ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ: Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΣΚΙΩΝ.

Πρακτικές και καινοτομίες στην εκπαίδευση και στην έρευνα.

Δημήτρης Θεοδωράκης
1ο ΓΕΛ Μεσολογγίου
dtheodorakis@sch.gr
Σπύρος Στίγκας
4ο ΓΕΛ Αγρινίου
sstigkas@sch.gr
Μιχάλης Τζούμας
Σχ. Συμβ. Μαθηματικών
Γρ. Σχ. Συμβ. Αχαΐας
mtzoumas@sch.gr

Περίληψη

Μία από τις πλέον καινοτόμες πρακτικές που εισήχθη τα τελευταία χρόνια στην εκπαίδευση είναι το project. Η διαδικασία αυτή προσφέρει έναν ελκυστικό τρόπο ενεργητικής μάθησης και ερευνητικής διδασκαλίας. Η Γεωμετρία και γενικότερα τα Μαθηματικά είναι ένας ιδιαίτερα ελκυστικός κλάδος, όπου θα μπορούσαν μαθητές και καθηγητές να δημιουργήσουν. Στο παρόν άρθρο γίνεται μια προσπάθεια να παρουσιαστεί ως εργαλείο για τη δημιουργία projects ένας «ξεχασμένος», από τα σχολικά μαθηματικά, κλάδος αυτής, όσο πιο απλά και κατανοητά γίνεται και να αναδειχθεί η κλασσική γεωμετρική σκέψη.

Abstract

“Project” has been one of the most innovative fieldwork witch has been introduced lately in Education. This approach offers an appealing way of active learning and an inquiring teaching process. Geometry, and Mathematics in general, has been a particularly attractive principle in which both teachers and students could be quite creative. In the present work an effort is taking place to present an almost forgotten branch of Geometry as a dynamic tool for working on “project” in a simple and understandable way giving prominence to classical geometry thinking.

1. Εισαγωγή. Η μεταφορά αντικειμένων του χώρου των τριών διαστάσεων στο επίπεδο έχει τις ρίζες της στην προϊστορική εποχή. Πλήθος εικόνων, που ζωγραφίστηκαν από τον προϊστορικό άνθρωπο στα τοιχώματα σπηλαίων έχουν βρεθεί και δεν είναι διόλου απίθανο η ιδέα αυτή, δηλαδή η μεταφορά αντικειμένων του χώρου των τριών διαστάσεων σε εκείνο των δύο, να προήλθε από τη σκιά, που αρχικά δημιουργούσαν τα αντικείμενα αποκόπτοντας τις ακτίνες του ήλιου και αργότερα της φωτιάς (καινούργια πηγή φωτός). Η μεταφορά αυτή, πρωτόγονη στην αρχή, εξελίχθηκε με την πάροδο των χρόνων σε τέχνη (Ζωγραφική) και επιστήμη (Αρχιτεκτονική). Το Γεωμετρικό κομμάτι της επιστήμης χωρίστηκε σε δύο κλάδους, την Προβολική Γεωμετρία και την Προοπτική, που ουσιαστικά είναι οι δύο όψεις του ίδιου νομίσματος. Ο ρόλος δε που έπαιξαν αυτές στον πολιτισμό μας και την εξέλιξή του ήταν σημαντικός [1 και 2].

Βασικό εργαλείο στην ιστορική τους διαδρομή υπήρξε η Γεωμετρία, επιστήμη που καλλιεργήθηκε έντονα στην Αρχαία Ελλάδα και έδωσε έναν μεγάλο αριθμό θεωρημάτων, που χρησιμοποιήθηκαν, στη συνέχεια, στην Προβολική Γεωμετρία και την Προοπτική. Θα πρέπει εδώ να αναφέρουμε τον Απολλώνιο με τα περίφημα κωνικά του [3], τον Μενέλαο με το καταπληκτικό ομώνυμο θεώρημά του, αλλά και τον Πάππο που ασχολήθηκε, τόσο με τις κωνικές, όσο και με συντρέχουσες ευθείες και συνευθειακά σημεία. Οι αρχαίοι Έλληνες ασχολήθηκαν ελάχιστα με την Προβολική Γεωμετρία και την Προοπτική, όπως πχ. ο Ευκλείδης στα «Οπτικά» του. Με αυτές ασχολήθηκαν, περί τον 16^{o} και 17^{o} μ.Χ. αιώνα, κυρίως οι Ευρωπαίοι, όπως οι Gigard Desargues, Leonardo Da Vinci, Giacomo Barozzi da Vingola, ο μαθηματικός Egnazio Danti και ένα μεγάλο πλήθος άλλων καλλιτεχνών και αρχιτεκτόνων [4]. Η «Σκιαγραφία» ή η «Γεωμετρία της Σκιάς» κατ′ άλλους είναι η ίδια η Προβολική Γεωμετρία και κατ′ άλλους είναι μέρος αυτής και εκφράζει εκείνο το κομμάτι της Προβολικής Γεωμετρίας, όπου το αντικείμενο βρίσκεται μεταξύ της φωτεινής πηγής και του επιπέδου προβολής. Εμείς εδώ δεν θα προσπαθήσουμε να λύσουμε τη διαφωνία αυτή των ειδικών, αλλά θα ασχοληθούμε με ερωτήματα διαγραφόμενων σκιών από τα πλέον στοιχειώδη σχήματα της γεωμετρίας, δίνοντας απαντήσεις με τη χρήση της στοιχειώδους Γεωμετρίας, που διδάσκεται ή θα μπορούσε να διδάσκεται στο Λύκειο. Ειδικότερα, στην παρούσα εργασία μας θα βρούμε χαρακτηριστικά σημεία και χαρακτηριστικές ευθείες των σκιών, που σχηματίζουν σε ένα επίπεδο στοιχειώδη γεωμετρικά σχήματα, όταν φωτίζονται από μια φωτεινή πηγή, με εργαλείο τη στοιχειώδη Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Το άρθρο είναι διαρθρωμένο ως εξής: Εκτός από την εισαγωγή, στη δεύτερη παράγραφο παρουσιάζονται αναγκαίοι ορισμοί και θεωρήματα για τη συνέχεια του άρθρου μας, καθώς και ορίζεται το πρόβλημα και στην τρίτη παράγραφο δίνεται η λύση του προβλήματος.

2. Ορισμοί και προαπαιτούμενα. Αρχίζοντας, θα πρέπει να αναφέρουμε ορισμένες κοινές παραδοχές, ώστε να μην υπάρχουν παρανοήσεις. Έτσι:

1. Η φωτεινή πηγή (φ.π.) θα είναι, για μας, ένα σημείο και ως εκ τούτου δεν θα εμφανίζεται παρασκιά.
2. Η φ.π. είναι δυνατόν να βρίσκεται κάπου στο χώρο και ως εκ τούτου οι φωτεινές ακτίνες (φ.α.) θα είναι δέσμη ευθειών, που θα διέρχεται από σταθερό σημείο του χώρου.
3. Η φ.π. είναι δυνατόν να βρίσκεται στο άπειρο και ως εκ τούτου οι φ.α. θα είναι δέσμη παράλληλων ευθειών.
4. Τα αντικείμενα που θα μελετήσουμε είναι το σημείο, η ευθεία και μαζί της το ευθύγραμμο τμήμα και ο κύκλος.
5. Τα αντικείμενα βρίσκονται μεταξύ της φ.π. και του επιπέδου προβολής.

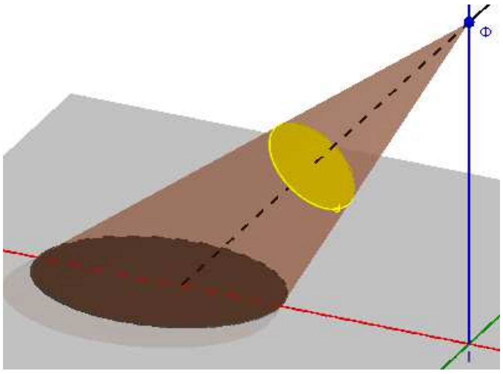
Μετά από τις παραπάνω παραδοχές είμαστε σε θέση να δώσουμε τον πρώτο μας ορισμό.

Ορισμός 2.1. Το σημείο τομής της ευθείας που ορίζει η φ.π. Φ και τυχαίο σημείο Μ με το επίπεδο προβολής (p), ονομάζεται σκιά του σημείου Α στο επίπεδο (p), ενώ η τομή του επιπέδου που ορίζει η φ.π. Φ και μια ευθεία (ε) με το επίπεδο προβολής (p) ονομάζεται σκιά της ευθείας (ε) στο επίπεδο (p).

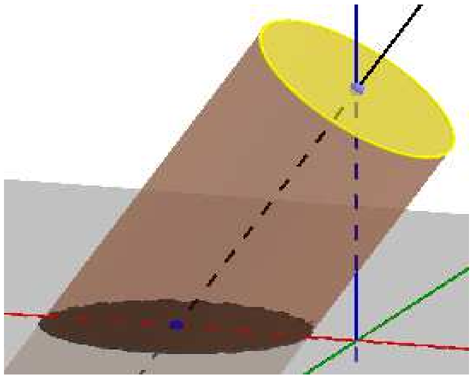
Ως άμεση συνέπεια του παραπάνω ορισμού προκύπτει το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 2.1. i) Η σκιά ενός σημείου είναι σημείο, **ii)** η σκιά μιας ευθείας είναι επίσης ευθεία και **iii)** η σκιά ενός ευθυγράμμου τμήματος θα είναι επίσης ευθύγραμμο τμήμα, που τα άκρα του θα καθορίζονται από τις σκιές των άκρων του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος, εκτός από την περίπτωση όπου το τμήμα είναι κάθετο στο επίπεδο (p) και η φωτεινή πηγή βρίσκεται στην ευθεία που ορίζει αυτό. Επιπλέον, όταν η φ.π. Φ βρίσκεται σε μια μεσοκάθετη ευθεία (ε) του τμήματος ΑΒ τότε **iv)** η (ε) γίνεται διχοτόμος για το τρίγωνο που σχηματίζει η φ.π. Φ με τη σκιά του τμήματος Α′Β′, εκτός και αν το τμήμα ΑΒ είναι παράλληλο στο επίπεδο προβολής (p) οπότε, εκτός από διχοτόμος, συνεχίζει να είναι και μεσοκάθετη. **v)** Όταν η φ.π. βρίσκεται στο άπειρο, τότε η σκιά παράλληλων τμημάτων είναι παράλληλα τμήματα.**vi)** Όταν η φ.π. βρίσκεται στο άπειρο, τότε η σκιά του μέσου ενός τμήματος είναι το μέσο της σκιάς αυτού.

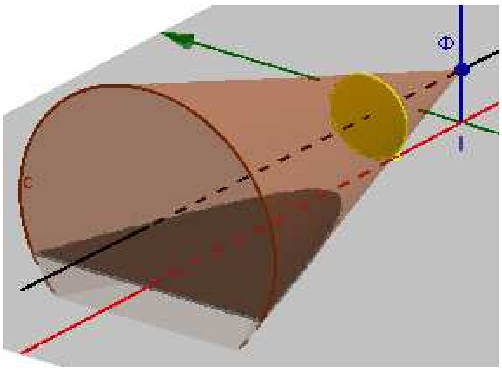
Θεώρημα 2.2. Η σκιά κυκλικού δίσκου (c) σε ένα επίπεδο προβολής (p), όταν αυτός φωτίζεται από φ.π. Φ, που βρίσκεται στην κάθετη στο επίπεδό του, στο κέντρο του, είναι μια έλλειψη (Σχήμα 1), ή ο κλάδος μια υπερβολής (Σχήμα 3), ή μια παραβολή (Σχήμα 4), ή ένας κύκλος.



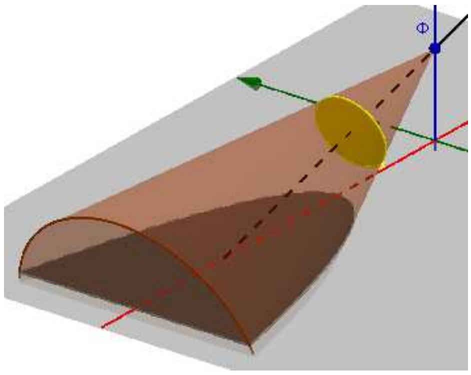
Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Απόδειξη. Οι φ.α. που διέρχονται από τη φ.π. Φ και τον κύκλο δημιουργούν έναν κώνο, του οποίου η τομή με το επίπεδο προβολής (p) είναι προφανώς μια έλλειψη, ή ένας κλάδος μια υπερβολής, ή μια παραβολή, ή ένας κύκλος. Για την απόδειξη, κάποιος μπορεί να ανατρέξει στο [7]. Αν, επιπλέον, θεωρήσουμε ότι η γωνία της κορυφής του κώνου είναι φ, ενώ η γωνία που σχηματίζει ο κατακόρυφος άξονας του κύκλου με το επίπεδο προβολής είναι θ, τότε η σκιά είναι **i)** έλλειψη (Σχήμα 1), όταν $2\theta > \varphi$, **ii)** παραβολή (Σχήμα 4), αν $2\theta = \varphi$ και **iii)** υπερβολή (Σχήμα 3), όταν $2\theta < \varphi$. Επειδή το επίπεδο προβολής δεν διέρχεται από το σημείο Φ, δεν μπορεί να είναι τεμνόμενες ευθείες ή σημείο.

Θεώρημα 2.3. Η σκιά κυκλικού δίσκου (c) σε ένα επίπεδο προβολής (p), όταν αυτός φωτίζεται από φ.π. Φ που βρίσκεται στο άπειρο και οι φ.α. είναι κάθετες στο επίπεδό του, είναι μια έλλειψη (Σχήμα 2) ή ένας κύκλος.

Απόδειξη. Οι φ.α. σχηματίζουν έναν ατέρμονα κύλινδρο. Η τομή του κυλίνδρου από ένα επίπεδο είναι μια έλλειψη, εκτός της περίπτωσης που το επίπεδο προβολής είναι παράλληλο προς το επίπεδο του κύκλου. Η απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη το προηγούμενου θεωρήματος στο [7]. Η μόνη διαφορά, που τώρα υπάρχει, είναι ότι οι εφαπτόμενες σφαίρες στο επίπεδο προβολής στο εσωτερικό του κυλίνδρου είναι ίσες (Σχήμα 2).

Παρατήρηση 2.1. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το αντίστροφο των δυο προηγούμενων Θεωρημάτων. Μια σχετική συζήτηση έχει ανοίξει στο forum των Μαθηματικών, Κωνικά:

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=95&t=36460 .

Κυρίως Πρόβλημα. *Στις κωνικές τομές των Θεωρημάτων 2.2 και 2.3, να προσδιοριστούν τα χαρακτηριστικά σημεία (κέντρο, εστίες) και οι χαρακτηριστικές ευθείες (άξονες, εφαπτόμενες, διευθετούσες) αυτών, με στοιχειώδη Ευκλείδεια Γεωμετρία.*

Ουσιαστικά, δηλαδή, ζητάμε να προσδιοριστούν γεωμετρικά τα ανωτέρω χαρακτηριστικά, αφού οι κωνικές τομές υπάρχουν απλά ως ένα περίγραμμα. Για τον κύκλο, το κέντρο του και οι εφαπτόμενές του προσδιορίζονται στο σχολικό βιβλίο [8] Για τις υπόλοιπες, όμως, περιπτώσεις θα αναφερθούμε στην επόμενη παράγραφο. Εδώ θα δώσουμε μερικά θεωρήματα και κάποιες παρατηρήσεις, που θα είναι χρήσιμα γι' αυτό.

Οι κωνικές τομές, εκτός από τον ορισμό τους ως τομή κώνου και επιπέδου, ορίζονται ισοδύναμα από τους επόμενους ορισμούς.

Ορισμός 2.1. Ο Γεωμετρικός τόπος των σημείων

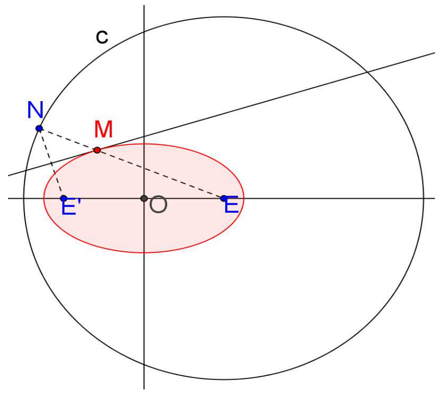
1. που απέχουν εξ ίσου από μια ευθεία (δ) και ένα σημείο Ε εκτός αυτής ονομάζεται Παραβολή.
2. που το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία Ε και Ε′ είναι σταθερό ονομάζεται Έλλειψη.
3. που η διαφορά από δύο σταθερά σημεία Ε και Ε′ είναι σταθερή ονομάζεται Υπερβολή.

Ορισμός 2.2. Θεωρούμε μια σταθερή ευθεία (δ) και ένα σταθερό σημείο Ε και έστω d(Μ,δ) η απόσταση τυχόντος σημείου Μ από την ευθεία (δ) και ΜΕ η απόσταση του ίδιου σημείου από το Ε. Έστω ακόμη $\varepsilon = \dfrac{ME}{d(M,\delta)}$ ο λόγος των αποστάσεων αυτών. Τότε:

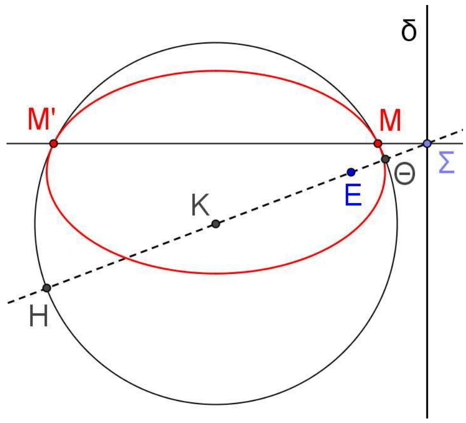
1. Αν ε = 1, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ ονομάζεται Παραβολή.
2. Αν ε < 1, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ ονομάζεται Έλλειψη

3. Αν ε > 1, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ ονομάζεται <u>Υπερβολή.</u>

Για την ισοδυναμία των δύο ορισμών αλλά και την ισοδυναμία τους με εκείνον της τομής επιπέδου και κώνου, μπορεί κάποιος να δει στο [6]. Με τον δεύτερο ορισμό βασικό ρόλο παίζει ο Απολλώνιος κύκλος και θα τον περιγράψουμε στη συνέχεια. Θεωρούμε την ευθεία (δ) και το σημείο της Σ (Σχήμα 6). Έστω επίσης το σημείο Ε, ένα σταθερό σημείο εκτός της (δ) και ο Απολλώνιος κύκλος (Κ, ΚΗ), των Ε και Σ με λόγο ε. Η κάθετη ευθεία, στην ευθεία (δ) στο σημείο Σ, τέμνει τον Απολλώνιο κύκλο στα Μ και Μ′. Τα σημεία αυτά (εφόσον υπάρχουν) είναι σημεία της κωνικής μας. Καθώς το Σ διαγράφει την ευθεία (δ), τα Μ και Μ′ σχηματίζουν την κωνική. Στο σχήμα, η κωνική είναι μια έλλειψη, όπου ο λόγος ε είναι $\varepsilon = \frac{7}{10} < 1$.



Σχήμα 5



Σχήμα 6

Παρατήρηση 2.2. Ο λόγος ε του Ορισμού 2.2. ονομάζεται εκκεντρότητα της κωνικής και αποδεικνύεται ότι είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$, όπου γ είναι η απόσταση της εστίας από το κέντρο της κωνικής και α το μήκος του μεγάλου ημιάξονα.

Για να δημιουργήσουμε μια κωνική τομή με «γεωμετρικά εργαλεία», ουσιαστικά να βρούμε με έναν γεωμετρικό τρόπο τα σημεία της, με τον Ορισμό 2.1, αναλυτικά μελετάται στο [9 και 10]. Ωστόσο, για την πληρότητα του κειμένου θα αναφερθούμε κι εδώ περιληπτικά. Θεωρούμε δυο σημεία Ε και Ε′ τα οποία ονομάζονται εστίες της κωνικής και την Ε′Ε εστιακή απόσταση αυτής. Το μέσον Ο του Ε′Ε είναι το κέντρο της και η ευθεία Ε′Ε είναι ο οριζόντιος άξονας, ενώ η κάθετη στο μέσον Ο του Ε′Ε είναι ο κατακόρυφος άξονας. Για να βρούμε ένα σημείο Μ της **έλλειψης**, παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Ν στον κύκλο (Ε′, 2·a) και έστω Μ το σημείο τομής της Ε′Ν και της μεσοκάθετης στο τμήμα ΝΕ. Προφανώς, το Μ είναι σημείο του γ. τ., αφού ΜΕ′ + ΜΕ = ΜΕ′ + ΜΝ = 2·a. Αποδεικνύεται [9] ότι το Μ είναι το μοναδικό σημείο της έλλειψης που ανήκει στη μεσοκάθετη ΕΝ, δηλαδή, η μεσοκάθετη στο Ε′Ν είναι η εφαπτόμενη στην έλλειψη (Σχήμα 5). Ομοίως, για να βρούμε ένα σημείο Μ της **υπερβολής** [9], παίρνουμε ένα σημείο Ν στον κύκλο (Ε′, 2·a), όπου $2 \cdot a < ΕΕ'$ και έστω Μ το σημείο τομής της Ε′Ν και της μεσοκάθετης στο τμήμα ΝΕ. Προφανώς, το Μ είναι σημείο του τόπου, αφού ΜΕ′ − ΜΕ = ΜΕ′ − ΜΝ = 2·a. Επίσης, η μεσοκάθετη ΕΝ είναι εφαπτόμενη στην υπερβολή. Ειδικά για την **παραβολή**, το Ε λέγεται εστία αυτής, η ΕΕ′ είναι ο οριζόντιος άξονας και η μεσοκάθετη του ΕΕ′ στο Ο, ο κατακόρυφος, ενώ η κάθετη στον οριζόντιο άξονα στο Ε′ ονομάζεται διευθετούσα. Το Ο είναι η κορυφή της παραβολής. Για να σχεδιάσουμε ένα σημείο Μ της παραβολής, θεωρούμε ένα σημείο Ν επί της διευθετούσης (δ). Στη συνέχεια, φέρουμε κάθετη σ′ αυτή στο σημείο Ν και έστω Μ η τομή της καθέτου αυτής με τη μεσοκάθετη στο τμήμα ΝΕ. Προφανώς, το Μ είναι σημείο του γ.τ., αφού ΜΝ = ΜΑ και το μέσον Κ του τμήματος ΝΕ βρίσκεται στον κατακόρυφο άξονα. Αποδεικνύεται [9] ότι η μεσοκάθετη ΕΝ είναι εφαπτόμενη στην παραβολή. Τα επόμενα δύο Θεωρήματα είναι χρήσιμα για την επίλυση του βασικού μας προβλήματος.

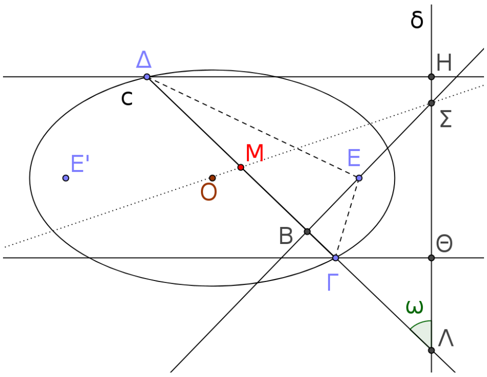
Θεώρημα 2.4. Σε μια κωνική τομή τα μέσα των χορδών βρίσκονται σε ευθεία, η οποία

1. διέρχεται από το κέντρο της κωνικής, όταν αυτή είναι έλλειψη ή υπερβολή και
2. είναι παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα, όταν αυτή είναι παραβολή.

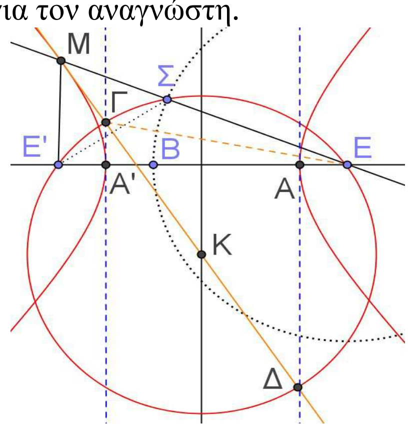
Απόδειξη. Έστω η έλλειψη c με εστίες τα Ε και Ε′ και διευθετούσα τη δ και ΓΔ μια χορδή της με σταθερή διεύθυνση (Σχήμα 7). Έστω επίσης Σ το σημείο τομής της κάθετης από την εστία Ε της έλλειψης στη ΓΔ με την διευθετούσα της (δ). Τώρα, από τις απλές γεωμετρικές σχέσεις που υπάρχουν στο τρίγωνο ΔΕΓ του σχήματος 7, καθώς και από το 2^{ο} Θεώρημα των διαμέσων θα έχουμε:

$$2 \cdot \Delta\Gamma \cdot \mathrm{MB} = \mathrm{E}\Delta^2 - \mathrm{E}\Gamma^2 = \varepsilon^2(\Delta\mathrm{H}^2 - \Gamma\Theta^2) = \varepsilon^2 \cdot \eta\mu^2\omega \cdot (\Delta\Lambda^2 - \Gamma\Lambda^2) =$$
$$\varepsilon^2 \cdot \eta\mu^2\omega(\Delta\Lambda - \Gamma\Lambda)(\Delta\Lambda + \Gamma\Lambda) = \varepsilon^2 \cdot \eta\mu^2\omega \cdot \Gamma\Delta \cdot (\Delta\mathrm{M} + \mathrm{M}\Lambda + \Gamma\Lambda) \overset{\Delta\mathrm{M} = \mathrm{M}\Gamma}{=}$$
$$\varepsilon^2 \cdot \eta\mu^2\omega \cdot \Gamma\Delta \cdot (\mathrm{M}\Lambda + \mathrm{M}\Gamma + \Gamma\Lambda) = \varepsilon^2 \cdot \eta\mu^2\omega \cdot \Gamma\Delta \cdot (2 \cdot \mathrm{M}\Lambda)$$

Αφού η διεύθυνση διατηρείται σταθερή, σταθερή θα είναι και η γωνία ω, οπότε, από τα δυο ακραία μέλη των παραπάνω ισοτήτων, προκύπτει ότι ο λόγος $\dfrac{MB}{M\Lambda} = \varepsilon^2 \cdot \eta\mu^2\omega$ διατηρείται σταθερός και επομένως το Μ βρίσκεται στην τρίτη ευθεία της δέσμης με κέντρο το Σ, που διέρχεται από το κέντρο Ο της έλλειψης, επειδή μια χορδή παράλληλη προς τη ΓΔ θα διέρχεται από το κέντρο της. Τα παραπάνω ισχύουν και για την υπερβολή και την παραβολή, με μικρές διαφοροποιήσεις στο σχήμα και στο ότι αυτή διέρχεται από το κέντρο στην υπερβολή και είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα στην παραβολή. Η απόδειξη αφήνεται για τον αναγνώστη.



Σχήμα 7



Σχήμα 8

Παρατήρηση 2.3. Ειδικά για την έλλειψη, **i)** μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα μέσα παράλληλων χορδών ανήκουν σε ευθεία, συνδυάζοντας το Θεώρημα 2.3 και από το Θεώρημα 2.1. τα v) και vi), αφού είναι γνωστό ότι, στον κύκλο, τα μέσα παράλληλων χορδών ανήκουν σε ευθεία και **ii)** στο [11] υπάρχει η απόδειξη του Θεωρήματος 2.4 με Αναλυτική Γεωμετρία.

Θεώρημα 2.5. Έστω (ζ′) και (ζ) οι εφαπτόμενες στην υπερβολή C (αντίστοιχα για την έλλειψη), στις κορυφές Α′ και Α αντιστοίχως και (ε) η εφαπτομένη της υπερβολής σ′ ένα σημείο της Μ. Αν η (ε) τέμνει τις (ζ′) και (ζ) στα σημεία Γ και Δ , τότε ο κύκλος με διάμετρο το ΓΔ διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης (Σχήμα 8).

Απόδειξη. Έστω, στο Σχήμα 8, ο κύκλος (Ε,ΕΒ) και το τυχαίο του σημείο Σ. Έστω ΜΚ η μεσοκάθετη στην Ε′Σ, που τέμνει την ΕΣ στο Μ και τον κατακόρυφο άξονα στο Κ. Το σημείο Μ είναι σημείο της υπερβολής και η ΜΚ εφαπτομένη αυτής. Επιπλέον, η ΜΚ θα διχοτομεί τη γωνία Ε′ΜΣ και θα διέρχεται από το μέσον Γ του τόξου Ε′Σ του κύκλου (Κ, ΚΕ′). Η ΕΓ θα είναι, επίσης, διχοτόμος της γωνίας ΒΕΣ και επομένως μεσοκάθετη της ΒΣ. Προφανώς, το Γ είναι το περίκεντρο του τριγώνου Ε′ΒΣ, επομένως θα βρίσκεται στην κάθετη στο Α′ ή αλλιώς στην εφαπτομένη της υπερβολής στο άκρο της μιας κορυφής. Από τη συμμετρία του σχήματος, το Δ επίσης ανήκει στον ίδιο κύκλο. Αντίστοιχο θεώρημα για την έλλειψη μαζί με την απόδειξη υπάρχει στο [10].

3. Η λύση στο κυρίως πρόβλημα. Για να δώσουμε απάντηση στο κυρίως πρόβλημα, θεωρούμε τις τρεις περιπτώσεις που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο.

i) Η έλλειψη: Έστω το περίγραμμα της έλλειψης c_1.

Θεωρούμε δύο ζεύγη (α,α′) και (β,β′) παράλληλων χορδών αυτής, διαφορετικών διευθύνσεων. Από το Θεώρημα 2.4, προσδιορίζουμε το κέντρο της, ως το σημείο τομής Ο των ευθειών που ορίζουν τα μέσα των παράλληλων ζευγών. Η παράλληλη (ε), από το σημείο τομής Σ, της ευθείας των μέσω ενός ζεύγους με το περίγραμμα c_1 της έλλειψης, προς τις ευθείες αυτές, είναι εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο αυτό Σ.

Με κέντρο το Ο και ακτίνα έτσι ώστε ο κύκλος να τέμνει την έλλειψη, γράφουμε κύκλο, που λόγω της συμμετρίας της προσδιορίζει ένα ορθογώνιο, του οποίου οι μεσοπαράλληλες των πλευρών του μας προσδιορίζουν το μεγάλο (χ′χ) και το μικρό (ψ′ψ) άξονα. Επίσης, τα σημεία τομής των αξόνων με το περίγραμμα c_1 της έλλειψης μάς προσδιορίζουν τις κορυφές της (Α και Α′), (Β και Β′), τόσο στον μεγάλο, όσο και στον μικρό άξονα.

Η εφαπτομένη (ε) τέμνει τις εφαπτόμενες στα άκρα Α και Α′ στα Γ και Δ, οπότε γράφοντας κύκλο με διάμετρο τη ΓΔ προσδιορίζουμε τις εστίες Ε και Ε′ αυτής, ως τα σημεία τομής του κύκλου με τον οριζόντιο άξονα, Θεώρημα 2.5. Φυσικά, στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε, αν βρίσκαμε τα σημεία τομής του μεγάλου άξονα με τον κύκλο (Β, $\frac{AA'}{2}$).

Τέλος, για να γράψουμε την εφαπτομένη από ένα σημείο Σ του επιπέδου, που δεν είναι εσωτερικό της έλλειψης, εκμεταλλευόμαστε τη «γεωμετρική» κατασκευή της, βάση του Ορισμού 2.1. Προς τούτο, γράφουμε τον κύκλο (Ε, ΑΑ′) και στη συνέχεια τον κύκλο (Σ, ΣΕ′). Αν Ζ και Η είναι τα σημεία τομής των δυο κύκλων, τότε οι μεσοκάθετες στα Ε′Ζ και Ε′Η είναι οι εφαπτόμενες στην έλλειψη. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι, όταν το Σ βρίσκεται πάνω στην έλλειψη, τα Ζ και Η ταυτίζονται και η εφαπτομένη είναι μόνον μία, η μεσοκάθετη στην Ε′Ζ.

ii) Υπερβολή. Θεωρούμε το περίγραμμα της υπερβολής c_2. Ουσιαστικά, μόνον τον έναν κλάδο αυτής, Θεώρημα 2.2.

Θεωρούμε τα δύο ζεύγη (α,α′) και (β,β′) παράλληλων χορδών αυτής, διαφορετικών διευθύνσεων και από το Θεώρημα 2.4 προσδιορίζουμε το κέντρο της, ως το σημείο τομής Ο των ευθειών που ορίζουν τα μέσα των παράλληλων ζευγών. Η παράλληλη (ε), από το σημείο τομής Μ, της ευθείας των μέσων του ενός ζεύγους, με το περίγραμμα c_2 της υπερβολής, προς τις ευθείες αυτές, είναι εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο αυτό. Με κέντρο το Ο και ακτίνα έτσι ώστε ο κύκλος να τέμνει το περίγραμμα της υπερβολής, προσδιορίζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα, ουσιαστικά τη μία πλευρά ενός ορθογώνιου, του οποίου η μεσοκάθετη μάς προσδιορίζει τον οριζόντιο (χ′χ) άξονα. Η κάθετη σε αυτόν στο σημείο Ο μας προσδιορίζει το μικρό (ψ′ψ) άξονα. Επίσης, το σημείο τομής του μεγάλου άξονα με το περίγραμμα c_2 της υπερβολής μάς προσδιορίζει την κορυφή Α αυτής.

Η εφαπτομένη (ε) τέμνει την εφαπτόμενη στο άκρο Α και την κάθετη στο Α′ του οριζόντιου άξονα (ΟΑ′ = ΟΑ), που είναι η εφαπτόμενη στη άλλη κορυφή της, στα Γ και Δ, οπότε γράφοντας κύκλο με διάμετρο τη ΓΔ προσδιορίζουμε τις εστίες Ε και Ε′ αυτής, ως τα σημεία τομής του κύκλου με τον οριζόντιο άξονα, Θεώρημα 2.5.

Τέλος, για να γράψουμε την εφαπτομένη από ένα σημείο Σ του επιπέδου, που δεν είναι εσωτερικό της υπερβολής, εκμεταλλευόμαστε τη «γεωμετρική» κατασκευή της, με βάση τον Ορισμό 2.1. Προς τούτο, γράφουμε τον κύκλο (Ε, 2·ΟΑ) και στη συνέχεια τον κύκλο (Σ, ΣΕ′). Αν Ζ και Η είναι τα σημεία τομής των δύο κύκλων, τότε οι μεσοκάθετες στα Ε′Ζ και Ε′Η είναι οι εφαπτόμενες στην υπερβολή, προφανώς η μία από τις δύο είναι η εφαπτομένη στο περίγραμμά μας (τον κλάδο μας). Θα πρέπει να πούμε ότι, όταν το Σ βρίσκεται πάνω στο περίγραμμά μας, τα Ζ και Η ταυτίζονται και η εφαπτομένη είναι μόνον μία, η μεσοκάθετη στην Ε′Ζ.

iii) Η παραβολή. Έστω το περίγραμμα της παραβολής c_3.

Θεωρούμε ένα ζεύγος (α,α′) παράλληλων χορδών αυτής. Από το Θεώρημα 2.4, προσδιορίζουμε μία παράλληλη (δ) προς τον οριζόντιο άξονα και ένα σημείο Μ αυτής, όπου μπορούμε να φέρουμε την εφαπτομένη της (ε), απλά φέροντας παράλληλη προς τις προηγούμενες χορδές. Φέροντας κάθετη προς τη (δ) στο σημείο Μ προσδιορίζουμε το σημείο Μ′, τομή αυτής και του περιγράμματος c_3. Η μεσοκάθετη στο ΜΜ′ μας ορίζει τον οριζόντιο άξονα, το σημείο τομής αυτού με το περίγραμμα c_3 της παραβολής προσδιορίζει την κορυφή αυτής Ο και η κάθετη στο Ο μας δίνει τον κατακόρυφο άξονα. Η κάθετη στο Κ, το σημείο τομής του κατακόρυφου άξονα με την εφαπτομένη (ε), μας προσδιορίζει την εστία της, ως το σημείο τομής αυτής με τον οριζόντιο άξονα και το σημείο Σ της (ε), που η κάθετη σε αυτή μας δίνει τη διευθετούσα.

Τέλος, για να γράψουμε την εφαπτομένη από ένα σημείο Σ του επιπέδου, που δεν είναι εσωτερικό της παραβολής, εκμεταλλευόμαστε τη «γεωμετρική» κατασκευή της, βάση του Ορισμού 2.1. Προς τούτο, γράφουμε τον κύκλο (Σ, ΣΕ), οπότε, αν Ζ και Ζ′ είναι τα σημεία τομής του κύκλου με τη διευθετούσα, τότε οι μεσοκάθετες στα ΕΖ και ΕΖ′ είναι οι εφαπτόμενες στην παραβολή από το Σ. Θα πρέπει να πούμε ότι, όταν το Σ βρίσκεται πάνω στην παραβολή, τα Ζ και Ζ′ ταυτίζονται και η εφαπτομένη είναι μόνον μία, η μεσοκάθετη στην ΕΖ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **Morris Kline (Μετάφραση: Σπύρος Μαρκέτος)**, Τα Μαθηματικά στο Δυτικό Πολιτισμό, Τόμος Α′ & Β′, Εκδόσεις ΚΩΔΙΚΑΣ.
2. **Α. Πούλος,** Προβολική και Παραστατική Γεωμετρία, Ευκλείδης Γ′, Τόμος Β′, Τεύχος 32, 13-21, 1992.
3. **Απολλώνιος**, Κωνικά, Τόμος Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, μετάφραση Ε. Σ. Σταμάτη, Έκδοση Τ.Ε.Ε., Αθήνα1975, 1976.
4. **Αναστάσιος Τόγκας**, «*Οι Γεωμετρικές Μελέτες του Girard Desargues, η Προοπτική & η Συμβολή τους στη Θεμελίωση της Προβολικής Γεωμετρίας. Μια Ιστορική Διαδρομή με Διδακτικές Προεκτάσεις*», Διπλ. εργασία, Διαπ/κό – Διατμ/κό Πρόγρ. Μεταπτ. Σπουδών, Παν/μιων Αθηνών-Κύπρου, 2009.
5. **Χαρίκλεια Τσιόγκα**, «*ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ: Από τα Συμπτώματα στη Γενική Εξίσωση 2ου Βαθμού – Ιστορική Παράθεση και Διδακτικές Προσεγγίσεις*», μεταπτυχιακή εργασία, Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών, Παν/μιων Αθηνών-Κύπρου, 2010. http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_Tsioga.Xarikleia.pdf
6. **Δ. Μπουνάκης**, «*Ιστορία και μελέτη με Ευκλείδεια μέσα των Κωνικών τομών*», *μεταπτυχιακή* εργασία, Μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης, 2004. (http://web-server.math.uoc.gr:1080/erevna/diplomatikes/Bounakis_MDE.pdf)
7. **Dandelin spheres**, http://en.wikipedia.org/wiki/Dandelin_spheres
8. **Αργυρόπουλος, Βλάμος, Κατσούλης, Μαρκάτης, Σιδέρης**, «*Ευκλείδεια Γεωμετρία*», ΟΕΔΒ, 2010.
9. **Μ. Τζούμας**, «Οι γνωστές – άγνωστες κωνικές τομές», Πρακτικά – 26ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, 617–626, 2009.
10. **Μ. Τζούμας**, «Οι κωνικές τομές από την άποψη της στοιχειώδους Ευκλείδειας Γεωμετρίας», Ευκλείδης γ′, 75(2011), 128-142.
11. **Ι. Απλακίδης,** «Εύρεση των εστιών κωνικών τομών από το περίγραμμά τους», Μαθηματική Επιθεώρηση, 63(2005), 28-34.