γ. <math>-1 \leq \text{syn}x \leq 1</math></p> <p>Δ. το <math>\text{syn}x</math> δεν ορίζεται</p> <p>Ε. δεν ισχύει κανένα από τα προηγούμενα.</p>

2ο ΣΧΕΔΙΟ

**ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ:** Γωνίες αντίθετες - Γωνίες με άθροισμα  $180^\circ$  -  
Γωνίες με διαφορά  $180^\circ$

*Διάρκεια:* Ολιγόλεπτο

*Θέματα:* 3

ΒΑΘ/ΓΙΑ	ΘΕΜΑ 1 <sup>ο</sup>
0,5 μονάδες	1. Το ημ (-ω) ισούται με: Α. ημω      Β. συν (π - ω)    Γ. - συν (π + ω) Δ. - ημω      Ε. κανένα από τα προηγούμενα
0,5 μονάδες	2. Το - συν (-ω) ισούται με: Α. συνω      Β. - συνω      Γ. ημω Δ. ημ (-ω)    Ε. κανένα από τα προηγούμενα
0,5 μονάδες	3. Η εφ (-ω) ισούται με: Α. - σφω      Β. - εφω                      Γ. εφ (π + ω) Δ. σφω      Ε. κανένα από τα προηγούμενα
0,5 μονάδες	4. Το ημ (π - ω) ισούται με: Α. συνω      Β. - ημω                      Γ. ημω Δ. - συνω      Ε. κανένα από τα προηγούμενα
0,5 μονάδες	5. Το συν (π + ω) ισούται με: Α. ημ (-ω)      Β. συνω                      Γ. ημω Δ. - συνω      Ε. κανένα από τα προηγούμενα
0,5 μονάδες	6. Η εφ (π + ω) ισούται με: Α. σφω      Β. εφω                      Γ. - εφω Δ. σφ (-ω)      Ε. κανένα από τα προηγούμενα
0,5 μονάδες	7. Το ημ (π + ω) ισούται με: Α. ημω              Β. - ημω                      Γ. συνω Δ. συν (π - ω)    Ε. κανένα από τα προηγούμενα
0,5 μονάδες	8. Το συν (π - ω) ισούται με: Α. ημ (-ω)      Β. συνω                      Γ. - συνω Δ. ημω              Ε. κανένα από τα προηγούμενα
ΒΑΘ/ΓΙΑ	ΘΕΜΑ 2ο
5 μονάδες	1. Δίνεται $\eta\mu 42^\circ = 0,66$ .



5 μονάδες	<p>Να βρείτε το <math>\eta\mu 138^\circ</math> και το <math>\sigma\upsilon\nu 222^\circ</math>.</p> <p>2. Εάν <math>\sigma\upsilon\nu 146^\circ = -0,82</math>, να βρείτε το <math>\sigma\upsilon\nu 34^\circ</math> και το <math>\eta\mu 214^\circ</math>.</p>
<b>ΒΑΘ/ΓΙΑ</b>	<b>ΘΕΜΑ 3ο</b>
3 μονάδες	<p>1. Το άθροισμα <math>\eta\mu(-\omega) + \sigma\upsilon\nu(-\omega) + \eta\mu(180^\circ - \omega) + \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)</math> ισούται με:</p> <p><b>A.</b> 1      <b>B.</b> - 1      <b>Γ.</b> 0      <b>Δ.</b> 2      <b>E.</b> <math>2\eta\mu\omega</math></p>
3 μονάδες	<p>2. Δίνεται ότι: <math>\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}</math>. Να βρεθεί το <math>\sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{5}</math>.</p>

### 3ο ΣΧΕΔΙΟ

**ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ:** Γενική Τριγωνομετρία - Επαναληπτικό

*Διάρκεια:* 1 διδακτική ώρα

*Θέματα:* 4

ΒΑΘ/ΓΙΑ	ΘΕΜΑ 1ο	Σωστό	Λάθος
0,5 μονάδες	<p>Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:</p> <p><b>1.</b> Το μέτρο μιας γωνίας σε μοίρες βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε το μέτρο της γωνίας σε ακτίνια επί <math>\frac{\pi}{180}</math>.</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
0,5 μονάδες	<p><b>2.</b> Αν μια γωνία έχει μέτρο <math>-\frac{11\pi}{6}</math>, τότε έχει την ίδια αρχική και τελική πλευρά με τη γωνία <math>-\frac{\pi}{6}</math>.</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
0,5 μονάδες	<p><b>3.</b> Εάν μια γωνία <math>\varphi</math> είναι αρνητική τότε ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς <math>\eta\mu\varphi</math> και <math>\sigma\upsilon\eta\varphi</math> είναι επίσης αρνητικός.</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
0,5 μονάδες	<p><b>4.</b> Εάν μια γωνία <math>\omega</math> αυξηθεί κατά <math>\pi</math>, τότε το <math>\sigma\upsilon\eta\theta</math> και το <math>\eta\mu\omega</math> αλλάζουν πρόσημο.</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
0,5 μονάδες	<p><b>5.</b> Εάν ο <math>y</math> αλλάξει πρόσημο, τότε αλλάζει και το πρόσημο του <math>\eta\mu y</math> και του <math>\sigma\upsilon\eta y</math>.</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
0,5 μονάδες	<p><b>6.</b> Αν <math>0^\circ \leq x \leq 90^\circ</math> τότε <math>\eta\mu x = -\sqrt{1 - \sigma\upsilon\eta^2 x}</math>.</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
0,5 μονάδες	<p><b>1.</b> Αν <math>90^\circ \leq x \leq 180^\circ</math> τότε <math>\sigma\upsilon\eta x = \sqrt{1 - \eta\mu^2 x}</math>.</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
0,5 μονάδες	<p><b>2.</b> Αν <math>0 &lt; x &lt; \frac{\pi}{2}</math> τότε <math>\frac{\sigma\upsilon\eta x}{\eta\mu x} \cdot \epsilon\varphi x = -1</math>.</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
0,5 μονάδες	<p><b>9.</b> Αν <math>\epsilon\varphi x = \kappa</math>, τότε το <math>\frac{\kappa^2}{1 + \kappa^2}</math> ισούται με:  <b>A.</b> <math>1 + \eta\mu^2 x</math>    <b>B.</b> <math>\sigma\upsilon\eta^2 x</math>    <b>Γ.</b> <math>\sigma\varphi^2 x</math>    <b>Δ.</b> <math>\eta\mu^2 x</math>  <b>E.</b> <math>\epsilon\varphi^2 x + 1</math></p>		
0,5 μονάδες	<p><b>10.</b> Αν <math>\eta\mu x = \frac{5}{13}</math>, <math>90^\circ &lt; x &lt; 180^\circ</math>, τότε το <math>\sigma\upsilon\eta x</math> ισούται με:  <b>A.</b> <math>-\frac{12}{13}</math>    <b>B.</b> <math>\frac{12}{13}</math>    <b>Γ.</b> <math>\frac{8}{13}</math>    <b>Δ.</b> <math>-\frac{8}{13}</math>    <b>E.</b> <math>\frac{13}{5}</math></p>		
<b>ΒΑΘ/ΓΙΑ</b>	<b>ΘΕΜΑ 2ο</b>		

4 μονάδες	1. Δίνεται $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ όπου $180^\circ < \theta < 270^\circ$ . Υπολογίστε i) $\eta\mu\theta$ , ii) $\epsilon\phi\theta$ .
1 μονάδα	2. Να βρείτε τη γωνία $\theta$ , αν γνωρίζετε ότι: $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ .
<b>ΒΑΘ/ΓΙΑ</b>	<b>ΘΕΜΑ 3ο</b>
2,5 μονάδες	1. Αν $2\epsilon\phi\theta - 3 = 0$ και $\eta\mu\theta < 0$ , να βρεθεί το $\sin\theta$ .
2,5 μονάδες	2. Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης: $A = \eta\mu(x - y) \sin(y - x) + \eta\mu(y - x) \sin(x - y)$
<b>ΒΑΘ/ΓΙΑ</b>	<b>ΘΕΜΑ 4ο</b>
1,5 μονάδες	1. Να αποδειχθούν οι παρακάτω ταυτότητες: α) $\eta\mu^4x - \sin^4x = \eta\mu^2x - \sin^2x$
3,5 μονάδες	β) $\frac{1 - \epsilon\phi^2x}{1 + \epsilon\phi^2x} = 1 - 2\eta\mu^2x$

#### 4ο ΣΧΕΔΙΟ

**ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ:** Γενική Τριγωνομετρία - Επαναληπτικό

*Διάρκεια:* 1 διδακτική ώρα

*Θέματα:* 4

<b>ΒΑΘ/ΓΙΑ</b>	<b>ΘΕΜΑ 1ο</b>
0,5 μονάδες	1. Η γωνία $\alpha = 10^\circ$ ισούται με: Α. 1 rad    Β. $\frac{\pi}{10}$ Γ. 2 rad    Δ. $\frac{\pi}{18}$ Ε. $\frac{\pi}{9}$
0,5 μονάδες	2. Το $\eta\mu(-135^\circ)$ ισούται με: Α. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Β. $\frac{1}{2}$ Γ. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Δ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Ε. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
0,5 μονάδες	3. Το $\eta\mu\frac{5\pi}{6}$ ισούται με: Α. $\frac{1}{2}$ Β. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Γ. $-\frac{1}{2}$ Δ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Ε. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
0,5 μονάδες	4. Αν $\eta\mu\theta = \eta\mu 42^\circ$ και $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ τότε η γωνία $\theta$ είναι:

0,5 μονάδες	<p><b>A.</b> 132°    <b>B.</b> 138°    <b>Γ.</b> 142°    <b>Δ.</b> 148°    <b>Ε.</b> 157°</p> <p><b>5.</b> Από τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς είναι θετικός ο:</p> <p><b>A.</b> ημ200°    <b>B.</b> συν160°    <b>Γ.</b> συν (-140°)  <b>Δ.</b> ημ (-200°)    <b>Ε.</b> συν (-240°)</p>
0,5 μονάδες	<p><b>6.</b> Αν <math> \eta\mu x  +  \sigma\upsilon\nu x  = 2</math> τότε η γωνία <math>x</math> ισούται με:</p> <p><b>A.</b> 0°    <b>B.</b> 90°    <b>Γ.</b> 180°  <b>Δ.</b> 270°    <b>Ε.</b> δεν υπάρχει τέτοια γωνία <math>x</math></p>
0,5 μονάδες	<p><b>7.</b> Αν <math> \eta\mu x  +  \sigma\upsilon\nu x  = 0</math> τότε η τελική πλευρά της γωνίας <math>x</math> βρίσκεται:</p> <p><b>A.</b> στο 1° τεταρτημόριο    <b>B.</b> στο 2° τεταρτημόριο  <b>Γ.</b> στο 3° τεταρτημόριο    <b>Δ.</b> στο 4° τεταρτημόριο  <b>Ε.</b> δεν υπάρχει τέτοια γωνία <math>x</math></p>
0,5 μονάδες	<p><b>8.</b> Το <math>\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x</math> (<math>\epsilon\phi x + \sigma\phi x</math>) ισούται με:</p> <p><b>A.</b> 1    <b>B.</b> <math>\epsilon\phi x</math>    <b>Γ.</b> <math>\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x</math>    <b>Δ.</b> -1    <b>Ε.</b> <math>\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x</math></p>
0,5 μονάδες	<p><b>9.</b> Το <math>-\sigma\upsilon\nu (-\omega)</math> ισούται με:</p> <p><b>A.</b> <math>\sigma\upsilon\nu \omega</math>    <b>B.</b> <math>-\sigma\upsilon\nu \omega</math>    <b>Γ.</b> <math>\eta\mu \omega</math>    <b>Δ.</b> <math>\eta\mu (-\omega)</math>  <b>Ε.</b> κανένα από τα προηγούμενα</p>
0,5 μονάδες	<p><b>10.</b> Η <math>\epsilon\phi \left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)</math> ισούται με:</p> <p><b>A.</b> <math>\epsilon\phi \omega</math>    <b>B.</b> <math>-\sigma\phi \omega</math>    <b>Γ.</b> <math>-\epsilon\phi \omega</math>    <b>Δ.</b> <math>\sigma\phi \omega</math>  <b>Ε.</b> κανένα από τα προηγούμενα</p>
<b>ΒΑΘ/ΓΙΑ</b>	<b>ΘΕΜΑ 2ο</b>
1 μονάδα	<b>1.</b> Να μετατρέψετε τα $\frac{\pi}{8}$ rad σε μοίρες.
1 μονάδα	<b>2.</b> Να δείξετε ότι υπάρχει γωνία $x$ με $\eta\mu x = \frac{2}{7}$ και $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$ .
2 μονάδες	<b>3.</b> Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{\eta\mu(-x) \eta\mu(90^\circ - x)}{\sigma\upsilon\nu(-x) \sigma\upsilon\nu(180^\circ + x)}$
<b>ΒΑΘ/ΓΙΑ</b>	<b>ΘΕΜΑ 3ο</b>
3 μονάδες	<b>1.</b> Να δείξετε ότι: $\frac{5\sigma\upsilon\nu x}{3-5\eta\mu} - \frac{4}{4+5\sigma\upsilon\nu} - \frac{3+5\eta\mu}{4+5\sigma\upsilon\nu} = 0$

ΒΑΘ/ΓΙΑ	ΘΕΜΑ 4ο
1 μονάδα	<b>1. α) Να αποδείξετε ότι:</b> i) $\eta\mu (45^\circ + x) = \sigma\upsilon\nu (45^\circ - x)$ ii) $\eta\mu (45^\circ - x) = \sigma\upsilon\nu (45^\circ + x)$
2 μονάδες	<b>β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:</b> $\sigma\upsilon\nu^2 (45^\circ + x) + \sigma\upsilon\nu^2 (45^\circ - x) = \dots\dots\dots$
5 μονάδες	<b>γ) Να δείξετε ότι: αν <math>\eta\mu (45^\circ + x) + \eta\mu (45^\circ - x) = \alpha</math> τότε</b> $\sigma\upsilon\nu (45^\circ + x) \cdot \sigma\upsilon\nu (45^\circ - x) = \frac{\alpha^2 - 1}{2}$



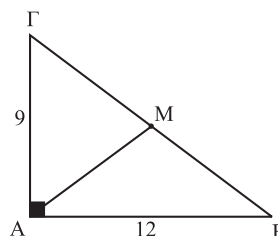
***ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ***

## ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

### Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

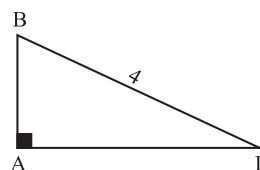
1. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει  $A = 90^\circ$ ,  $\beta = 9$  cm,  $\gamma = 12$  cm και την  $AM$  διάμεσο. Το μήκος του  $AM$  ισούται με:

A.  $\frac{9}{2}$       B. 6      Γ.  $\frac{15}{2}$   
 Δ. 9      E.  $\frac{21}{2}$



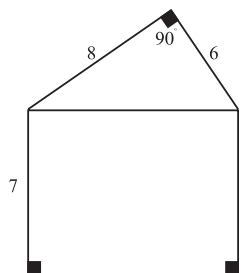
2. Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $A = 90^\circ$ ,  $a = 4$  cm και  $\beta + \gamma = \sqrt{18}$  cm. Το γινόμενο  $\beta \cdot \gamma$  ισούται με:

A. 1      B. 2      Γ. 4  
 Δ. 8      E. 16



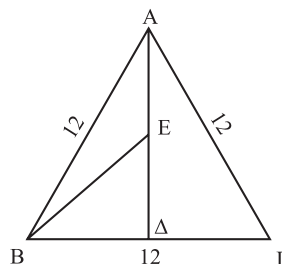
3. Η περίμετρος του διπλανού σχήματος είναι:

A. 34      B. 36      Γ. 38  
 Δ. 45      E. 46



4. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο με πλευρά 12 cm. Αν  $A\Delta$  είναι ύψος του και το  $E$  είναι μέσον του ύψους του, τότε το μήκος του  $BE$  σε cm είναι:

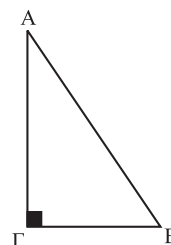
A. 9      B.  $\sqrt{48}$       Γ. 8  
 Δ.  $\sqrt{63}$       E.  $\sqrt{98}$



(Διαγωνισμός ΕΜΕ - Θαλής 1993)

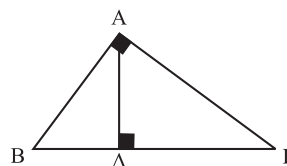
5. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο από τις παρακάτω σχέσεις, σωστή είναι η σχέση:

A.  $AG^2 = GB^2 + BA^2$       B.  $AG^2 = BA^2 - GB^2$   
 Γ.  $GB^2 = GA^2 - AB^2$       Δ.  $AB^2 = AG^2 - GB^2$   
 E.  $BA^2 = BG^2 - AG^2$



6. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο από τις παρακάτω σχέσεις, σωστή είναι η σχέση:

A.  $AG^2 = BG \cdot B\Delta$       B.  $AG^2 = BG \cdot A\Delta$   
 Γ.  $AB^2 = AG \cdot A\Delta$       Δ.  $AB^2 = BG \cdot B\Delta$





**Ε.**  $BΓ^2 = BΔ \cdot AΓ$

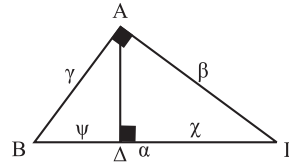
7. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο από τις παρακάτω σχέσεις, λάθος είναι η σχέση:

**Α.**  $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$       **Β.**  $\beta^2 = \alpha \cdot x$

**Γ.**  $\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{x}{y}$

**Δ.**  $\frac{x}{\beta^2} = \frac{y}{\alpha^2}$

**Ε.**  $\gamma^2 = \alpha \cdot y$

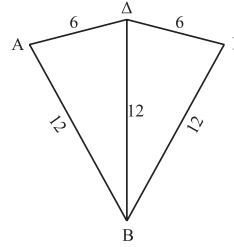


8. Στο τετράπλευρο ABΓΔ έχουμε  $AB = BΔ = BΓ = 12$  και  $AΔ = ΔΓ = 6$ . Το μήκος της AΓ είναι:

**Α.**  $3\sqrt{15}$       **Β.**  $4\sqrt{7}$       **Γ.**  $5\sqrt{5}$

**Δ.**  $6\sqrt{3}$       **Ε.**  $8\sqrt{2}$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ - Θαλής 1991)

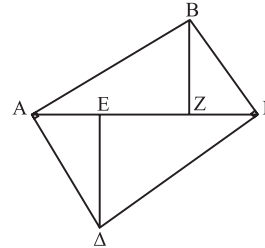


9. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ABΓΔ έχει  $A = \Gamma = 90^\circ$ . Αν  $BZ, EΔ \perp AΓ$  και  $AE = 3, ΔE = 5, ΓE = 7$ , τότε η BZ ισούται με:

**Α.** 3.6      **Β.** 4      **Γ.** 4.2

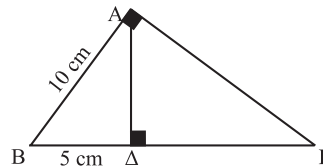
**Δ.** 4.5      **Ε.** 5

(Διαγωνισμός ΕΜΕ - Θαλής 1992)

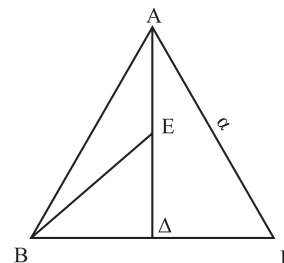


**Ερωτήσεις διάταξης**

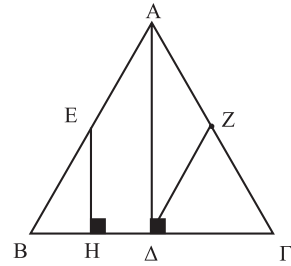
1. Στο διπλανό σχήμα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ( $A = 90^\circ$ ) το AΔ είναι ύψος του,  $AB = 10$  cm και  $BΔ = 5$  cm. Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα ευθύγραμμα τμήματα: AB, BΓ, AΓ, AΔ.



2. Το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο με πλευρά α. Αν AΔ ύψος και E μέσον του AΔ, να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα τμήματα: AB, AΔ, BΔ, BE.

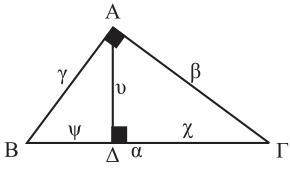
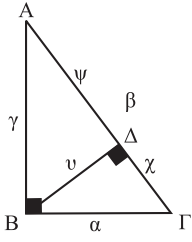
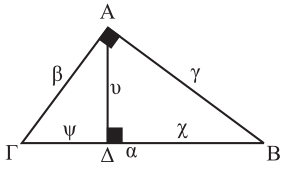


3. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο με πλευρά  $a$ .  
α. Αν  $A\Delta$  ύψος του τριγώνου,  $E, Z$  μέσα των πλευρών του  $AB, A\Gamma$  και  $E\text{H}$  κάθετη στη  $B\Gamma$ , να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα τμήματα:  $E\text{H}, AB, A\Delta, \Delta Z$ .

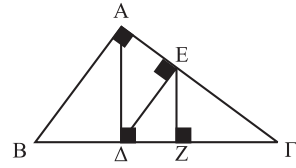


**Ερωτήσεις αντιστοίχισης**

1. Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία των τριγώνων της στήλης (Α), να αντιστοιχίσετε κάθε τρίγωνο με μια σχέση της στήλης (Β).

στήλη (Α)	στήλη (Β)
	$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ $\beta^2 = \alpha \cdot y$
	$\frac{\alpha^2}{\gamma^2} = \frac{x}{y}$ $\gamma^2 = \alpha \cdot y$
	$\alpha^2 = \beta \cdot y$

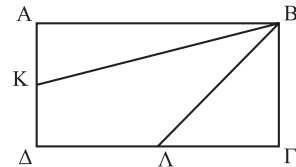
2. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο στο  $A$ ,  $AD \perp B\Gamma$ ,  $DE \perp A\Gamma$ ,  $EZ \perp B\Gamma$ . Να αντιστοιχίσετε κάθε σχέση της στήλης (A) με το τρίγωνο στο οποίο ισχύει, της στήλης (B).



στήλη (A) Σχέσεις	στήλη (B) Τρίγωνα
$\Delta E^2 = EA \cdot E\Gamma$	$\Delta E\Delta$
$\Delta E^2 = \Delta\Gamma \cdot \Delta Z$	$\Delta \Delta\Gamma$
$\Delta E^2 = A\Delta^2 - AE^2$	$\Delta ZE$
$\Delta E^2 = EZ^2 + \Delta Z^2$	$EZ\Gamma$
	$AB\Gamma$
	$\Delta E\Gamma$

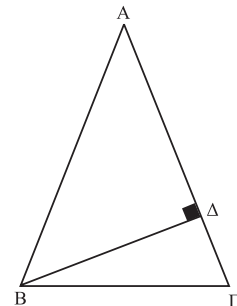
### Ερωτήσεις συνδυασμού διαφόρων τύπων

1. Στο σχήμα είναι το  $AB\Gamma\Delta$  ορθογώνιο και τα  $K, \Lambda$  μέσα.



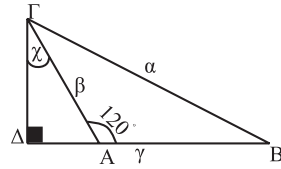
- α) Να συμπληρωθούν οι ισότητες:
- $BK^2 = AB^2 + \dots\dots\dots$
  - $B\Lambda^2 = B\Gamma^2 + \dots\dots\dots$
- β) Αποδείξτε ότι:  $BK^2 + B\Lambda^2 = \frac{5}{4} B\Delta^2$

2. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με κορυφή το  $A$  και  $B\Delta$  ύψος.



- α) Να συμπληρωθούν οι ισότητες:
- $B\Delta^2 = B\Gamma^2 - \dots\dots\dots$
  - $B\Delta^2 = AB^2 - \dots\dots\dots$
- β) Αποδείξτε ότι:  $B\Gamma^2 = 2 A\Gamma \cdot \Delta\Gamma$

3. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι αμβλυγώνιο με  $A = 120^\circ$  και  $\Gamma\Delta$  ύψος του τριγώνου.



α) Η γωνία  $x$  ισούται με:

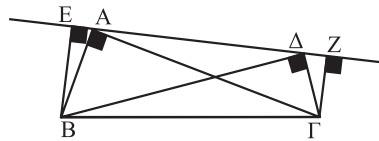
- i)  $20^\circ$       ii)  $30^\circ$       iii)  $40^\circ$   
iv)  $50^\circ$       v)  $60^\circ$

β) Από τις παρακάτω ισότητες, η σωστή είναι:

- i)  $A\Delta = \Delta\Gamma$       ii)  $A\Delta = \frac{\Delta\Gamma}{2}$       iii)  $A\Delta = \frac{A\Gamma}{2}$   
iv)  $\Delta\Gamma = \frac{A\Gamma}{2}$       v)  $A\Gamma = A\Delta \cdot \Delta\Gamma$

γ) Αποδείξτε ότι:  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$ .

4. Στο σχήμα τα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$ ,  $\Delta B\Gamma$  έχουν κοινή υποτείνουσα και  $E, Z$  είναι οι προβολές των  $B, \Gamma$  αντίστοιχως στην  $A\Delta$ .



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται στο σχήμα είναι:

- i) 4      ii) 5      iii) 6      iv) 7      v) 8

β) Από τις παρακάτω ισότητες σωστή είναι:

- i)  $AE^2 = AB^2 + BE^2$   
ii)  $A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$   
iii)  $\Delta\Gamma^2 = \Gamma Z^2 - \Delta Z^2$   
iv)  $A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2$   
v)  $B\Delta^2 = A\Delta^2 - AB^2$

γ) Να συμπληρωθούν οι ισότητες:

i)  $AE^2 = AB^2 - \dots\dots\dots$

ii)  $AZ^2 = AG^2 - \dots\dots\dots$

iii)  $\Delta B^2 = BE^2 + \dots\dots\dots$

iv)  $\Delta \Gamma^2 = \Delta Z^2 + \dots\dots\dots$

δ) Αποδείξτε ότι:  $AE^2 + AZ^2 = \Delta E^2 + \Delta Z^2$

5. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  ορθογώνιο στο  $A$  και  $AB = A\Gamma$ . Από το μέσο  $\Delta$  της  $B\Gamma$  φέρνουμε  $\Delta E \perp AB$  και  $\Delta Z \perp A\Gamma$ . Γράφουμε και την  $A\Delta$ .

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται στο σχήμα είναι:

i) 3

ii) 4

iii) 5

iv) 6

v) 7

β) Από τις παρακάτω ισότητες, είναι λάθος η ισότητα:

i)  $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$

ii)  $A\Delta^2 = \Delta E^2 + AE^2$

iii)  $A\Delta^2 = \Delta Z^2 + \Delta E^2$

iv)  $A\Delta^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$

v)  $A\Delta^2 = \Delta Z^2 + AZ^2$

γ) Αποδείξτε ότι:  $B\Delta \cdot \Delta\Gamma = AE \cdot EB + AZ \cdot Z\Gamma$

### Ερωτήσεις ανάπτυξης

#### 1. Πυθαγόρειες Τριάδες

α) Αν οι φυσικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου, να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για τους  $\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma$ , όπου  $\lambda$  θετικός φυσικός αριθμός.

β) i) Αν ο αριθμός  $a$  είναι φυσικός περιττός και  $a \geq 3$ , να αποδείξετε ότι οι

φυσικοί αριθμοί  $a, \frac{a^2 - 1}{2}, \frac{a^2 + 1}{2}$  είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

ii) Αν ο αριθμός  $a$  είναι φυσικός άρτιος και  $a \geq 4$ , να αποδείξετε ότι οι φυσικοί αριθμοί

$a, \frac{a^2}{4} - 1, \frac{a^2}{4} + 1$  είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου (οι αριθμοί αυτοί αποδίδονται στους Πλατωνικούς).

γ) Να αποδείξετε ότι οι φυσικοί αριθμοί  $\alpha^2 - \beta^2, 2\alpha\beta, \alpha^2 + \beta^2$  είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

(Θεωρείστε δεδομένο ότι αν οι  $\alpha, \beta$  είναι φυσικοί αριθμοί, έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τη μονάδα και ότι ο  $a$  είναι άρτιος αριθμός, οι τριάδες που παίρνουμε είναι διάφορες μεταξύ τους).

Παρατήρηση: Στις παραπάνω περιπτώσεις (α), (β) και (γ) παίρνουμε ορθογώνια τρίγωνα με μήκη πλευρών φυσικούς αριθμούς. Εξετάστε, αν οι περιπτώσεις αυτές μπορούν να γενικευθούν για πραγματικούς αριθμούς.

2. Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $A = 90^\circ$ ,  $AB = 60$  m και  $A\Delta = 15$  m, όπου  $\Delta$  σημείο της  $A\Gamma$ . Να βρεθεί το μήκος του  $\Gamma\Delta$  αν είναι  $AB + A\Delta = \Gamma\Delta + B\Gamma$ .

3. Οι προβολές των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου πάνω στην υποτείνουσα είναι 3 cm και 12 cm. Να βρεθούν το ύψος από την ορθή γωνία και οι κάθετες πλευρές του τριγώνου.
4. Να βρεθούν οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου που έχει υποτείνουσα 10 cm και περίμετρο 24 cm.
5. Έστω  $AB\Gamma$  ( $AB > A\Gamma$ ) τυχαίο οξυγώνιο τρίγωνο. Φέρνουμε το ύψος του  $A\Delta$ . Αποδείξτε ότι ισχύει:  $AB^2 - A\Gamma^2 = B\Delta^2 - \Gamma\Delta^2$ .
6. Έστω γωνία  $\alpha O\gamma = 45^\circ$  και  $M$  τυχαίο σημείο στο εσωτερικό της. Από το  $M$  φέρνουμε κάθετη στην  $O\alpha$  που την τέμνει στο  $A$ . Αν την  $O\gamma$  την τέμνει στο  $B$ , αποδείξτε ότι:  $AB^2 + AM^2 = OM^2$ .
7. Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  η μία κάθετη πλευρά είναι μεγαλύτερη από την άλλη κατά 6 cm. Αν το άθροισμα των καθέτων πλευρών είναι 42 cm, να υπολογιστεί η υποτείνουσα του τριγώνου.
8. Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) είναι  $AB = 2A\Gamma$ . Αν  $A\Delta$  ύψος του ορθογωνίου, αποδείξτε ότι:  $B\Delta = 4\Gamma\Delta$ .

9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) και έστω  $A\Delta$  ύψος του τριγώνου. Αποδείξτε ότι:
- α)  $AB^2 + A\Delta^2 = B\Delta (\Delta\Gamma + B\Gamma)$   
 β)  $A\Gamma^2 + A\Delta^2 = \Delta\Gamma (B\Delta + B\Gamma)$
10. Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = B\Delta = B\Gamma = 14$  cm και  $A\Delta = \Delta\Gamma = 8$  cm.
- α) Να αποδείξετε ότι η  $B\Delta$  είναι μεσοκάθετος της  $A\Gamma$ .  
 β) Να υπολογίσετε το μήκος του  $A\Gamma$ .
11. Αν  $M$  είναι εσωτερικό σημείο του ορθογώνιου  $AB\Gamma\Delta$ , να αποδείξετε ότι:  
 $MA^2 + M\Gamma^2 = MB^2 + M\Delta^2$ .
12. Ενός τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$  οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετως. Να αποδειχθεί ότι:  $AB^2 + \Gamma\Delta^2 = B\Gamma^2 + A\Delta^2$ .
13. Στη διαγώνιο  $B\Delta$  τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$  παίρνουμε τυχαίο σημείο  $O$ . Να αποδειχθεί ότι:  $\Gamma\Delta^2 - \Gamma O^2 = BO \cdot O\Delta$ .
14. Ενός ορθογώνιου τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι γωνία  $B = 60^\circ$  και  $AB = \lambda$ . Να υπολογισθεί το ύψος  $A\Delta$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  συναρτήσει του  $\lambda$ .
15. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με βάσεις  $AB = 5$  cm και  $\Gamma\Delta = 1,4$  cm. Αν  $A\Delta = 3$  cm, να υπολογίσετε το ύψος και τις διαγώνιές του.
16. Από την κορυφή  $A$  τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$  γράφουμε τυχαία ευθεία, που κόβει τις  $B\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  στα  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Αν  $a$  είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου, να αποδείξετε ότι:  

$$\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AZ^2} = \frac{1}{a^2}$$
17. Ενός ισοσκελούς τραπέζιου  $AB\Gamma\Delta$  η μεγάλη βάση του  $AB$  είναι διπλάσια της πλευράς  $A\Delta$  και η γωνία  $A = 60^\circ$ . Αν είναι γνωστό ότι το μήκος της πλευράς  $A\Delta$  είναι  $\lambda$ , να υπολογιστούν:
- α) το ύψος του τραπέζιου και  
 β) η άλλη βάση  $\Gamma\Delta$ .



## ΚΥΚΛΟΣ

### Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

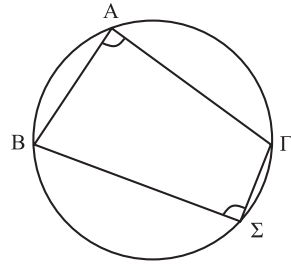
#### Σωστό Λάθος

1. Αν  $a$  είναι η απόσταση ευθείας  $\varepsilon$  από το κέντρο του κύκλου  $(O, \rho)$  τότε:
  - αν  $a > \rho$  η  $\varepsilon$  λέγεται εξωτερική του κύκλου
  - αν  $a = \rho$  η  $\varepsilon$  λέγεται τέμνουσα του κύκλου
  - αν  $a < \rho$  η  $\varepsilon$  λέγεται εφαπτομένη του κύκλου
2. Κάθε ευθεία κάθετη στο άκρο ακτίνας κύκλου είναι εφαπτομένη του.
3. Η διακεντρική ευθεία σημείου περνά από το κέντρο του κύκλου.
4. Τα εφαπτόμενα τμήματα προς κύκλο από σημείο εκτός αυτού μπορεί να είναι άνισα.
5. Για να συγκρίνουμε δύο τόξα πρέπει αναγκαστικά να ανήκουν στον ίδιο κύκλο.
6. Η κάθετη σε μια χορδή που περνά από το κέντρο του κύκλου περνά και από το μέσο της χορδής.
7. Σε δύο άνισες χορδές του ίδιου κύκλου αντιστοιχούν ομοίως άνισα αποστήματα.
8. Το σημείο επαφής δύο εφαπτομένων κύκλων ανήκει στη διάκεντρό τους.
9. Η διάκεντρος δύο κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.
10. Υπάρχει κύκλος που να περνά από ένα εσωτερικό και από ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου και να μην τέμνει αυτόν τον κύκλο.
11. Υπάρχει εγγεγραμμένη γωνία που δεν ισούται με το μισό μιας επίκεντρης.
12. Μια εγγεγραμμένη γωνία, που βαίνει σε τόξο διπλάσιο απ' το τόξο της αντίστοιχης επίκεντρης είναι ίση μ' αυτή.
13. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικόκλιο είναι ορθή.
14. Δυο εγγεγραμμένες γωνίες, που καθεμιά βαίνει στο τόξο που δέχεται την άλλη είναι ίσες.
15. Τα ύψη ενός οξυγωνίου τριγώνου διχοτομούν τις γωνίες του ορθικού του τριγώνου.

### Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

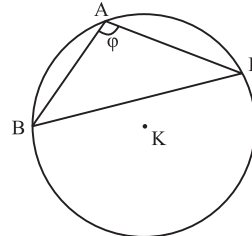
1. Δυο εγγεγραμμένες γωνίες, που καθεμιά βαίνει στο τόξο που δέχεται την άλλη, όπως οι γωνίες A και Σ είναι πάντοτε:

A. ίσες  
B. συμπληρωματικές  
Γ. παραπληρωματικές  
Δ. αμβλείες  
E. κανένα από τα παραπάνω



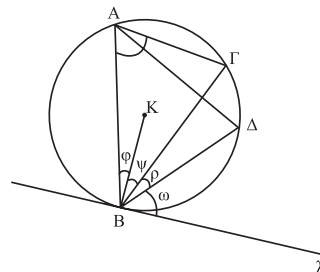
2. Στο διπλανό σχήμα η γωνία φ είναι:

A. οξεία  
B. αμβλεία  
Γ. ορθή  
Δ.  $\varphi = B + \Gamma$   
E.  $\varphi = B\Gamma$



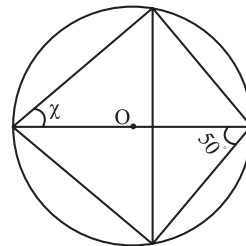
3. Στο διπλανό σχήμα το K είναι κέντρο του κύκλου και η Bx εφαπτομένη του. Η γωνία A ισούται με:

A.  $\omega$   
B.  $\rho$   
Γ.  $\psi$   
Δ.  $\varphi$   
E.  $\omega + \rho$



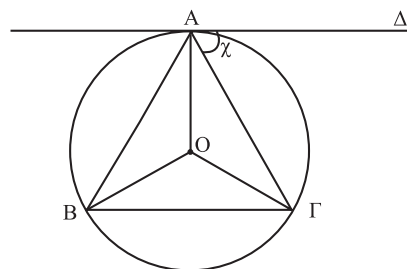
4. Στο διπλανό σχήμα O είναι το κέντρο του κύκλου και οι διαγώνιες του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα. Η γωνία x ισούται με:

A.  $10^\circ$   
B.  $20^\circ$   
Γ.  $30^\circ$   
Δ.  $40^\circ$   
E.  $50^\circ$



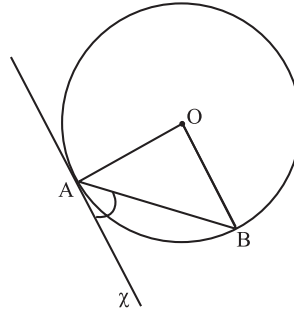
5. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο, O είναι το κέντρο του κύκλου και η AΔ εφαπτομένη του κύκλου. Η γωνία x ισούται με:

A.  $20^\circ$   
B.  $30^\circ$   
Γ.  $45^\circ$   
Δ.  $60^\circ$   
E.  $80^\circ$



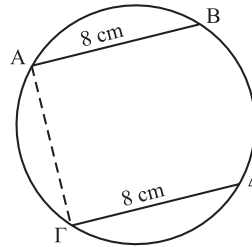
6. Στο διπλανό σχήμα  $O$  είναι το κέντρο του κύκλου και η εφαπτομένη  $Ax$  παράλληλη στην  $OB$ . Η γωνία  $\chi$  ισούται με:

A.  $20^\circ$       B.  $30^\circ$       Γ.  $45^\circ$   
 Δ.  $60^\circ$       E.  $80^\circ$



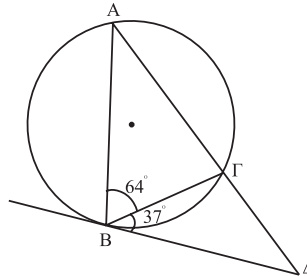
7. Στο διπλανό σχήμα είναι  $AB = \Gamma\Delta = 8$  cm,  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και η ακτίνα του κύκλου είναι 5 cm. Η απόσταση  $A\Gamma$  των  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  είναι:

A. 3      B. 4      Γ. 6  
 Δ. 8      E. 10



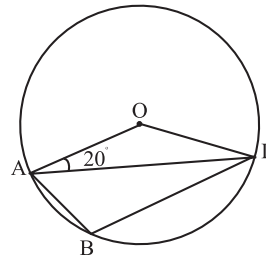
8. Στο διπλανό σχήμα  $AB\Gamma = 64^\circ$  και  $\Gamma B\Delta = 37^\circ$  και  $B\Delta$  εφαπτομένη του κύκλου. Η γωνία  $B\Gamma\Delta$  ισούται με:

A.  $143^\circ$       B.  $37^\circ$       Γ.  $79^\circ$   
 Δ.  $101^\circ$       E.  $64^\circ$



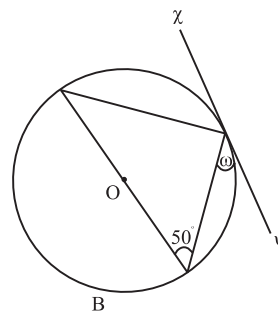
9. Στο διπλανό σχήμα  $O$  είναι το κέντρο του κύκλου και  $OAG = 20^\circ$ . Η γωνία  $AB\Gamma$  ισούται με:

A.  $70^\circ$       B.  $80^\circ$       Γ.  $100^\circ$   
 Δ.  $110^\circ$       E.  $140^\circ$



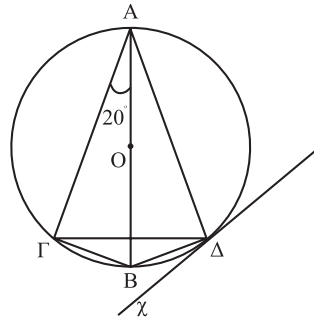
10. Στο διπλανό σχήμα  $O$  είναι το κέντρο του κύκλου και  $xy$  εφαπτομένη του. Η γωνία  $\omega$  ισούται με:

A.  $30^\circ$       B.  $40^\circ$       Γ.  $45^\circ$   
 Δ.  $50^\circ$       E.  $60^\circ$



11. Στο διπλανό σχήμα  $O$  είναι το κέντρο του κύκλου και  $\Delta x$  εφαπτομένη του. Αν είναι  $\angle BAG = 20^\circ$  και  $AB$  κάθετη στη  $\Gamma\Delta$ . Οι εμφανιζόμενες (σε αριθμό) στο σχήμα γωνίες που είναι ίσες με  $20^\circ$  είναι:

A. 4      B. 5      Γ. 6  
Δ. 7      E. 8



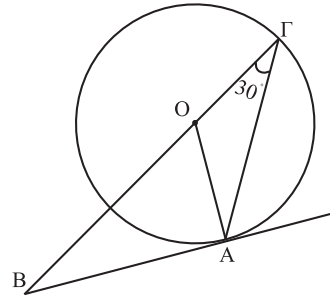
12. Στο διπλανό σχήμα  $O$  είναι το κέντρο του κύκλου,  $BA$  εφαπτομένη του και  $\angle G = 30^\circ$ .

α) Η γωνία  $B$  ισούται με:

A.  $15^\circ$       B.  $30^\circ$       Γ.  $45^\circ$   
Δ.  $60^\circ$       E.  $75^\circ$

β) Το ευθύγραμμο τμήμα  $BO$  ισούται με:

A.  $AB$       B.  $AO$       Γ.  $AG$   
Δ.  $2AB$       E.  $2AO$



### Ερώτηση συμπλήρωσης

1. Να συμπληρωθούν οι στήλες (B) και (Γ) για κάθε περίπτωση της στήλης (A).

στήλη (A)	στήλη (B) Αριθμός κοινών εξωτερικών εφαπτομένων	στήλη (Γ) Αριθμός κοινών εσωτερικών εφαπτομένων
<ul style="list-style-type: none"> <li>Ο ένας κύκλος βρίσκεται εκτός του άλλου.</li> <li>Οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.</li> <li>Οι δύο κύκλοι τέμνονται.</li> <li>Οι δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.</li> </ul>		

**Ερωτήσεις αντιστοίχισης**

1. Αν  $a$  είναι η απόσταση του κέντρου  $O$  ενός κύκλου  $(O, \rho)$  από μια ευθεία  $\varepsilon$ , τότε να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε σχέση της πρώτης στήλης με το αντίστοιχο συμπέρασμα της δεύτερης στήλης.

στήλη (A)	στήλη (B)
$a > \rho$	<ul style="list-style-type: none"><li>• Η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία.</li></ul>
$a < \rho$	<ul style="list-style-type: none"><li>• Η ευθεία και ο κύκλος έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.</li></ul>
$a = \rho$	<ul style="list-style-type: none"><li>• Η ευθεία και ο κύκλος έχουν άπειρα κοινά σημεία.</li><li>• Η ευθεία και ο κύκλος έχουν δύο ακριβώς κοινά σημεία.</li><li>• Η ευθεία και ο κύκλος έχουν τουλάχιστον δύο κοινά σημεία.</li></ul>

2. Αν  $(K, R)$  και  $(\Lambda, \rho)$  είναι δύο κύκλοι που έχουν διαφορετικά κέντρα και  $R > \rho$ ,  $K\Lambda = \delta$  συνδέστε με μια γραμμή κάθε σχέση της πρώτης στήλης με το αντίστοιχο συμπέρασμα της δεύτερης.

στήλη (A)	στήλη (B)
$\delta = R + \rho$	<ul style="list-style-type: none"><li>• Καθένας κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου.</li></ul>
$\delta > R + \rho$	<ul style="list-style-type: none"><li>• Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.</li></ul>
$\delta = R - \rho$	<ul style="list-style-type: none"><li>• Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.</li><li>• Οι κύκλοι τέμνονται.</li><li>• Ο κύκλος <math>(\Lambda, \rho)</math> είναι εσωτερικός του <math>(K, R)</math> χωρίς να έχουν κοινά σημεία.</li></ul>

3. Να αντιστοιχίσετε τις φράσεις της στήλης Α με τις φράσεις της στήλης Β ώστε να δημιουργηθούν σωστές προτάσεις:

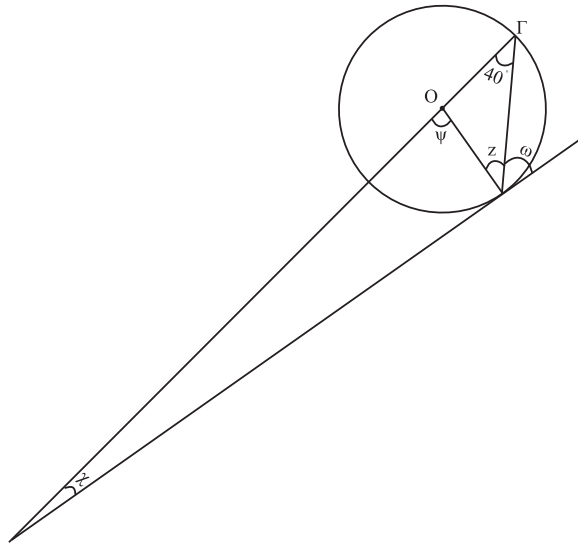
στήλη (Α)	στήλη (Β)
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τα άκρα ενός τμήματος AB είναι:</li> <li>• Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες <math>e_1</math> και <math>e_2</math> είναι:</li> <li>• Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν ίση απόσταση <math>a</math> από ένα σημείο <math>O</math> είναι:</li> <li>• Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές μιας γωνίας είναι:</li> </ul>	<p>διάμετρος του κύκλου (<math>O, a</math>)</p> <p>ο κύκλος (<math>O, a</math>)</p> <p>η διχοτόμος της γωνίας</p> <p>η μεσοκάθετη</p> <p>η μεσοπαράλληλη</p> <p>το τόξο κύκλου</p>

4. Να αντιστοιχίσετε τις φράσεις της στήλης Α με τις φράσεις της στήλης Β:

στήλη (Α)	στήλη (Β)
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα</li> <li>• Ευθεία εφάπτεται σε κύκλο</li> <li>• Δυο γωνίες είναι ίσες</li> <li>• Μια γωνία είναι ορθή</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Δυο γωνίες είναι εγγεγραμμένες στον ίδιο κύκλο και βαίνουν σε ίσα τόξα</li> <li>• Δυο ευθύγραμμα τμήματα είναι αποστήματα δυο ίσων χορδών του ίδιου κύκλου</li> <li>• Ευθεία κάθετη στο άκρο μιας ακτίνας κύκλου</li> <li>• Μια γωνία είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικόκλιο</li> <li>• Χορδές του ίδιου κύκλου</li> <li>• Η απόσταση της ευθείας από το κέντρο του κύκλου είναι μικρότερη από την ακτίνα του κύκλου</li> </ul>

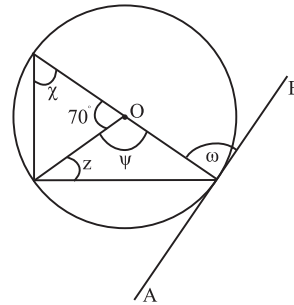
### Ερωτήσεις διάταξης

1. Στο παρακάτω σχήμα,  $O$  είναι το κέντρο του κύκλου.

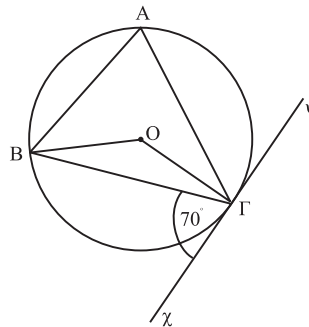


Να γράψετε σε μια σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις γωνίες:  $x, y, z, \omega$ .

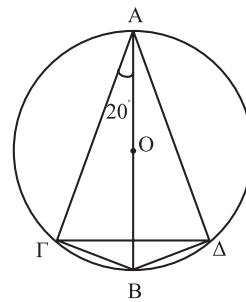
2. Στο διπλανό σχήμα  $O$  είναι το κέντρο του κύκλου και  $AB$  εφαπτομένη του. Να γράψετε σε μια σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις γωνίες:  $x, y, z, \omega$ .



3. Στο διπλανό σχήμα  $O$  είναι το κέντρο του κύκλου,  $xy$  εφαπτομένη και  $B\Gamma x = 70^\circ$ . Να γράψετε σε μια σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις γωνίες:  $BO\Gamma, OB\Gamma, BA\Gamma, O\Gamma y$ .



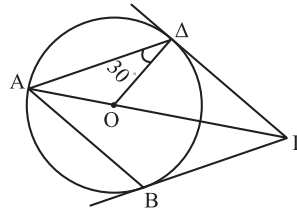
4. Στο διπλανό σχήμα  $O$  είναι το κέντρο του κύκλου και  $A\Gamma = A\Delta$ . Να γράψετε σε μια σειρά απ' τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις γωνίες:  $B\Gamma\Delta, \Gamma B\Delta, B\Delta O, O\Delta\Gamma, \Gamma A\Delta, A\Gamma B$ .



**Ερωτήσεις συνδυασμού διαφόρων τύπων**

Ερώτηση συμπλήρωσης κενού και διάταξης

1. Στο διπλανό σχήμα το  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο, το  $O$  είναι το κέντρο του κύκλου και  $\angle ADO = 30^\circ$ :



α) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας με τα μέτρα των αντίστοιχων γωνιών.

Γωνία	$\angle OAD$	$\angle OGB$	$\angle GOD$	$\angle ODG$	$\angle ADG$
μέτρο γωνίας					

β) Να γράψετε σε μια σειρά από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις γωνίες:  $\angle BAD$ ,  $\angle ADO$ ,  $\angle ADG$ ,  $\angle ODG$ .



Ερώτηση πολλαπλής επιλογής και αντιστοίχισης

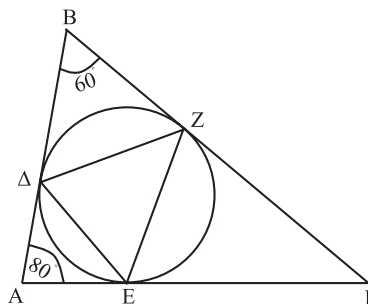
2. Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $B = 60^\circ$ ,  $A = 80^\circ$ .

α) Η γωνία  $\Delta EZ$  ισούται με:

A.  $40^\circ$       B.  $50^\circ$       Γ.  $60^\circ$

Δ.  $70^\circ$       E.  $80^\circ$

β) Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης μ' ένα μόνο στοιχείο της δεύτερης στήλης.

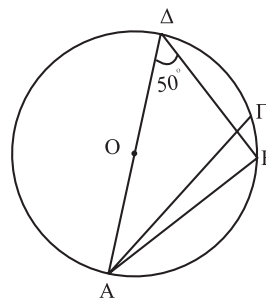


στήλη (A) γωνία	στήλη (B) μέτρο γωνίας σε μοίρες
$\Delta ZE$	$40^\circ$
$A\Gamma B$	$50^\circ$
$BZ\Delta$	$60^\circ$
	$70^\circ$
	$80^\circ$

Ερώτηση αντιστοίχισης και διάταξης

3. Στο διπλανό σχήμα η  $A\Delta$  είναι διάμετρος,  $A\Delta B = 50^\circ$  και  $\Delta A\Gamma = 3\Gamma A B$ .

α) Να αντιστοιχίσετε κάθε κυρτογώνιο τόξο της στήλης A στο αντίστοιχο μέτρο που βρίσκεται στη στήλη B.



στήλη (A) τόξο	στήλη (B) μέτρο τόξου
AB	$20^\circ$
BΓ	$40^\circ$
$\Gamma\Delta$	$50^\circ$
BΔ	$60^\circ$
	$80^\circ$
	$100^\circ$

β) Να γράψετε σε μια σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα παρακάτω ευθύγραμμα τμήματα: AB, AΓ, AΔ, BΔ, ΓΔ.

### Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο του κοινού εξωτερικού εφαπτόμενου τμήματος δύο κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά είναι ίσο με το γινόμενο των διαμέτρων των δύο κύκλων.
2. Στο εσωτερικό κύκλου (O, R) παίρνουμε ένα σημείο M. Αν AB και ΓΔ είναι δύο μεταβλητές κάθετες χορδές που περνούν από το σημείο M, να αποδείξετε ότι:  $AB^2 + \Gamma\Delta^2 = 8R^2 - 4MO^2$ .

3. Δίνεται κύκλος  $(K, R)$  στον οποίο η διάμετρος του  $AB$  είναι παράλληλη προς τη χορδή  $\Gamma\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:  $AB^2 = B\Gamma^2 + B\Delta^2$ .
4. Ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(O, R)$ . Αν είναι  $B = 90^\circ + \Gamma$ , να αποδείξετε ότι:  $AB^2 + A\Gamma^2 = 4R^2$ .
5. Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$ . Γράφουμε μια διάμετρό του  $AB$  και μια χορδή  $A\Gamma$ . Αν οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  κόβονται στο σημείο  $\Sigma$ , να αποδείξετε ότι:
- $\text{BO}\Gamma = 2\text{B}\Gamma\Sigma$
  - $\text{O}\Sigma \parallel \text{A}\Gamma$
6. Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα  $K$  και  $\Lambda$ . Από το μέσο  $M$  της  $K\Lambda$  φέρνουμε μια ευθεία η οποία τέμνει τον ένα κύκλο στα σημεία  $A, B$  και τον άλλο στα  $\Gamma$  και  $\Delta$ . Αποδείξτε ότι:  $AB = \Gamma\Delta$ .
7. Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  και σε σημείο του  $M$  γράφουμε την εφαπτόμενη του. Αν δύο άλλες παράλληλες εφαπτόμενες τέμνουν την προηγούμενη εφαπτομένη στα σημεία  $A, B$ :
- Αποδείξτε ότι:  $\text{AOB} = 90^\circ$ .
  - Να βρεθεί η θέση του  $M$  ώστε να ισχύει  $OM = \frac{AB}{2}$ .

**Θέματα συνδυασμού ερωτήσεων ανάπτυξης και πολλαπλής επιλογής**

1. Δύο κύκλοι  $(K, R)$  και  $(\Lambda, \rho)$  τέμνονται στα σημεία  $A, B$ . Μια ευθεία παράλληλη της  $KL$  που διέρχεται από το  $A$  τέμνει τους κύκλους στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα.
- α) Ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστή:
- A.**  $KL = R + \rho$       **B.**  $KL = R - \rho$       **Γ.**  $KL < R - \rho$   
**Δ.**  $KL < R + \rho$       **E.**  $KL > R + \rho$
- β) Αποδείξτε ότι:  $\Gamma\Delta = 2KL$ .
2. Θεωρούμε κύκλο  $(O, R)$ , διάμετρο  $AB$  και την ακτίνα  $OG \perp AB$ . Έστω  $M$  το μέσο της ακτίνας  $OB$  και  $\Delta$  το σημείο που η  $GM$  τέμνει τον κύκλο. Αν η εφαπτομένη του κύκλου στο  $\Delta$  τέμνει την ευθεία  $OB$  στο σημείο  $E$ ,
- α) Η γωνία  $\Gamma\Delta E$  είναι ίση με την:
- A.**  $\Gamma O\Delta$       **B.**  $\Gamma M B$       **Γ.**  $\frac{\Gamma O\Delta}{2}$       **Δ.**  $\frac{O\Delta E}{2}$       **E.**  $\Gamma O M$
- β) Αποδείξτε ότι το τρίγωνο  $EM\Delta$  είναι ισοσκελές.
3. Δύο κύκλοι  $(K, 3\rho)$ ,  $(\Lambda, \rho)$  εφάπτονται εξωτερικά. Αν  $AA'$  είναι κοινό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων:
- α) Αποδείξτε ότι οι κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες σχηματίζουν γωνία  $60^\circ$ .
- β) Η γωνία που σχηματίζουν η  $KL$  και η ακτίνα  $KA$ , όπου  $A$  σημείο του κύκλου  $(K, 3\rho)$  είναι:
- A.**  $30^\circ$       **B.**  $45^\circ$       **Γ.**  $60^\circ$       **Δ.**  $90^\circ$       **E.**  $100^\circ$
- γ) Να υπολογίσετε το  $AA'$  συναρτήσει του  $\rho$ .



ρόμβος		
ισοσκελές τραπέζιο		

**Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής**

1. Το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι περιγράψιμο σε κύκλο και έχει διάμεσο ίση με  $a$ . Η περίμετρός του ισούται με:

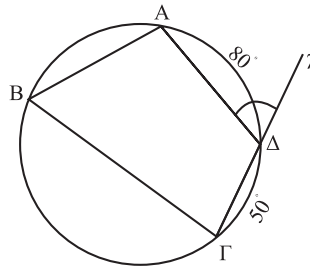
- A.  $3a$       B.  $4a$       Γ.  $5a$       Δ.  $6a$       Ε.  $7a$

2. Κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι σε κύκλο:

- A. εγγράψιμο και όχι περιγράψιμο  
 B. περιγράψιμο και όχι εγγράψιμο  
 Γ. ούτε εγγράψιμο, ούτε περιγράψιμο  
 Δ. εγγράψιμο και συγχρόνως περιγράψιμο  
 Ε. τίποτα από τα παραπάνω

3. Στο διπλανό σχήμα είναι τόξο  $A\Delta = 80^\circ$  και τόξο  $\Gamma\Delta = 50^\circ$ . Η γωνία  $A\Delta\chi$  ισούται με:

- A.  $80^\circ$       B.  $90^\circ$       Γ.  $105^\circ$   
 Δ.  $115^\circ$       Ε.  $130^\circ$

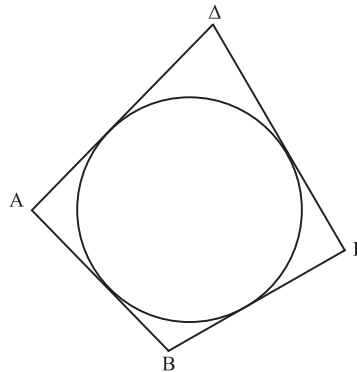


4. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο και η Α γωνία του είναι τετραπλάσια της Γ. Η γωνία Α ισούται με:

- A.  $36^\circ$       B.  $45^\circ$       Γ.  $72^\circ$       Δ.  $90^\circ$       Ε.  $144^\circ$

5. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Η περίμετρος του τετραπλεύρου είναι 25 cm και  $A\Delta = 8$  cm. Το μήκος της ΒΓ σε cm είναι:

- A.  $\frac{17}{2}$       B. 6      Γ. 5,5  
 Δ. 5      Ε. 4,5



6. Ένα οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι εφαπτόμενες ευθείες στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  κόβονται στο  $\Delta$ . Είναι  $AB\Gamma = B\Gamma A = 2\Delta$  και  $x$  το μέτρο της  $A$  σε ακτίνια. Η  $x$  ισούται με:

A.  $\frac{3}{7}\pi$       B.  $\frac{4}{9}\pi$       Γ.  $\frac{5}{11}\pi$       Δ.  $\frac{6}{13}\pi$  E.  $\frac{7}{15}\pi$

(Δόθηκε σε διαγωνισμό ΕΜΕ - Θαλής 1992)

**Ερωτήσεις ανάπτυξης**

1. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζεται με κορυφές τα σημεία τομής των διχοτόμων ενός τετραπλεύρου είναι εγγράψιμο σε κύκλο.
2. Να αποδείξετε ότι:
  - α) Τέσσερις εφαπτόμενες ευθείες ενός κύκλου, παράλληλες ανά δύο, σχηματίζουν ένα ρόμβο περιγεγραμμένο στον κύκλο.
  - β) Το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτομένων με τον κύκλο είναι ορθογώνιο.
3. Από το μέσο  $\Gamma$  ενός τόξου  $AB$  κύκλου με κέντρο  $O$  γράφουμε δύο χορδές  $\Gamma\Delta$  και  $\Gamma E$  που τέμνουν τη χορδή  $AB$  στα σημεία  $Z$  και  $H$ . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $EHZ\Delta$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο.
4. Από σημείο  $P$  του ύψους  $AD$  οξυγωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  φέρνουμε  $PE \perp AB$  και  $PZ \perp A\Gamma$ .
  - α) Να αντιστοιχήσετε κάθε γωνία της στήλης (A) με την ίση γωνία της στήλης (B).

Στήλη (A)	στήλη (B)
$\widehat{AZE}$	$\widehat{A\Gamma\Delta}$
	$\widehat{APE}$
$\widehat{APZ}$	$\widehat{EAP}$
	$\widehat{AEZ}$
$\widehat{PEZ}$	$\widehat{PAZ}$

- β) Αποδείξτε ότι το τετράπλευρο  $BEZ\Gamma$  είναι εγγράψιμο.
- γ) Τα εγγράψιμα τετράπλευρα του σχήματος σε αριθμό είναι:  
**A. 2      B. 3      Γ. 4      Δ. 5      E. 6**

5. Η διχοτόμος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο του κύκλο στο σημείο Ε.  
Να αποδείξετε ότι:  
α)  $AB \cdot AG = AD \cdot AE$   
β)  $EB^2 = EA \cdot ED$
6. Στα άκρα της χορδής ΑΒ ενός κύκλου φέρνουμε τις κάθετες χορδές του κύκλου. Να αποδείξετε ότι οι χορδές αυτές είναι απέναντι πλευρές ενός ορθογωνίου, το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο.
7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ( $AB = AG$ ) περιγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Αν Ε, Δ, Θ είναι αντίστοιχα τα σημεία επαφής των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ με τον κύκλο και η διακεντρική ευθεία από το Α κόβει τον κύκλο στα σημεία Ζ και Δ, να δείξετε ότι η γωνία ΑΒΓ ισούται με τη γωνία ΑΟΘ.
8. Δίνεται πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ που έχει  $AB = BG = GD = DE$  και  $B = G = \Delta$ . Να αποδείξετε ότι το πεντάγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.
9. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα να αποδειχθεί ότι:  
α) Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι περί τα τρίγωνα ΑΖΕ, ΒΔΖ και ΓΕΔ είναι ίσοι.  
β) Οι τρεις παραπάνω κύκλοι του ερωτήματος (α) διέρχονται από το κέντρο Ο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.
10. Δύο κύκλοι με κέντρα Ο και Ο' τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από το Α γράφουμε τυχαία ευθεία που κόβει τον κύκλο Ο στο Γ και τον Ο' στο Δ. Από το Β γράφουμε άλλη τυχαία ευθεία που κόβει τον κύκλο Ο στο Ε και τον Ο' στο Ζ. Να αποδείξετε ότι  $EG \parallel Z\Delta$ .
11. Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει  $A = 90^\circ$  και  $B = 30^\circ$ , το ΑΗ ύψος και την ΑΜ διάμεσο. Από το σημείο Β φέρνουμε τη ΒΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΜ. Να αποδειχθεί ότι:  
α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΗ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.  
β)  $BE = EH = AH$

### ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ

*Με τη χρήση αβαθμολόγητου χάρακα και διαβήτη*

1. Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα, να κατασκευασθεί το ευθύγραμμο τμήμα  $x$  σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- α)  $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$   
 β)  $x = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$   
 γ)  $x = \sqrt{\alpha\beta}$   
 δ)  $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$



2. Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι  $(O, \rho)$  και  $(K, \rho)$  και τόξο  $AB$  του  $(O, \rho)$ . Να κατασκευασθεί τόξο  $MN$  του  $(K, \rho)$  ώστε να είναι  $MN = \frac{1}{2} AB$ .
3. Να χωριστεί μια γωνία σε τέσσερις ίσες γωνίες.
4. Δίνονται τα ευθύγραμμα τμήματα  $\kappa, \lambda$  και η γωνία  $\omega$ . Να κατασκευασθεί τρίγωνο  $AB\Gamma$  με δοσμένα:  $AB = \kappa, A\Gamma = \lambda$  και  $A = \omega$ .
5. Να κατασκευασθεί τρίγωνο  $AB\Gamma$  αν γνωρίζουμε:
- α) Την πλευρά  $a$ , τη γωνία  $B$  και τη διάμεσο  $\mu_\gamma$ .
  - β) Τις πλευρές  $\beta, \gamma$  και το ύψος  $u_a$ .
  - γ) Τις πλευρές  $a, \gamma$  και τη διάμεσο  $\mu_a$ .
- Να γίνει διερεύνηση.
6. Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  που θα έχει υποτείνουσα  $B\Gamma = \kappa$  και ύψος  $A\Delta = \lambda$ , όπου  $\kappa$  και  $\lambda$  δοθέντα ευθύγραμμα τμήματα. Να γίνει διερεύνηση.

## ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

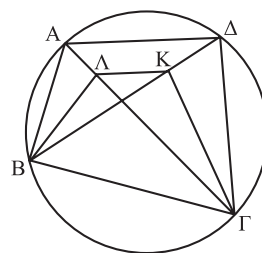
### Ερωτήσεις σύντομης απάντησης

Μπορούν να θεωρηθούν όλες όσες περιλαμβάνονται στο Σχολικό βιβλίο Γεωμετρίας, έκδοσης 1998, στις σελίδες 103, 150, 151.

### Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Γράφουμε δύο χορδές κύκλου, τις  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  που τέμνονται στο  $E$ . Οι εφαπτόμενες ευθείες του κύκλου στα σημεία  $A$  και  $\Gamma$  τέμνονται στο  $Z$  και οι εφαπτόμενες στα  $B$  και  $\Delta$  τέμνονται στο  $H$ .
  - α) Να αποδείξετε ότι:  $AZ\Gamma + BH\Delta = 2AE\Delta$ .
  - β) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\Gamma EB$ , όταν είναι εγγράψιμο το τετράπλευρο, που έχει κορυφές τα σημεία  $Z, H$ , το σημείο τομής των εφαπτομένων  $Z\Gamma$  και  $H\Delta$  και το σημείο τομής των  $ZA$  και  $H\Delta$ .
2. Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $AB = A\Gamma$ . Αν η κάθετη ευθεία από το σημείο  $B$  προς την  $A\Delta$  τέμνει τη  $\Gamma\Delta$  στο σημείο  $E$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\Delta BE$  είναι ισοσκελές.
3. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Φέρνουμε το ύψος του  $A\Delta$  και από την κορυφή  $B$  ευθεία κάθετη στη διχοτόμο  $Ax$  της  $A$  που τέμνει την  $Ax$  στο  $E$  και την  $A\Gamma$  στο  $Z$ . Αν  $M$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$  και  $H$  η προβολή του  $\Gamma$  στην  $Ax$  να αποδείξετε ότι:
  - α) Το τρίγωνο  $ABZ$  είναι ισοσκελές.
  - β)  $EM \parallel A\Gamma$ .
  - γ) Το τετράπλευρο  $A\Delta H\Gamma$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο.
  - δ) Το τετράπλευρο  $\Delta EMH$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

4. Σε εγγεγραμμένο τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $\Delta\Gamma\Lambda$  τέμνει τη διαγώνιο  $B\Delta$  στο  $K$ , ενώ η διχοτόμος της γωνίας  $AB\Delta$  τέμνει τη διαγώνιο  $A\Gamma$  στο  $\Lambda$ . Να αποδείξετε ότι:



α) Το τετράπλευρο  $K\Lambda B\Gamma$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

β) Οι  $K\Lambda$  και  $A\Delta$  είναι παράλληλες.

(Δόθηκε σε διαγωνισμό *ΕΜΕ - Απρίλιος 1997*).

5. Σ' ένα κύκλο είναι εγγεγραμμένο ένα πεντάγωνο  $AB\Gamma\Delta E$ , τέτοιο ώστε η  $AB$  να είναι παράλληλη προς τη  $\Delta E$  και η  $AE$  προς τη  $B\Gamma$ . Δείξτε ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο  $A$  είναι παράλληλη προς τη  $\Gamma\Delta$ .

(Δόθηκε σε διαγωνισμό *ΕΜΕ - Θαλής 1996*).

6. Δίνονται δύο ορθογώνια τρίγωνα που είναι όμοια. Αποδείξτε ότι το γινόμενο των υποτεινουσών είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομολόγων κάθετων πλευρών τους.

7. Δίνεται κύκλος  $(O, R)$ . Γράφουμε μια διάμετρό του  $EZ$  και παίρνουμε δύο σημεία  $A, B$  πάνω σ' αυτή συμμετρικά ως προς το κέντρο  $O$ , έτσι ώστε  $AB = R\sqrt{2}$ . Αν  $\Gamma\Delta$  είναι χορδή του κύκλου που περνά από το  $B$  και είναι κάθετη στην  $EZ$ , να αποδείξετε ότι:  $A\Gamma^2 + A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 = 7R^2$ .

8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με  $B = 2\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:  $\frac{A\Gamma^2}{AB^2} = 3$ .

9. Δίνονται τρεις κύκλοι ώστε να είναι εγγεγραμμένοι στην ίδια γωνία και ο μεσαίος να εφάπτεται των δύο άλλων. Αποδείξτε ότι η ακτίνα του μεσαίου κύκλου είναι μέση ανάλογη των ακτίνων των δύο άλλων.

ή αλλιώς:

Τρεις κύκλοι  $(O, \rho_1)$ ,  $(K, \rho_2)$ ,  $(\Lambda, \rho_3)$  εφάπτονται εξωτερικά ανά δυο και τα κέντρα τους βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Αν είναι  $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$  να αποδείξετε ότι:  $\rho_2^2 = \rho_1\rho_3$ .

10. Δίνεται κύκλος  $(O, \rho)$ , μια διάμετρος  $B\Gamma$  αυτού και μια χορδή του  $A\Delta$  παράλληλη στη  $B\Gamma$ . Αν η απόσταση των  $B\Gamma$  και  $A\Delta$  είναι  $\frac{R}{2}$ , να υπολογισθούν συναρτήσει του  $R$  οι πλευρές του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

11. Δίνεται η εφαπτομένη  $\epsilon$  σ' ένα σημείο  $A$  ενός κύκλου. Αν μια ευθεία  $\epsilon'$  τέμνει τον κύκλο

στα σημεία  $B, \Gamma$  και την ευθεία  $\epsilon$  στο σημείο  $M$ , να αποδείξετε ότι:  $\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{MB}{M\Gamma}$ .

12. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ). Με διάμετρο την  $A\Gamma$  γράφουμε κύκλο που τέμνει την υποτεινούσα  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία του κύκλου στο σημείο  $\Delta$  διέρχεται από το μέσον της  $AB$ .

13. Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο ( $A = 90^\circ$ ) εγγράφουμε ένα τετράγωνο, ώστε η μια πλευρά του τετραγώνου να βρίσκεται πάνω στην υποτείνουσα ΒΓ. Αν Ο είναι το κέντρο του τετραγώνου, να αποδείξετε ότι η ΑΟ διχοτομεί την ορθή γωνία Α.
14. Σε κύκλο κέντρου Ο γράφουμε την επίκεντρη γωνία ΑΟΒ, φέρνουμε τη διχοτόμο ΟΓ αυτής και στην ΟΓ χορδή κάθετη που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Ζ και Η. Αν η ΖΗ τέμνει την ΟΑ στο Δ και την ΟΒ στο Ε, να δείξετε ότι:
- α)  $Z\Delta = EH$  και
  - β)  $A\Delta = BE$
15. Από σημείο Γ εκτός κύκλου κέντρου Ο γράφουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΓΑ και ΓΒ. Φέρνουμε τη διάμετρο ΑΔ και στην προέκταση του ΑΓ προς το μέρος του σημείου Γ παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΓΕ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:
- α) Η γωνία ΑΒΕ είναι ορθή.
  - β) Τα σημεία Δ, Β, Ε είναι συνευθειακά.
16. Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους λ κινείται, έτσι ώστε τα άκρα του να βρίσκονται σε δύο κάθετους άξονες Οx, Οy. Σχηματίζουμε το ορθογώνιο ΒΟΑΓ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Γ.
17. Δίνεται μια ευθεία xy και ένα σημείο Α αυτής. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι εφάπτονται της xy στο σημείο Α.
18. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι είναι ίσοι και εφάπτονται σε δοσμένο κύκλο.
19. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι διέρχονται από σταθερό σημείο Α και έχουν δοσμένη ακτίνα.
20. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο, ο οποίος εφάπτεται μιας δοσμένης ευθείας xy σ' ένα σημείο Α. Δίνεται ακόμα ένα άλλο σημείο Β της xy. Να γραφεί κύκλος, ο οποίος να εφάπτεται στην ευθεία xy στο σημείο Β και στον κύκλο κέντρου Ο.



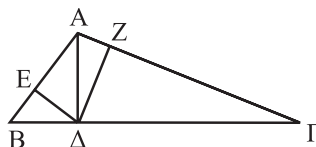
**ΣΧΕΔΙΑ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ  
ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

Διδακτική ενότητα: Πυθαγόρειο Θεώρημα

ΘΕΜΑ 1ο

A. (1,5 μονάδες)

Αν στο διπλανό σχήμα το  $AD$  είναι ύψος του τυχαίου τριγώνου  $AB\Gamma$  και  $DE \perp AB$ ,  $DZ \perp AG$ , να αντιστοιχήσετε κάθε σχέση της στήλης Α μ' ένα τρίγωνο της στήλης Β, στο οποίο ισχύει:

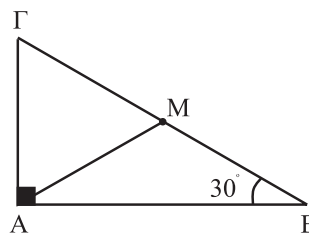


στήλη (A) σχέσεις	στήλη (B) τρίγωνα
$\Delta E^2 = A\Delta^2 - AE^2$	$A\Delta\Gamma$
$A\Delta^2 = A\Gamma \cdot AZ$	$A\Delta Z$
$\Delta E^2 = EA \cdot EB$	$AE\Delta$
	$\Delta Z\Gamma$
	$A\Delta B$

B. (1,5 μονάδες)

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει  $A = 90^\circ$ ,  $B = 30^\circ$  και την  $AM$  διάμεσο. Να γράψετε σε μια σειρά, από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο, τα ευθύγραμμα τμήματα:

$AB$ ,  $A\Gamma$ ,  $B\Gamma$ ,  $\frac{AM}{2}$ .



Γ. (2 μονάδες)

α) Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές ίσες με 6 cm και 8 cm. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει ίση περίμετρο με αυτό το ορθογώνιο τρίγωνο. Το μήκος της πλευράς του ισοπλευρού τριγώνου είναι σε cm ίσο με:

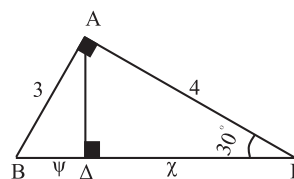
A. 6      B. 7      Γ. 9      Δ. 8      E. 10

β) Αν η διαγώνιος ενός τετραγώνου έχει μήκος  $2\sqrt{2}$  cm, τότε το μήκος της πλευράς του είναι σε cm ίσο με:

A.  $\sqrt{2}$       B. 2      Γ.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       Δ. 4      E.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

γ) Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει  $A = 90^\circ$  και το  $AD$  είναι ύψος του. Από τις παρακάτω σχέσεις σωστή είναι:

A.  $\frac{y}{x} = \frac{3}{4}$       B.  $\frac{y}{x} = \frac{4}{3}$       Γ.  $\frac{y}{x} = \frac{16}{9}$



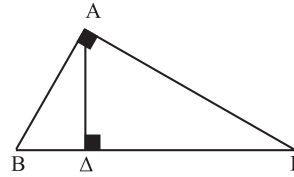
$$\Delta. \frac{y}{x} = \frac{9}{16} \quad \text{E.} \frac{y}{x} = \frac{25}{16}$$

δ) Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει  $A = 90^\circ$  και το  $A\Delta$  είναι ύψος του. Από τις παρακάτω σχέσεις σωστή είναι:

**A.**  $A\Delta^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$     **B.**  $A\Delta^2 = \Delta\Gamma \cdot B\Gamma$

**Γ.**  $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$     **Δ.**  $A\Delta^2 = AB \cdot A\Gamma$

**E.**  $\frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$



### ΘΕΜΑ 2ο

Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) είναι  $AB = 6$  cm και  $A\Gamma = 8$  cm. Από το μέσο  $M$  της  $A\Gamma$  φέρνουμε την  $ME \perp B\Gamma$ . Να υπολογιστούν:

α) Η διάμεσος  $BM$  του τριγώνου (3 μονάδες)

β) Η διαφορά  $EB^2 - E\Gamma^2$  (4 μονάδες)

### ΘΕΜΑ 3ο

Στο τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  η διαγώνιος  $B\Delta$  είναι κάθετη στην πλευρά  $A\Delta$  και η πλευρά  $\Gamma B$  κάθετη στην  $AB$ . Αν  $\Delta AB = 60^\circ$  και  $A\Delta = \lambda$ , να υπολογιστούν συναρτήσει του  $\lambda$ :

α) Η πλευρά  $AB$  (4 μονάδες)

β) Η διαγώνιος  $A\Gamma$  (4 μονάδες)

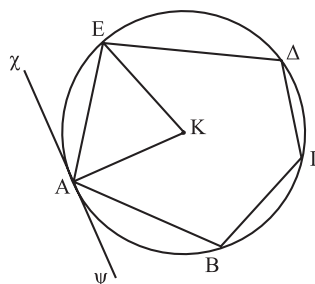


**2ο ΣΧΕΔΙΟ**

**Διδακτική ενότητα: Εγγεγραμμένες γωνίες -  
γωνία χορδής και εφαπτομένης**

**ΘΕΜΑ 1ο**

Με βάση το διπλανό σχήμα όπου Κ είναι το κέντρο του κύκλου και χγ εφαπτομένη του απαντήστε στα παρακάτω:



**Α. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής (2 μονάδες)**

α) Η γωνία ΒΓΕ ισούται με:

**Α. ΒΑΚ    Β. ΚΑΕ    Γ. ΕΑχ**

**Δ. γΑΒ    Ε.  $\frac{ΒΚΕ}{2}$**

β) Η γωνία ΒΑΕ έχει παραπληρωματική την:

**Α. ΕΔΓ    Β. ΕΚΑ    Γ. ΕΔΑ    Δ. ΕΔΒ    Ε. ΕΚΒ**

γ) Η γωνία ΒΔΕ ισούται με:

**Α. χΑΕ    Β. ΕΑΚ    Γ. ΚΑΒΔ, ΒΑγ    Ε. ΒΓΕ**

δ) Από τις παρακάτω σχέσεις, που αναφέρονται σε γωνίες του σχήματος, σωστή είναι η σχέση:

**Α. ΒΓΔ = ΒΔΕ                    Β. χΑΕ = ΑΚΕ                    Γ. ΒΓΕ + ΒΑΕ = 360°**  
**Δ. ΑΕΔ + ΒΓΔ = 180°            Ε. χΑΕ = ΑΒΕ**

**B. Ερώτηση αντιστοίχισης (3 μονάδες)**

Αντιστοιχίστε κάθε γωνία της στήλης Α με την ίση της που βρίσκεται στη στήλη Β.

στήλη Α	στήλη Β
ΒΓΕ	ΑΔΕ
ΕΑ <sub>χ</sub>	$\frac{\Delta ΕΚ}{2}$
ΒΑ <sub>γ</sub>	ΕΚΑ
	ΒΔΕ
	ΑΓΒ

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Γράφουμε τον περιγεγραμμένο του κύκλο, το ύψος του ΑΕ, τη διάμετρο ΑΔ και τη διχοτόμο ΑΖ της γωνίας ΔΑΕ. Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΓ είναι όμοια (4 μονάδες)  
β) Η ΑΖ διχοτομεί τη ΒΑΓ (3 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δύο κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) τέμνονται στα Α, Β. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ του (Κ, R) και έστω Γ, Δ τα σημεία τομής των ΜΑ, ΜΒ αντίστοιχα με τον κύκλο (Λ, ρ).

- α) Αποδείξτε ότι η ΓΔ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη (ε) στο σημείο Μ (4 μονάδες)  
β) Αποδείξτε ότι η ΜΚ είναι κάθετη στη ΓΔ (4 μονάδες)

## Διδακτική ενότητα: Εγγράψιμο - περιγράψιμο τετράπλευρα

## ΘΕΜΑ 1ο

## Α. (2,5 μονάδες)

Δίνονται οι προτάσεις  $p$  και  $q$  ως εξής:

$p$ : Το τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  είναι ορθογώνιο

$q$ : Το τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο

Να κυκλώσετε το κατάλληλο γράμμα ( $\Sigma$  ή  $\Lambda$ ) στις παρακάτω προτάσεις:

- |   |          |           |
|---|----------|-----------|
| α) Αν ισχύει η $p$ , τότε ισχύει και η $q$  | $\Sigma$ | $\Lambda$ |
| β) Αν ισχύει η $q$ , τότε ισχύει και η $p$  | $\Sigma$ | $\Lambda$ |
| γ) Αν ισχύει η $p$ , τότε ισχύει και η $q$ και συγχρόνως<br>αν ισχύει η $q$ , τότε ισχύει και η $p$ | $\Sigma$ | $\Lambda$ |
| δ) Αν ένα τετράπλευρο δεν είναι ορθογώνιο, τότε<br>δεν μπορεί να είναι εγγράψιμο σε κύκλο           | $\Sigma$ | $\Lambda$ |
| ε) Αν ένα τετράπλευρο δεν είναι ορθογώνιο, τότε<br>είναι οπωσδήποτε εγγράψιμο σε κύκλο              | $\Sigma$ | $\Lambda$ |

## Β. (2,5 μονάδες)

α) Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν:

Α. Οι διαδοχικές γωνίες του είναι συμπληρωματικές

Β. Οι απέναντι γωνίες του είναι συμπληρωματικές

Γ. Οι διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές

Δ. Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές

Ε. Δύο απέναντι γωνίες του είναι ίσες

β) Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο αν:

Α. Μια γωνία του είναι ίση με την απέναντι εξωτερική

Β. Οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα

Γ. Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες

Δ. Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες

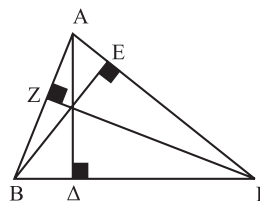
Ε. Το άθροισμα των δύο απέναντι πλευρών του είναι ίσο με το άθροισμα των δύο άλλων απέναντι πλευρών του

γ) Το τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο και έχει  $\angle A - \angle \Gamma = 80^\circ$ . Η γωνία  $A$  ισούται σε μοίρες με:

- Α.  $90^\circ$       Β.  $100^\circ$       Γ.  $110^\circ$       Δ.  $120^\circ$       Ε.  $130^\circ$

δ) Στο διπλανό σχήμα τα  $ΑΔ$ ,  $ΒΕ$ ,  $ΓΖ$  είναι ύψη του τριγώνου  $ΑΒΓ$ . Γράφουμε και την  $ΔΕ$ . Το πλήθος των εμφανιζομένων στο σχήμα εγγράψιμων τετραπλεύρων είναι:

- Α. 3      Β. 4      Γ. 5      Δ. 6      Ε. 7



- ε) Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι περιγράψιμο σε κύκλο και έχει  $AB + \Gamma\Delta = 12$  cm. Η περίμετρος του  $AB\Gamma\Delta$  είναι σε cm:
- A. 16      B. 18      Γ. 20      Δ. 22      E. 24

**ΘΕΜΑ 2ο**

Στο τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  οι διαγώνιοί του τέμνονται στο σημείο P και ισχύει  $(PA) (P\Gamma) = (PB) (P\Delta)$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα  $PAB$  και  $P\Gamma\Delta$  είναι όμοια (2 μονάδες)  
β) Η γωνία  $AB\Delta$  είναι ίση με τη γωνία  $A\Gamma\Delta$  (3 μονάδες)  
γ) Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο (3 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 3ο**

Στο οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  γράφουμε το ύψος του  $A\Delta$ . Από τυχαίο σημείο  $\Sigma$  του  $A\Delta$  φέρνουμε μια ευθεία κάθετη στην  $AB$  που τέμνει την  $AB$  στο  $E$  και μια άλλη ευθεία κάθετη στην  $A\Gamma$  που τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $AB\Gamma = A\Sigma E$  (2,5 μονάδες)  
β) Υπάρχουν δύο εγγράψιμα τετράπλευρα που έχουν κοινή χορδή το  $\Sigma\Delta$  (2 μονάδες)  
γ) Το  $B\Gamma Z E$  είναι εγγράψιμο σε κύκλο (2,5 μονάδες)