Οι γνωστές – άγνωστες κωνικές τομές

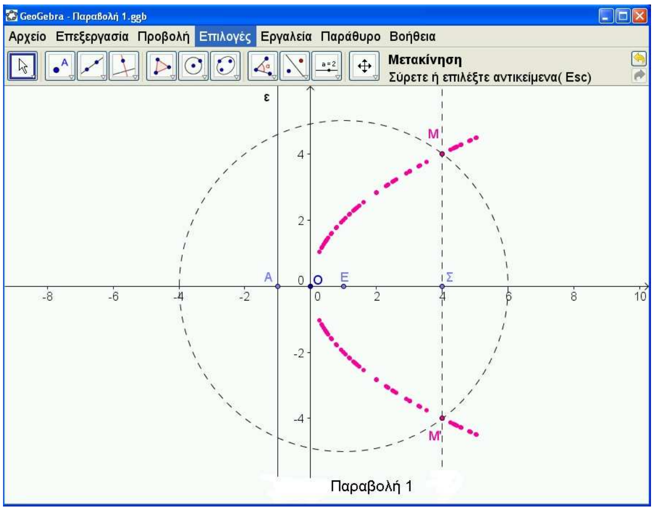
Μιχαήλ Τζούμας
Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών
Ιωσήφ Ρωγών και Βεΐκου
302 00 Μεσολόγγι
mtzoumas@sch.gr

Περίληψη

Οι κωνικές τομές (κ.τ.) και ειδικότερα η Παραβολή, η Έλλειψη και η Υπερβολή εμφανίστηκαν στα μαθηματικά από την αρχαιότητα και κατά καιρούς μελετήθηκαν τόσο με γεωμετρικά, όσο και με αλγεβρικά μέσα. Όμως, ένα πλήθος των ιδιοτήτων αυτών αποτελούν προβλήματα της στοιχειώδους Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Ε.Γ.) και επομένως μπορούν να μελετηθούν, πλέον, χρησιμοποιώντας μόνον αυτή, με τη βοήθεια πλήθους λογισμικών της σύγχρονης τεχνολογίας. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε και μελετάμε μερικές από τις ιδιότητες αυτές.

1. Εισαγωγή. Τα τελευταία 30 χρόνια οι κ.τ. (Παραβολή, Έλλειψη και Υπερβολή) είναι τμήμα της διδασκόμενης ύλης των Μαθηματικών στο Λύκειο. Άλλοτε είναι μέρος της εξεταζόμενης Πανελλαδικά ύλης και άλλοτε όχι. Έτσι, κάποιες φορές, έχουν σημαντική θέση στην προσοχή και την προσπάθεια των μαθητών (και των καθηγητών) και κάποιες όχι. Θα πρέπει να δεχτούμε ότι ο ρόλος και ο σκοπός των κ.τ. στα Μαθηματικά του Λυκείου δεν είναι αυτοσκοπός, δηλαδή δε διδάσκονται με στόχο την αυτή καθαυτή γνώση των κ.τ., αλλά ως εργαλείο για να γνωρίσουν οι μαθητές την Αναλυτική Γεωμετρία. Έτσι, διδάσκονται αποκλειστικά με τους ορισμούς και τους κανόνες της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Όμως και να ήθελε κάποιος να διδάξει τις κ.τ. με τους κανόνες της Ε.Γ. μάλλον θα δυσκολευόταν, αφού τα σχήματα, πράγμα αναγκαίο και αναπόφευκτο για τη Γεωμετρία, είναι εξαιρετικά δύσκολο να αποτυπωθούν με τον κανόνα και το διαβήτη (αποκλειστικά(?) εργαλεία για τη διδασκαλία) στον πίνακα της τάξης.

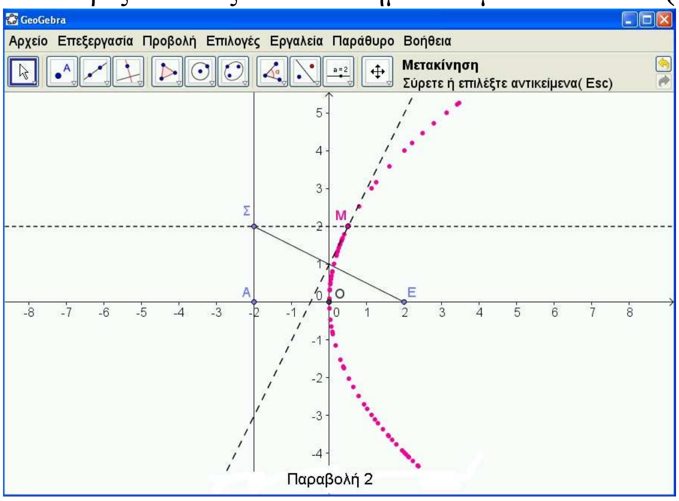
Οι κ.τ., όμως, έχουν μια ιστορία δυόμισι χιλιάδων χρόνων (μεγάλο μέρος της ιστορικής διαδρομής αυτών μπορεί να βρει κάποιος στη μεταπτυχιακή εργασία του Δ. Μπουνάκη [1]) και αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της ιστορίας μας και του πολιτισμού μας, οπότε μάλλον αδικούνται από τη μελέτη τους μόνο με Αναλυτική Γεωμετρία. Εξάλλου είναι γνωστό στη διδακτική ότι η κατανόηση των εννοιών επιτυγχάνεται από τις πολλαπλές αναπαραστάσεις. Το τελευταίο σημαίνει ότι, αν στους στόχους μας είναι και η κατανόηση των κ.τ. αυτών καθαυτών, τότε αναπόφευκτα θα πρέπει να διδάσκονται **και** γεωμετρικά. Το μεγάλο εμπόδιο της δυσκολίας της αποτύπωσης των παραπάνω κ.τ. στον πίνακα μπορεί να υπερνικηθεί με τη χρήση της σύγχρονης τεχνολογίας. Υπάρχουν σήμερα πολλά λογισμικά με καταπληκτικές δυνατότητες σχεδίασης και είναι στις βιβλιοθήκες όλων των Σχολείων της χώρας μας, περιμένοντας να τα χρησιμοποιήσουμε. Ενδεικτικά



Παραβολή 1

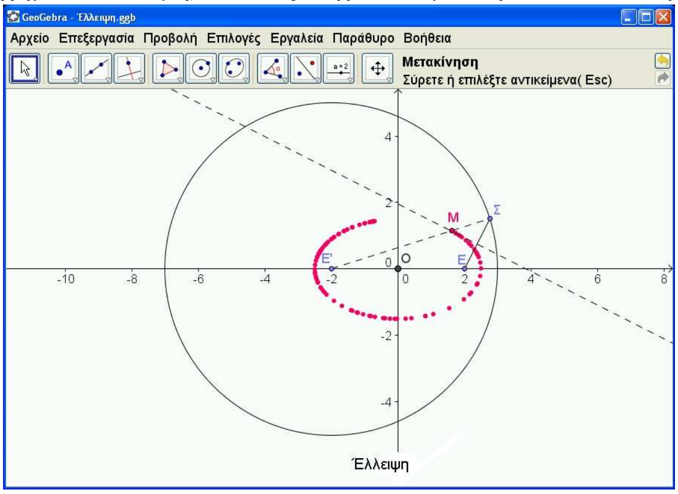
αναφέρουμε το Geogebra (ελεύθερο λογισμικό), το Cabri, το Sketchpad κ.α.

Ειδικότερα, στο βιβλίο της Β′ Λυκείου [2] προτείνεται ως κατασκευή του σημείου Μ (και Μ′) της παραβολής, η τομή της κάθετης ευθείας στον οριζόντιο άξονα στο σημείο Σ με τον κύκλο (Ε, ΑΣ). Καθώς το Σ κινείται στον οριζόντιο άξονα, τα σημεία τομής γράφουν την Παραβολή (σχήμα Παραβολή 1). Στην παράγραφο <u>2.</u> προτείνουμε την κατασκευή αυτή ως τομή της κάθετης ευθείας στη διευθετούσα στο σημείο Σ, με τη μεσοκάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΣΕ, όπου Ε είναι η εστία



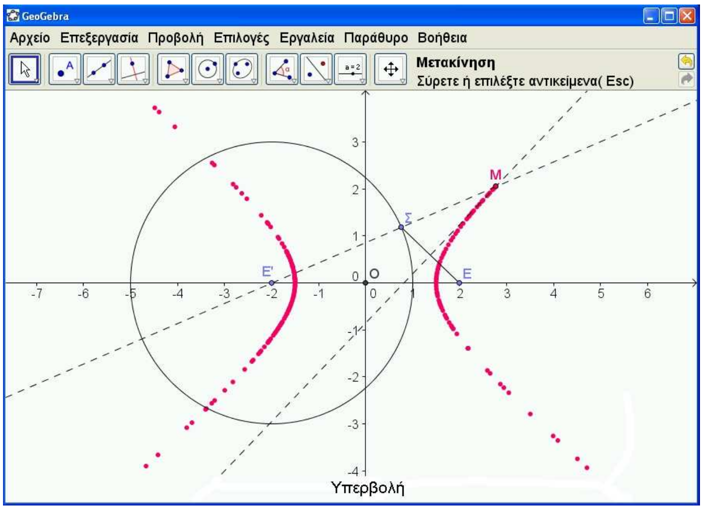
Παραβολή 2

της παραβολής. Καθώς το Σ κινείται στην διευθετούσα, το σημείο Μ γράφει την παραβολή (σχήμα Παραβολή 2). Σχετικά με την Έλλειψη το βιβλίο [2] προτείνει έναν μηχανικό τρόπο κατασκευής (του σχοινιού μήκους $2a$). Στην παράγραφο <u>3.</u> προτείνουμε το τυχαίο σημείο Μ της Έλλειψης να προκύπτει από την τομή της ακτίνας Ε′Σ του κύκλου (Ε′, $2a$) και της μεσοκάθετης στην ΕΣ. Καθώς το σημείο Σ διαγράφει τον κύκλο (Ε′, $2a$), το Μ γράφει την Έλλειψη (σχήμα Έλλειψη). Τέλος, σχετικά με την κατασκευή της Υπερβολής τίποτε δεν προτείνεται στο σχολικό βιβλίο [2]. Στην παράγραφο 4. προτείνουμε το τυχαίο σημείο Μ της Υπερβολής να προκύπτει από την τομή της προέκτασης της ακτίνας Ε′Σ του κύκλου (Ε′, $2a$) και της μεσοκάθετης στην ΕΣ. Καθώς το σημείο Σ διαγράφει τον κύκλο (Ε′, $2a$), το Μ γράφει την Υπερβολή (σχήμα Υπερβολή).



Έλλειψη

Βάση των παραπάνω προτάσεων, ο δυναμικός τρόπος κατασκευής των κ. τ. κινεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια αλλά και εξάπτει τη φαντασία των μαθητών. Οι μαθητές αποκτούν εποπτεία των εννοιών και μπορούν πλέον να παρατηρήσουν, να εικάσουν, να προβληματιστούν και τέλος να αποδείξουν, με τις γνώσεις τους από τη στοιχειώδη **Ευκλείδεια Γεωμετρία** που διδάσκονται αυτοί στις δυο τάξεις του Λυκείου, ορισμένες από τις ιδιότητες της Παραβολής, της Έλλειψης και της Υπερβολής.

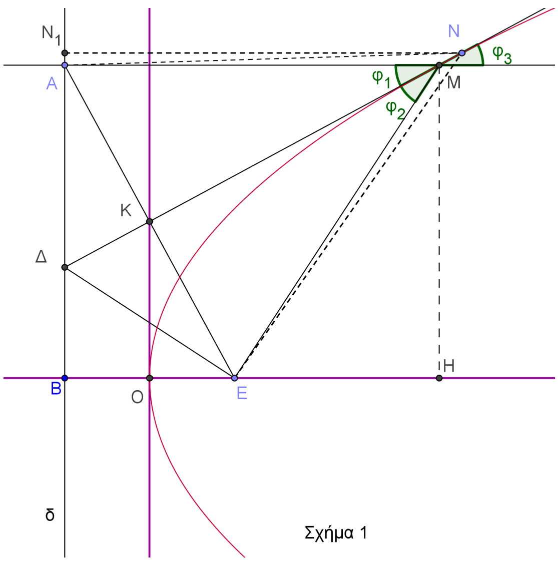


Υπερβολή

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να δειχτεί ότι ένα μέρος των ιδιοτήτων των κ.τ., μπορούν να διδαχτούν **και** με την **Ευκλείδεια Γεωμετρία**, με τη χρήση της σύγχρονης τεχνολογίας. Παράλληλα, να δείξει ότι η χρήση της είναι σύμμαχος και βοηθός του εκπαιδευτικού στο έργο του. Ό,τι αναφερθεί θα είναι από το σχολικό βιβλίο της Β′ Λυκείου [2], πλην ελάχιστων θεμάτων, ό,τι χρησιμοποιηθεί θα είναι, επίσης, από το σχολικό βιβλίο της Ε.Γ. της Α′ και Β′ Λυκείου [3]. Για το σκοπό αυτό, στη συνέχεια όταν θα λέμε (ή θα εννοείται) ότι «δίνεται η παραβολή», θα εννοούμε ότι δίνεται συγχρόνως και η διευθετούσα και η εστία της. Επίσης, όταν θα λέμε ότι «δίνεται η έλλειψη ή η υπερβολή», θα εννοούμε ότι δίνονται συγχρόνως οι εστίες τους και το α (δηλαδή το άθροισμα ή η διαφορά, αντίστοιχα, των αποστάσεων τυχόντος σημείου τους από τις εστίες τους).

2. Η Παραβολή

Ορισμός 2.1 [2]: Έστω μια ευθεία δ και ένα σημείο Ε εκτός αυτής. Ονομάζεται **παραβολή** με **εστία** το σημείο Ε και **διευθετούσα** την ευθεία δ ο γεωμετρικός τόπος (γ.τ.) C των σημείων του επιπέδου, τα οποία ισαπέχουν από το Ε και τη δ



Σχήμα 1

Για να βρούμε ένα σημείο Μ της παραβολής, παίρνουμε ένα σημείο Α στη διευθετούσα δ και φέρουμε κάθετη σ’ αυτή. Έστω Μ η τομή της καθέτου αυτής με τη μεσοκάθετη στο τμήμα ΑΕ στο μέσον Κ. Προφανώς το Μ είναι σημείο του γ.τ., αφού ΜΕ=ΜΑ. Η κάθετη από το Ε στη δ προσδιορίζει το Β και είναι ο οριζόντιος άξονας x′x, ενώ η μεσοκάθετη στη ΒΕ είναι ο κατακόρυφος άξονας yy′ και η τομή τους Ο προσδιορίζει την κορυφή της παραβολής. Προφανώς το Κ ανήκει στον κατακόρυφο άξονα, αφού $OK // \delta$ και Ο μέσο της ΒΕ. Επιπλέον η ΑΕ διχοτομεί τη γωνία $O\hat{E}M$, αφού $O\hat{E}A = E\hat{A}M$ και $A\hat{E}M = E\hat{A}M$.

Το σημείο Μ είναι το μοναδικό σημείο του γ.τ. που βρίσκεται στη μεσοκάθετη του ΑΕ, οπότε αυτή (η μεσοκάθετη) είναι και η εφαπτομένη στο σημείο Μ της παραβολής. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ακόμη ένα σημείο Ν της μεσοκάθετης που βρίσκεται στην παραβολή, τότε, αφού το Ν είναι σημείο της παραβολής, ισχύει $NE=NN_1$. Επίσης, αφού το Ν ανήκει στη μεσοκάθετη, έχουμε ότι ΝΕ=ΝΑ, προκύπτει λοιπόν ότι $NA=NN_1$, δηλαδή ότι ένα πλάγιο τμήμα είναι ίσο με την απόσταση, που είναι άτοπο. Έτσι, για να φέρουμε την εφαπτομένη σ' ένα σημείο Μ της παραβολής, αρκεί να φέρουμε κάθετη από το σημείο αυτό στη διευθετούσα, να προσδιορίσουμε το σημείο Α και στη συνέχεια να φέρουμε τη μεσοκάθετη στο τμήμα ΑΕ. Επιπλέον, για να φέρουμε την εφαπτομένη από ένα σημείο Δ της διευθετούσας (ή του επιπέδου), προσδιορίζουμε το Α επί της διευθετούσας, ώστε ΔΑ=ΔΕ και τότε η μεσοκάθετη στο ΑΕ είναι η εφαπτομένη αυτής.

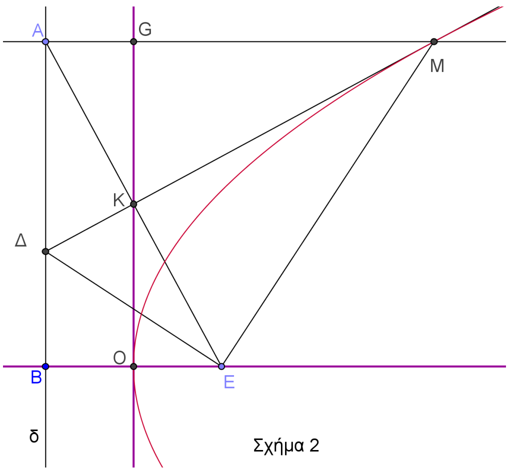
Πρόταση 2.1 (Ανακλαστική ιδιότητα). Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζει η ΜΕ και η ευθεία Mt, που είναι ομόρροπη της ΟΕ.

Απόδειξη. Στο Σχήμα 1 βλέπουμε ότι $\varphi_1= \varphi_2$ (ως κατακορυφήν). Επίσης, $\varphi_1= \varphi_3$ (από τη μεσοκάθετη), οπότε προκύπτει $\varphi_2= \varphi_3$. Η τελευταία ισότητα αποδεικνύει την πρόταση.

Πρόταση 2.2 (Εφαρμογή 2 σελ. 98 και Άσκηση 6, σελ. 100 [2]). Αν η εφαπτομένη της παραβολής (Σχήμα 2) στο σημείο Μ αυτής, τέμνει τη διευθετούσα στο σημείο Δ και τον άξονα yy′ στο Κ, τότε ισχύει ότι:

1. $M\widehat{E}\Delta = 90^o$
2. $EK \perp M\Delta$
3. $EK^2 = KM \cdot K\Delta$

Απόδειξη. Από την κατασκευή της εφαπτόμενης και τη συμμετρία ως προς ΔΜ (Σχήμα 2) προκύπτει ότι το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ορθογώνιο και το ΕΚ είναι το ύψος του.

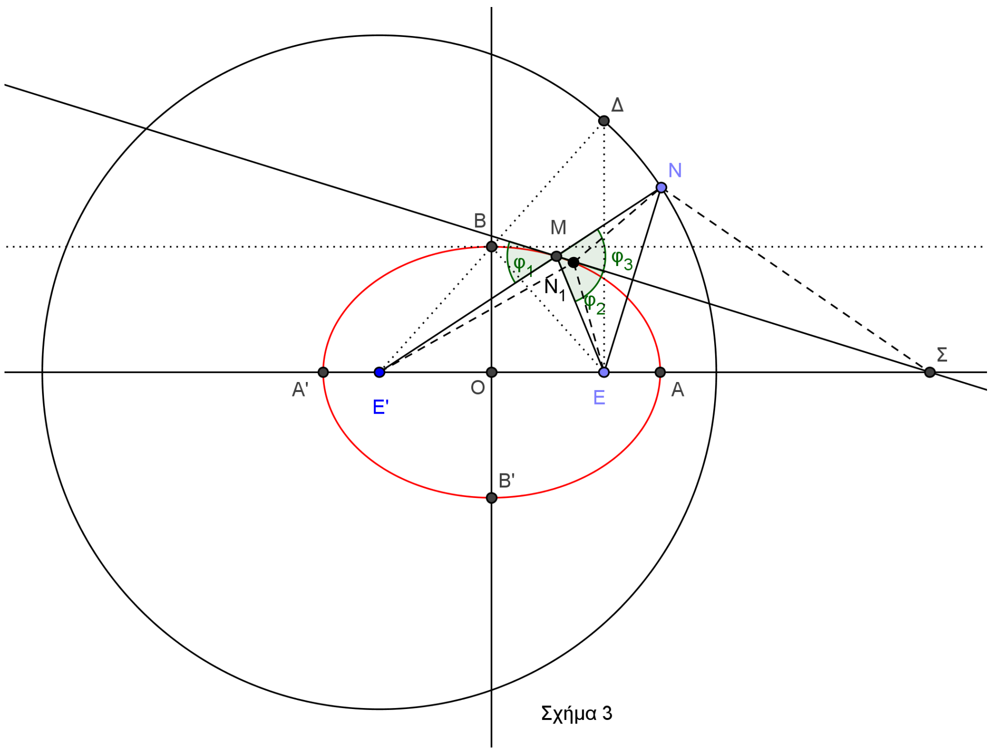


Σχήμα 2

<u>3. Η Έλλειψη.</u>

Ορισμός 3.1. Έστω Ε′ και Ε δυο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται έλλειψη, με εστίες τα σημεία Ε′ και Ε, ο γ.τ. C των σημείων του επιπέδου, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα Ε′ και Ε είναι σταθερό ($=2\cdot\alpha$) και μεγαλύτερο του Ε′Ε ($=2\cdot\gamma$)

Για να βρούμε ένα σημείο Μ της έλλειψης παίρνουμε ένα σημείο Ν στον κύκλο (Ε′, $2\cdot a$) και έστω Μ το σημείο τομής της Ε′Ν και της μεσοκάθετης στο τμήμα ΝΕ (Σχήμα 3). Προφανώς το Μ είναι σημείο του γ.τ., αφού $ME'+ME=ME'+MN=2\cdot a$. Τα Ε′ και Ε ονομάζονται εστίες της έλλειψης και η Ε′Ε εστιακή απόσταση. Το μέσον Ο του Ε′Ε ονομάζεται κέντρο της έλλειψης και η ευθεία Ε′Ε είναι ο οριζόντιος άξονας, ενώ η κάθετη στο μέσον Ο του Ε′Ε είναι ο κατακόρυφος άξονας. Το Μ είναι το μοναδικό σημείο της έλλειψης που ανήκει στη μεσοκάθετη ΕΝ. Δηλαδή, η μεσοκάθετη στο ΕΝ είναι η εφαπτόμενη στην έλλειψη. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και ακόμη ένα σημείο N_1 κοινό στην έλλειψη και τη μεσοκάθετη, διαφορετικό του Μ, τότε στο τρίγωνο Ε′N_1Ν θα ίσχυε



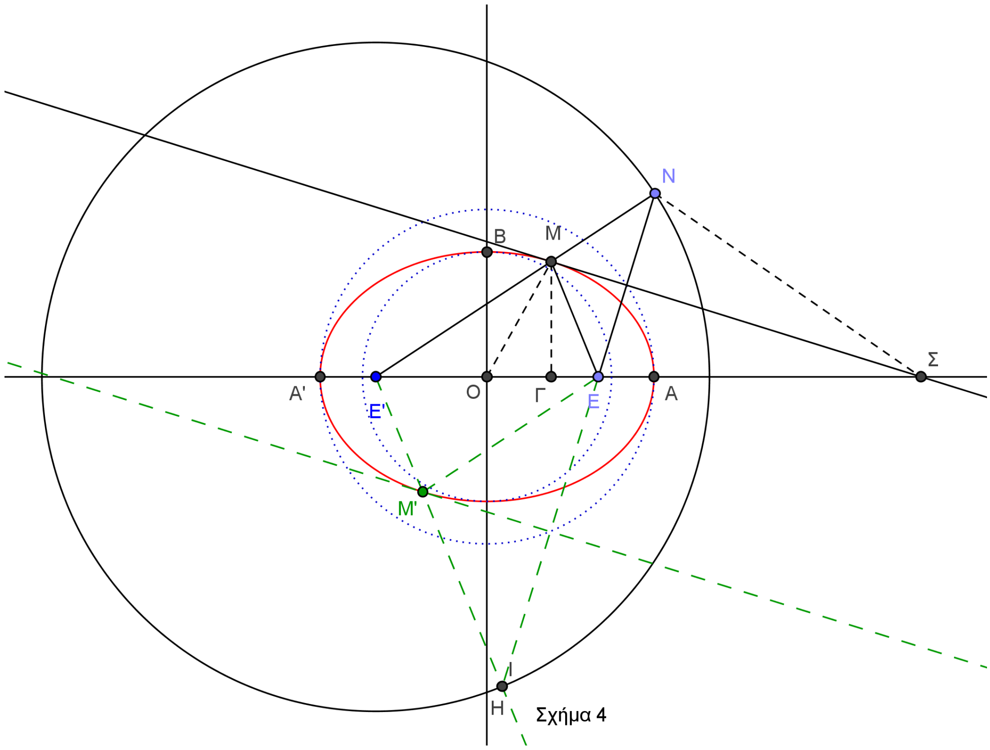
Σχήμα 3

$E'N_1+N_1N=2a=E'N$, που είναι άτοπο. Έτσι, για να φέρουμε την εφαπτομένη σ’ ένα σημείο Μ της έλλειψης, αρκεί να προσδιορίσουμε το σημείο Ν, τομή του κύκλου (Ε′, $2\cdot a$) με την Ε′Μ και να φέρουμε τη μεσοκάθετη στην ΕΝ. Επίσης, αν Σ τυχαίο σημείο του οριζόντιου άξονα (ή του επιπέδου), τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε το σημείο Ν του κύκλου (Ε′, $2\cdot a$), ώστε ΣΝ=ΣΕ και στη συνέχεια να φέρουμε την εφαπτομένη της έλλειψης, φέρνοντας τη μεσοκάθετη στην ΕΝ. Ακόμη, εύκολα μπορεί κάποιος να διαπιστώσει ότι ΟΕ=γ και ΟΑ=α.

Η κάθετη από το Ε στον οριζόντιο άξονα x′x (Σχήμα 3) προσδιορίζει επί του κύκλου το Δ. Η μεσοκάθετη στο ΕΔ προσδιορίζει το Β στον κατακόρυφο άξονα, που είναι το μέσον Β του Ε′Δ, οπότε και ΕΒ=α (διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου). Αν ορίσουμε ΟΒ=β, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΟΒ, προφανώς θα έχουμε τη γνωστή μας σχέση $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$. Το ΟΑ λέγεται οριζόντιος ημιάξονας, ενώ το τμήμα ΟΒ κατακόρυφος ημιάξονας. Τα α και β προσδιορίζουν πλήρως της έλλειψη, γι' αυτό πολλές φορές γράφουμε η έλλειψη C(α,β).

Πρόταση 3.1 (Ανακλαστική ιδιότητα σελ. 108 [2]). Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής Μ, διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζει η ΜΕ και η ΜΕ′.

Απόδειξη. Στο Σχήμα 3 η ισότητα των τριών γωνιών φ_1, φ_2 και φ_3 αποδεικνύουν την πρόταση.



Σχήμα 4

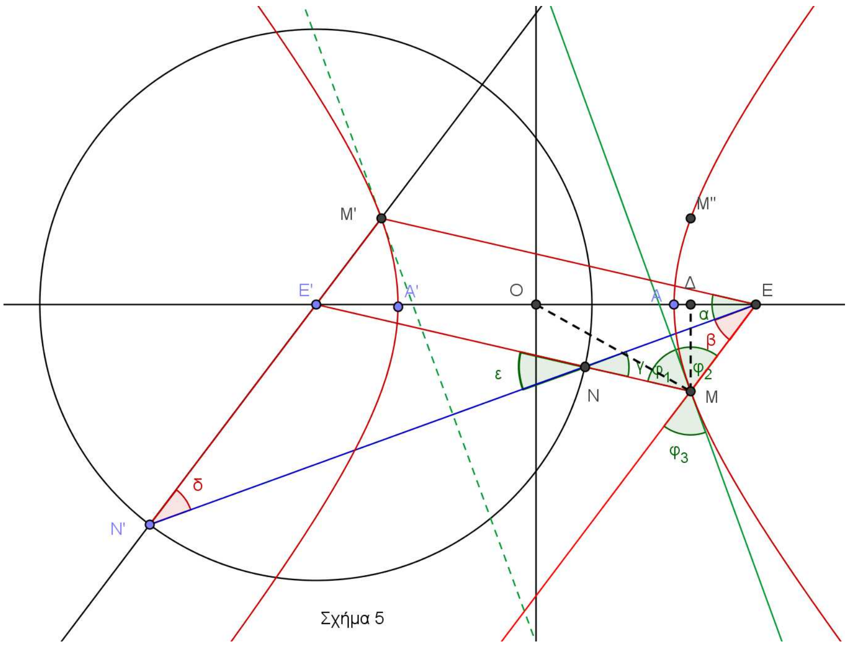
Τέλος, για τις ιδιότητες της έλλειψης (σελ 102, [2]) εφαρμόζουμε το θεώρημα των διαμέσων (Σχήμα 4) στο τρίγωνο Ε′ΜΕ (το Μ σημείο του 1^{ου} τεταρτημορίου). Θέτοντας ΜΕ=x, παίρνουμε ΜΕ′=$2\cdot a-x$, οπότε, αφού $x\in(\alpha-\gamma,\alpha)$, έχουμε

$$OM^2=x^2-2\alpha x+2a^2-\gamma^2.$$

Η διάμεσος ΟΜ φαίνεται εύκολα ότι είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του x και έτσι έχουμε ότι $\beta\le OM\le\alpha$. Επιπλέον, η προέκταση της ΝΕ (Σχήμα 4), τέμνει τον κύκλο (Ε′,2α) στο Η. Η μεσοκάθετη στο ΕΗ τέμνει την Ε′Η στο Μ′, οπότε το Μ′ είναι σημείο της έλλειψης. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΗΕ′Ν φαίνεται ότι το τετράπλευρο Ε′Μ′ΕΜ είναι παραλληλόγραμμο και συνεπώς το Ο, σημείο τομής των διαγωνίων αυτού, είναι κέντρο συμμετρίας αυτής. Η συμμετρία ως προς τον άξονα x′x είναι προφανής, ενώ η συμμετρία ως προς το κέντρο Ο και τον άξονα x′x συνεπάγεται και τη συμμετρία ως προς τον κατακόρυφο άξονα yy′. Συνεπώς, κάθε σημείο της έλλειψης βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου (Ο,ΟΒ) και στο εσωτερικό του (Ο,ΟΑ).

4. Η Υπερβολή.

Ορισμός 4.1. Έστω Ε′ και Ε δυο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται υπερβολή με εστίες τα σημεία Ε′ και Ε ο γ.τ. C των σημείων του επιπέδου, των οποίων η διαφορά των αποστάσεων από τα Ε′ και Ε είναι σταθερή ($=2\cdot\alpha$) και μικρότερη του Ε′Ε($=2\cdot\gamma$).



Σχήμα 5

Για να βρούμε ένα σημείο Μ της υπερβολής, παίρνουμε ένα σημείο Ν στον κύκλο (Ε′, $2\cdot a$) και έστω Μ το σημείο τομής της Ε′Ν και της μεσοκάθετης στο τμήμα ΝΕ (Σχήμα 5). Προφανώς το Μ είναι σημείο του τόπου, αφού $ME'-ME=ME'-MN=2\cdot a$. Τα Ε′ και Ε ονομάζονται εστίες της υπερβολής και η Ε′Ε εστιακή απόσταση. Το μέσον Ο του Ε′Ε ονομάζεται κέντρο της υπερβολής και η ευθεία Ε′Ε είναι ο οριζόντιος άξονας, ενώ η κάθετη στο μέσον Ο του Ε′Ε είναι ο κατακόρυφος άξονας αυτής. Αποδεικνύεται εύκολα, με απαγωγή σε άτοπο, όπως και στην έλλειψη, ότι το Μ είναι το μοναδικό σημείο της υπερβολής που ανήκει στη μεσοκάθετη του ΕΝ. Δηλαδή, η μεσοκάθετη στο ΕΝ είναι η εφαπτόμενη στην υπερβολή. Έτσι, για να φέρουμε την εφαπτομένη σ' ένα σημείο Μ της υπερβολής, αρκεί να προσδιορίσουμε το σημείο Ν, τομή του κύκλου (Ε′, $2\cdot a$) με την Ε′Μ και να φέρουμε τη μεσοκάθετη στην ΕΝ. Επίσης, αν Σ τυχαίο σημείο του οριζόντιου άξονα (ή του επιπέδου), τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε το σημείο Ν του κύκλου (Ε′, $2\cdot a$), ώστε ΣΝ=ΣΕ και στη συνέχεια να φέρουμε την εφαπτομένη της έλλειψης, φέρνοντας τη μεσοκάθετη στην ΕΝ.

Η προέκταση της ΕΝ, προς το μέρος του Ν (Σχήμα 5), τέμνει τον κύκλο (Ε′, $2\cdot a$) στο Ν′. Η τομή της Ν′Ε′ με τη μεσοκάθετη στο τμήμα ΕΝ′, προσδιορίζει το Μ′, το οποίο είναι επίσης σημείο της υπερβολής, αφού $M'E-M'E'=M'N'-M'E'=N'E'=2\cdot a$. Η ισότητα των γωνιών α, β, γ, δ και ε εξασφαλίζει ότι το τετράπλευρο ΕΜ′Ε′Μ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε το κέντρο Ο είναι κέντρο συμμετρίας της υπερβολής. Προφανώς ο οριζόντιος άξονας είναι άξονας συμμετρίας, οπότε (λόγω της συμμετρίας ως προς κέντρο) και ο κατακόρυφος θα είναι άξονας συμμετρίας αυτής. Στη συνέχεια, για τις ιδιότητες της υπερβολής (σελ. 116, [2]), από το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων στο τρίγωνο Ε′ΜΕ και θέτοντας Ε′Ν=2 α και ΕΕ′=2 γ, προκύπτει ότι

$$E'M^2-EM^2=2\cdot EE'\cdot O\Delta \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow a^2+a\cdot NM=\gamma\cdot O\Delta .$$

Δεδομένου όμως ότι

$$E'M+ME\geq EE' \Leftrightarrow 2\alpha+2MN\geq 2\gamma \Leftrightarrow \ NM\geq \gamma-a>0,$$

παίρνουμε ότι $a^2+a\cdot(\gamma-\alpha)\leq\gamma\cdot O\Delta \Leftrightarrow \alpha\leq O\Delta$, δηλαδή, ότι τα σημεία της υπερβολής είναι δεξιά της ευθείας της κάθετης στο Α και άρα αυτή δεν τέμνει τον κατακόρυφο άξονα. Τέλος τα σημεία Α και Α′ λέγονται κορυφές της υπερβολής και ΟΑ = α, αφού

$$OA=OE-AE=\gamma-\frac{2\gamma-2a}{2}=a .$$

Από την κατασκευή της υπερβολής, προφανώς, αν η προέκταση της ακτίνας του κύκλου Ε′Ν και η μεσοκάθετη της ΕΝ είναι παράλληλες, τότε δεν προσδιορίζεται σημείο της υπερβολής. Στην περίπτωση αυτή, η μεσοκάθετη της ΕΝ διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ονομάζεται **ασύμπτωτη.** Επί πλέον, η ΕΝ είναι εφαπτόμενη στον κύκλο $(E', 2\cdot a)$ και υπάρχουν δυο τέτοιες ασύμπτωτες που είναι μεσοκάθετες στις δυο εφαπτόμενες του κύκλου $(E', 2\cdot a)$ από το σημείο Ε.

Πρόταση 4.1 (Ανακλαστική ιδιότητα σελ. 121 [2]). Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας υπερβολής στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζει η ΜΕ′ και η προέκταση της ΜΕ.

Απόδειξη. Στο Σχήμα 5 η ισότητα των τριών γωνιών φ_1, φ_2 και φ_3 αποδεικνύει την πρόταση.

4. Επίλογος.

Στην παρούσα εργασία έγινε μια προσπάθεια να παρουσιαστούν οι κωνικές τομές, που διδάσκονται στη Β′ Λυκείου μέσα από την Ε.Γ., που επίσης διδάσκεται στο Λύκειο. Οι αποδείξεις (με τη χρήση της Ε.Γ.) είναι στα πλαίσια των δυνατοτήτων των μαθητών μας. Τέλος, ένα πλήθος από ιδιότητες αυτών θα μπορούσε κάποιος να δει στο [4].

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Δ. Μπουνάκης, «Ιστορία και μελέτη με Ευκλείδεια μέσα των Κωνικών Τομών», μεταπτυχιακή εργασία, τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης, 2004.
(http://web-server.math.uoc.gr:1080/erevna/diplomatikes/Bounakis_MDE.pdf)

2. Λ. Αδαμόπουλος, Β. Βισκαδουράκης, Δ. Γαβαλάς, Γ. Πολύζος, Α. Σβέρκος, «Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης Β′ Λυκείου», ΟΕΔΒ, 2002.

3. Η. Αργυρόπουλος, Π. Βλάμος, Κ. Κατσούλης, Σ. Μαρκάτης, Α. Σιδέρης, «Ευκλείδεια Γεωμετρία Α′ και Β′ Ενιαίου Λυκείου», ΟΕΔΒ, 2001.

4. Th. Carronet, «Exercises de Géométrie», Huitième Livre, Librairie, Vuibert, Paris, 1948.