

Πού είναι το κέντρο;
*Μελέτη της τροχιάς κινητού ρομπότ με κινητήρα
διαφορικού με δύο τροχούς.*

Κουμπαρούλης Γιώργος, Εκπαιδευτικός, gekoubaroulis@gmail.com
Τζούμας Μιχάλης, τ. Σχολικός Σύμβουλος, mtzoumas@sch.gr
Τσοβόλας Σπύρος, Υπεύθυνος ΕΚΦΕ Αγρινίου, stsovol@sch.gr

Θεματική Ενότητα: *Η παρουσία και ο ρόλος των Μαθηματικών σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης: Μια ανοιχτή και διαρκής πρόκληση.*

Περίληψη

Η εκπαιδευτική ρομποτική εισήλθε στην εκπαίδευση ως ένας κύριος πυλώνας μιας νέας έκφρασης διαθεματικότητας που αποτυπώνεται με το ακρωνύμιο STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics). Τα Μαθηματικά και η Φυσική δίνουν εκπαιδευτική αξία στις ρομποτικές κατασκευές και ανάλογα με το νοητικό επίπεδο των μαθητών μπορεί να αποτελέσουν εργαλείο επίλυσης προβλημάτων. Θεωρούμε αυτονόητο πως για μαθητές Δημοτικού ή Γυμνασίου πρέπει να επιδιώκεται η απλούστερη διαθέσιμη Μαθηματική υποστήριξη σε ρομποτικές κατασκευές. Στο παράδειγμα του δίτροχου (μπουλντόζα) που μελετούμε αναδεικνύεται αυτή η προσέγγιση. Γνωρίζοντας την ταχύτητα των τροχών αποδεικνύουμε ότι το όχημα θα εκτελέσει κυκλική κίνηση, βρίσκουμε το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και το αντίστροφο, ορίζοντας κατάλληλες τιμές ταχυτήτων μπορούμε να επιτύχουμε επιθυμητή καμπυλότητα τροχιάς.

Abstract

Educational robotics was introduced in education as a major pillar of a new expression in cross-thematic approach, depicted by the STEM acronym (Science, Technology, Engineering, Mathematics). Mathematics and Physics give educational value to robotic structures. Depending on students' cognitive level, they can be a problem-solving tool if they are close to their level. We consider obvious that, for primary or junior secondary school students, the simplest available mathematical support for robotic structures should be sought. Thus, we are featuring this approach in the example of the

two-wheeled (bulldozer) we are studying. Knowing the speed of the wheels, we can prove that the vehicle will perform a circular motion. We also find the center of the circular track and the other way round. Furthermore, defining the appropriate speed values, we can achieve the desired curvature of the track.

Λέξεις Κλειδιά: STEM, εκπαιδευτική ρομποτική, κυκλική κίνηση

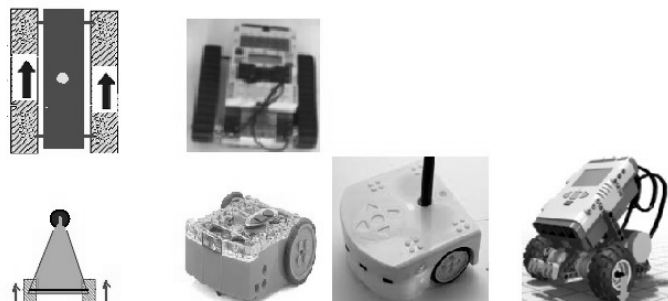
1. Εισαγωγή. Ο όρος “STEM” είναι η συνέχεια του όρου “SMET” (science, mathematics, engineering, and technology) και χρησιμοποιήθηκε για να εκφράσει την ανάγκη μιας διεπιστημονικής προσέγγισης της γνώσης σήμερα. Οι Morrison & Bartlett, (2009) αναφέρουν ότι πρέπει να αναγνωρίσουμε το STEM ως ενιαία ιδέα, όχι απλώς μια ομαδοποίηση των τεσσάρων κλάδων. Πιστεύουν ότι η βιωματική μάθηση είναι το ιδανικό εκπαιδευτικό όχημα και απευθύνεται κυρίως σε μαθητές που ρωτούν: «Γιατί πρέπει να μάθω αυτά τα πράγματα; Τι κάνω με αυτό;» Έτσι, η εκμάθηση γίνεται πολύ πιο εύκολα, όταν οι μαθητές αλληλεπιδρούν πραγματικά με τις ιδέες. Οι ρίζες του πνεύματος αυτού φτάνουν στον Ήρωνα (300-230 π.Χ.) και τον Αρχιμήδη (περ. 287-212 π.Χ.).

Η καθημερινότητα των μαθητών μας είναι, σήμερα, ψηφιακή. Οι νέοι μας χρησιμοποιούν συσκευές προηγμένης τεχνολογίας όπως κινητά τηλέφωνα, ηλεκτρονικούς υπολογιστές κλπ, που βασίζονται κυρίως στις επιστήμες, την τεχνολογία και τα μαθηματικά. Η διδασκαλία στο σχολείο οφείλει να συνδέει το μάθημα με τις πραγματικές καταστάσεις, τις εμπειρίες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών. Ένα από τα κύρια οχήματα μιας τέτοιας εκπαίδευσης είναι η εκπαιδευτική ρομποτική. Ως εκπαιδευτική ρομποτική ορίζεται ένα σύνολο εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων που ενισχύουν συγκεκριμένες περιοχές γνώσης και δεξιοτήτων μέσω της κατασκευής, τον προγραμματισμό και την λειτουργία ρομπότ. Ο Papert θεωρείται ο πρωτεργάτης αυτής, αφού συνέβαλλε στο σχεδιασμό της πρώτης Logo (1967) χελώνας, που αποτέλεσε το πρώτο εκπαιδευτικό ρομπότ για χρήση σε σχολεία. Πίστευε ότι τα παιδιά οικοδομούν πιο αποτελεσματικά τη γνώση όταν εμπλέκονται ενεργά στη σχεδίαση και κατασκευή πραγματικών αντικειμένων, είτε αυτά είναι κάστρα από άμμο, είτε κατασκευές Lego και προγράμματα υπολογιστών. Ιδιαίτερα για του υπολογιστές αναφέρει: «Στο όραμά μου, το παιδί προγραμματίζει τον υπολογιστή και, με τον τρόπο αυτό, αποκτά την αίσθηση της γνώσης πάνω σε ένα κομμάτι της πιο σύγχρονης και ισχυρής τεχνολογίας και καθιερώνει μια στενή επαφή με μερικές

από τις βαθύτερες ιδέες από τις επιστήμες, από τα μαθηματικά και από την τέχνη του χτισίματος πνευματικών μοντέλων» (Papert, 1993, σελ. 5).

Κεντρική έννοια σε δραστηριότητες εκπαιδευτικής ρομποτικής είναι η της επίλυσης προβλημάτων (problem-solving). Η επίλυση προβλήματος είναι συνυφασμένη με την ενεργητική μάθηση και αποτελεί σημαντικό εργαλείο στην οικοδόμηση της γνώσης. Η Ε. Κολέζα (1997) αναφέρει ότι στον αντίποδα της φορμαλιστικής άποψης βρίσκεται η ρεαλιστική που στηρίζεται στην αρχή ότι η γνώση δεν μπορεί και δεν πρέπει να επιβάλλεται δογματικά εκ των έξω. Το καθετί πρέπει να υπόκειται σε μια εσωτερική επεξεργασία από εκείνον που μαθαίνει. Το πρόβλημα, το οποίο βρίσκεται στη βάση μιας δραστηριότητας, πρέπει να είναι πλούσιο, δηλαδή να επιδέχεται πολλές προσεγγίσεις, και να δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να διατυπώνουν και να επεξεργάζονται, μόνοι τους ή στα πλαίσια της ομάδας, ενδιάμεσες ερωτήσεις. Στο πλαίσιο αυτό είναι τοποθετημένη η παρούσα εργασία και διαρθρώνεται ως εξής: Στην επόμενη παράγραφο, αναφέρεται το πρόβλημα. στην 3η και 4η επιλύεται το ορθό και το αντίστροφο του προβλήματος με στοιχειώδη μέσα. Η 5η περιέχει εφαρμογές των θεωρητικών παραγράφων και η 6η δίνει κατευθύνσεις για εφαρμογή των παραπάνω στο Δημοτικό.

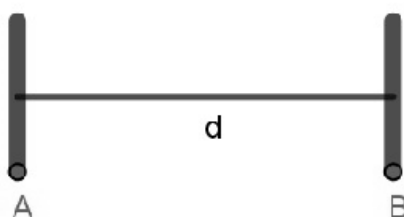
2. Η φυσική κατασκευή. Ένα μεγάλο πλήθος κατασκευών υπάρχει στην αγορά, όπου ο μαθητής μπορεί ποικιλοτρόπως να πειραματιστεί και να δημιουργήσει. Εμείς, όμως, θα αναφερθούμε στην περίπτωση οχήματος τύπου μπουλντόζας ή τρικύκλου που η κίνηση ελέγχεται ρυθμίζοντας κατάλληλα την ταχύτητα των δύο τροχών και θα αναδείξουμε το πλήθος εννοιών που συνυπάρχουν στην απλή αυτή περίπτωση σε όλες τις επιστήμες. Το νοητικό μοντέλο είναι το ίδιο στις δύο περιπτώσεις απλά στο τρίκυκλο υπάρχει στήριξη σε τρίτο σημείο ή τροχό που περιστρέφεται ελεύθερα χωρίς τριβές. Στην Εικόνα 1 φαίνονται οι δύο ισοδύναμες εκδοχές στους διάφορους τύπους οχημάτων που κυκλοφορούν.



Εικόνα 1

Σχετικές μελέτες γύρω από τον παραπάνω τύπο οχήματος υπάρχουν αρκετές στη Διεθνή βιβλιογραφία. Για παράδειγμα αναφέρουμε τους R. Siegwart & I. Nourbakhsh, (2004), τους C. Myint, N. N. Win, (2016) και τους R. Dhaouadi & A. A. Hatab, (2013). Ωστόσο, σε όλα τα παραπάνω η μελέτη γίνεται με όρους που είναι μακριά από τους μαθητές της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

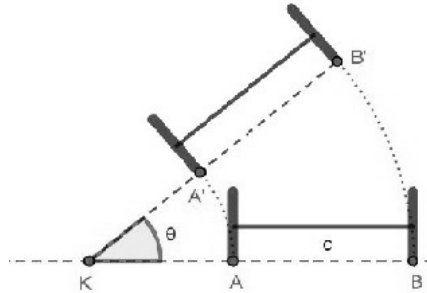
3. Μαθηματική μελέτη για το διαφορικό σύστημα τροχών. Δύο τροχοί ακτίνας R συνδέονται με βραχίονα σταθερού μήκους d , ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο των τροχών και εφάπτονται επί του επιπέδου του εδάφους στα σημεία A και B . Οι τροχοί κυλίνουν, χωρίς να ολισθαίνουν, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον (Εικόνα 2). Το σύστημα αυτό ονομάζεται συνήθως *διαφορικό σύστημα τροχών*.



Εικόνα 2

Ένα διαφορικό σύστημα τροχών είναι ένα συνηθισμένο εργαλείο για την εκπαιδευτική ρομποτική. Πλήθος ερωτημάτων και προβλημάτων μπορούν να τεθούν τόσο από την πλευρά της φυσικής όσο και από την πλευρά των μαθηματικών. Ωστόσο, για τους μαθητές μας, ενδιαφέρον αποτελεί η μελέτη της ευθύγραμμης αλλά και της κυκλικής κίνησης. Για τη μελέτη μας

θα χρησιμοποιήσουμε την κίνηση του ίχνους A και B (Εικόνα 3) των τροχών στο επίπεδο του εδάφους.



Εικόνα 3

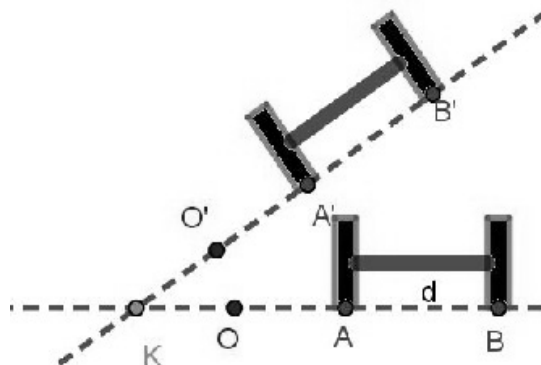
Θεωρούμε ότι το διαφορικό σύστημα τροχών κινείται σε κυκλική τροχιά όπως φαίνεται στην Εικόνα 3. Αν η ακτίνα του κύκλου (K, KA) είναι r , τότε η ακτίνα του κύκλου (K, KB) είναι $r + d$. Το διάστημα που διανύει ο αριστερός τροχός T_A είναι το τόξο $AA' = \theta \cdot r = S_1$ (η γωνία θ εκφράζεται σε rad) ενώ ο δεξιός τροχός T_B είναι το τόξο $BB' = \theta \cdot (r + d) = S_2$. Ο λόγος των δύο διαστημάτων είναι σταθερός, αφού

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\theta \cdot r}{\theta \cdot (r+d)} = \frac{r}{r+d} =: k \quad (1)$$

Επειδή, ο αριστερός τροχός T_A στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1 ενώ ο δεξιός T_B με ταχύτητα ω_2 , η γραμμική ταχύτητα του κάθε σημείου, στο εξωτερικό, του αριστερού τροχού θα είναι $v_1 = \omega_1 \cdot R$, ενώ του δεξιού $v_2 = \omega_2 \cdot R$. Μετά από χρόνο t τα εξωτερικά σημεία των δύο τροχών θα έχουν διανύσει το ένα απόσταση $S_1 = v_1 \cdot t = \omega_1 \cdot R \cdot t = \varphi_1 \cdot t$ και το άλλο $S_2 = v_2 \cdot t = \omega_2 \cdot R \cdot t = \varphi_2 \cdot t$, όπου φ_1 και φ_2 είναι οι γωνίες που στρέφονται οι δύο τροχοί T_A και T_B αντίστοιχα. Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι τόσο οι γραμμικές όσο και οι γωνιακές ταχύτητες των τροχών είναι ανάλογες, δηλαδή $v_1 = k \cdot v_2$ και $\omega_1 = k \cdot \omega_2$.

4. Επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος με στοιχειώδη μέσα.

Κατά την κίνηση των τροχών ενός διαφορικό σύστημα τροχών την χρονική στιγμή t , επειδή η τροχιά αυτών, είναι κάθετη κάθε στιγμή επί της διεύθυνσης της ευθείας των σημείων επαφής A και B , καθόλου δεν θα αλλάξει η απόσταση αυτών από οποιοδήποτε σημείο O της διεύθυνσης AB .



Εικόνα 4

Με βάση τα παραπάνω, αν υποθέσουμε ότι οι δύο τροχοί της Εικόνας 3, κινούνται σταθερά και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον (Εικόνα 4), διανύοντας διαφορετικές αποστάσεις, για χρόνο dt , το σημείο A θα μετακινηθεί στη θέση A' ενώ το B στη θέση B' . Οι αποστάσεις αυτών από τα άλλα σημεία της διεύθυνσης AB δεν μεταβλήθηκαν. Έτσι, οι δύο διευθύνσεις θα τέμνονταν στο σημείο K , αφού διαφορετικά αν οι διευθύνσεις δεν τέμονταν θα ήταν παράλληλες, οπότε (λόγω της σταθερής απόστασης των τροχών) το σχήμα $ABA'B'$ θα ήταν παραλληλόγραμμο και επομένως τα AA' και BB' θα ήταν μεταξύ τους ίσα, που είναι άτοπο. Επειδή το σημείο K , κοινό σημείο των διευθύνσεων AA' και BB' απέχει σταθερή απόσταση από τα σημεία A και A' την κάθε χρονική στιγμή dt , θα είναι το κέντρο ενός κύκλου και μένει να προσδιοριστεί.

Στο Σχήμα 3, αν αποκαλέσουμε φ τη γωνία τομής των δύο διευθύνσεων $\sphericalangle AKA'$ τότε $S_A = \frac{\varphi}{360} \cdot 2\pi r$ και $S_B = \frac{\varphi}{360} \cdot 2\pi(r+d)$. Αφού η τροχιά είναι κυκλική τα διαστήματα που διανύουν οι δύο τροχοί είναι ανάλογα, δηλαδή $S_A = k \cdot S_B$, $k \in \mathbb{R}$. Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι

Παρατήρηση 1η.

- Όταν $k = 0$, τότε το σημείο A δεν μετακινείται.
- Όταν $k > 0$, τα σημεία A και B κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση.
- Όταν $k < 0$, τα σημεία A και B κινούνται σε αντίθετη κατεύθυνση.
- Για πολύ μεγάλες τιμές του k (τιμές που πλησιάζουν στο άπειρο) το σημείο B δεν μετακινείται και μετακινείται μόνον το σημείο A .

Κάτω από τις μέχρι εδώ υποθέσεις και συνθήκες, για την ακτίνα του κύκλου (K, KA) ισχύει:

$$\frac{\varphi}{360} \cdot 2\pi r = k \cdot \frac{\varphi}{360} \cdot 2\pi(r + d) \Leftrightarrow r = k(r + d) \Leftrightarrow r = \frac{kd}{1-k} \quad (2)$$

Ενώ για την ακτίνα $\varkappa = KB$ του κύκλου (K, KB) ισχύει:

$$\varkappa = r + d = \frac{d}{1-k}. \quad (3)$$

Για τις διάφορες τιμές του k η σχέση (2) ερμηνεύεται ως εξής:

Παρατήρηση 2η.

- Για $k = 0$ προκύπτει $r = 0$, δηλαδή το σημείο A παραμένει σταθερό και το σημείο B γυρίζει γύρω από αυτό.
- Για τιμές του k που πλησιάζουν στο άπειρο, έχουμε $r = -d$ και $\varkappa = 0$, δηλαδή το σημείο B παραμένει σταθερό και μετακινείται μόνον το σημείο A γράφοντας τον κύκλο (B, d) .
- Για $k = 1$, οι τροχιές των A και B είναι ίσες και συνεπώς ο άξονας AB παραμένει παράλληλος προς εαυτόν. Αυτό υποδεικνύει και η τιμή του r που απειρίζεται.
- Για $k = -1$, από την Παρατήρηση 1, οι τροχιές των A και B είναι ίσες σε μέτρο, αλλά έχουν αντίθετη διεύθυνση. Τώρα έχουμε ήτοι το K είναι στο μέσον των τροχών A και B . Η στροφή που κάνουν οι τροχοί είναι επιτόπια.
- Για τιμές του $k \in (-\infty, 0)$ το κέντρο της κυκλικής τροχιάς είναι στο εσωτερικό του τμήματος AB .
- Για $k \in (0, 1)$ το κέντρο της κυκλικής τροχιάς είναι δεξιά του B .
- Για $k \in (1, \infty)$ το κέντρο της κυκλικής τροχιάς είναι αριστερά του A .

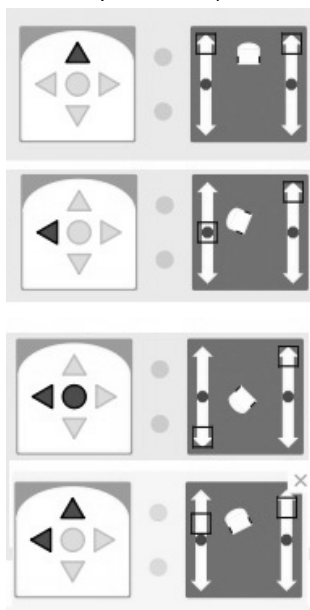
5. Εφαρμογές. Ας πάρουμε, αρχικά, την εκδοχή thymio και το περιβάλλον προγραμματισμού aseba. Ο προγραμματισμός γίνεται τόσο σε οπτικό ή blockly όσο και σε περιβάλλον κειμένου. Στην εικόνα 5α φαίνεται ο οπτικός προγραμματισμός (vpl). Το παρόν πρόγραμμα συλλαμβάνει 4 συμβάντα και στο καθένα ορίζεται η κατάλληλη ενέργεια. Στο πρώτο θα έχουμε κίνηση εμπρός αφού οι ταχύτητες των μοτέρ είναι οι ίδιες. Στο δεύτερο συμβάν θα έχουμε στροφή ως προς τον ακίνητο αριστερό τροχό. Στο τρίτο συμβάν θα έχουμε επιτόπια αριστερή στροφή αφού οι τιμές ταχυτήτων είναι ίσες και

αντίθετες. Τέλος στο τέταρτο συμβάν θα έχουμε μια κίνηση σε αριστερή στροφή. Ποια είναι η ακτίνα αυτής της κυκλικής τροχιάς στην 4^η περίπτωση; Σύμφωνα με τα μέχρι τώρα: Η μέση ταχύτητα του οχήματος εύκολα βρίσκεται ότι είναι $\frac{(V_l+V_r)}{2} = \frac{(400+200)}{2} = 300$ μονάδες. Με τη μεζούρα μετράμε και βρίσκουμε την απόσταση των δύο τροχών $d = 9,4\text{cm}$. Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του μέσου των δύο τροχών βρίσκεται ότι είναι

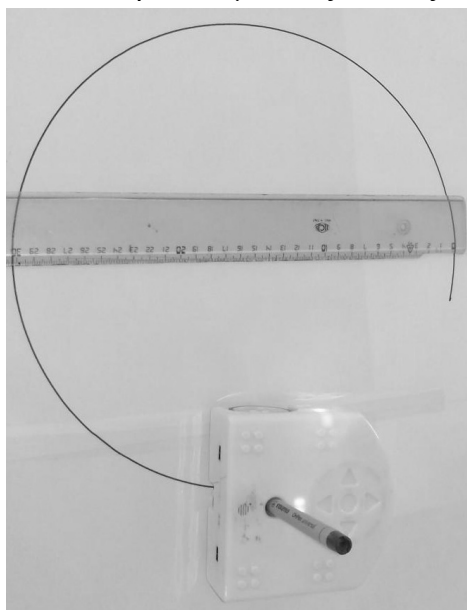
$$r + \frac{d}{2} = \frac{d \times V_l}{(V_r - V_l)} + \frac{d}{2} = \frac{9,4 \times 200}{(400 - 200)} + \frac{9,4}{2} = 4,7\text{cm}.$$

Η επιβεβαίωση έρχεται με μετρήσεις στο έδαφος όπως δείχνει η Εικόνα 5β.

Στην εκδοχή Arduino, ο προγραμματισμός γίνεται μόνον σε περιβάλλον κειμένου ως εκ τούτου συστήνεται για μεγαλύτερα παιδιά. Εκτός του ότι το Arduino στις περισσότερες εκδόσεις του κυκλοφορεί προ-συναρμολογημένο, το διάγραμμα για τη συναρμολόγηση του υλικού είναι διαθέσιμα για αυτούς που θέλουν να το συναρμολογήσουν μόνοι τους. Έτσι, εκτός του προγραμματισμού, τώρα, έχει ενδιαφέρον και η συναρμολόγηση-κατασκευή του αντικειμένου, αφού τίποτε δεν είναι από πριν έτοιμο. Στις εικόνες 5α



Εικόνα 5α



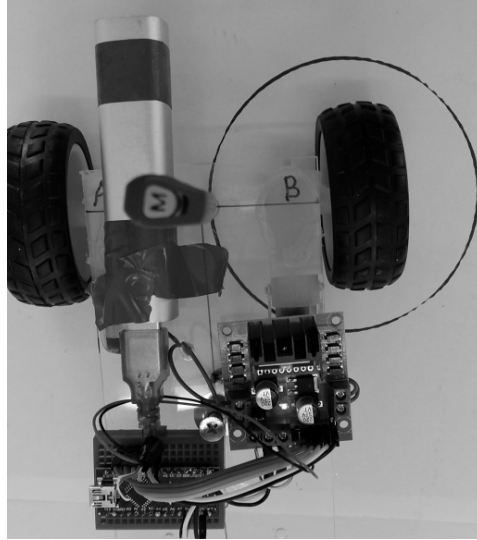
Εικόνα 5β

και 5β φαίνεται ο προγραμματισμός και η υλοποίηση της πρώτης περίπτωσης της 2ης παρατήρησης αντίστοιχα.


```

int enA = 10;int in1 = 9;int in2 = 8;
int enB = 5;int in3 = 7;int in4 = 6;
void setup() { // Θέτουμε ως έξοδο τα pins
pinMode(enA, OUTPUT);
pinMode(enB, OUTPUT);
pinMode(in1, OUTPUT);
pinMode(in2, OUTPUT);
pinMode(in3, OUTPUT);
pinMode(in4, OUTPUT);}
void loop(){ // Ενεργοποίηση motor A
digitalWrite(in1, HIGH); digitalWrite(in2, LOW);
// Ταχύτητα Motor A (Όρια 0~255)
analogWrite(enA, 250);
digitalWrite(in3, HIGH); digitalWrite(in4, LOW);
// // Ταχύτητα Motor B (Όρια 0~255)
analogWrite(enB, 0); delay(8000);
digitalWrite(in1, LOW); digitalWrite(in2, LOW);
digitalWrite(in3, LOW); digitalWrite(in4, LOW);
while (1) ;}

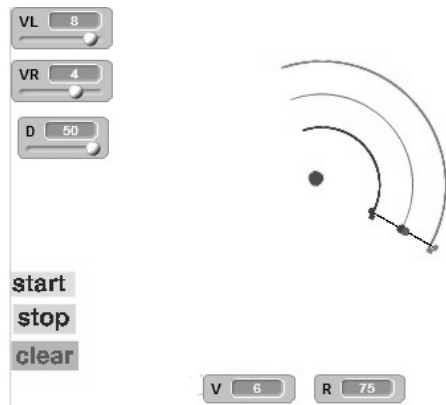
```



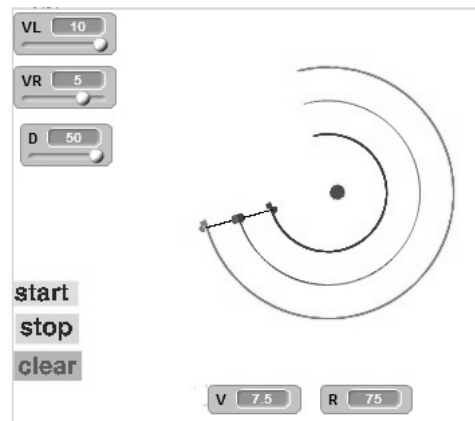
Εικόνα 6α

Εικόνα 6β

Μια μικρή εφαρμογή στο scratch μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να διερευνήσουν το πρόβλημα και να ανακαλύψουν ότι η γεωμετρία του σχήματος δεν εξαρτάται από το μέτρο των ταχυτήτων αλλά από τον λόγο αυτών. Τα χρώματα βοηθούν στην αναπαράσταση βασικών μεγεθών. Με μπλε σχεδιάζεται η τροχιά του δεξιού τροχού και με πράσινο του αριστερού. Το κέντρο των ομόκεντρων κυκλικών τροχιών αποτυπώνεται με κόκκινο στίγμα.

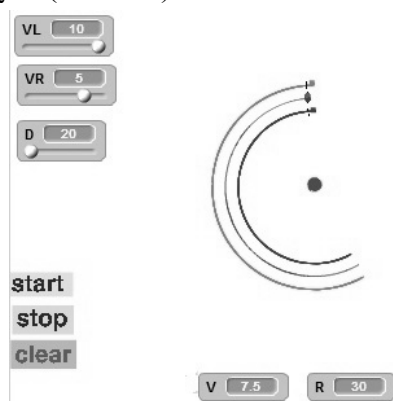


Εικόνα 7



Εικόνα 8

Η ακτίνα της τροχιάς ($R = 75$) δεν θα αλλάξει αν ο λόγος των ταχυτήτων μείνει ίδιος. Στις εικόνες 7 και 8 οι ταχύτητες είναι ($V_L = 8$ και $V_R = 4$) καθώς και ($V_L = 10$ και $V_R = 5$) αντίστοιχα και η γεωμετρία των τροχών σταθερή ($D = 50$). Ωστόσο, φαίνεται στην Εικόνα 9, ότι αυτή αλλάζει ($R = 30$) αν αλλάξει η γεωμετρία του οχήματος, π.χ. αλλάξει η απόσταση των τροχών ($D = 20$).



Εικόνα 9

6. Τι γίνεται στο Δημοτικό. Οι μαθητές στο Δημοτικό μπορούν να επιλέγουν επιθυμητές τιμές από μια λίστα. Μια λίστα 10 τιμών είναι εύκολα διαχειρίσιμη σε αυτές τις ηλικίες αρκεί να μην έχουμε απαίτηση ακρίβειας αλλά την ακρίβεια στην πλησιέστερη τιμή. Η λίστα αξιοποιείται για απάντηση στο βασικό ερώτημα: πως θα χαράξω καμπύλη επιθυμητού μεγέθους; Ως καθημερινό πρόβλημα θα μπορούσαμε να φανταστούμε το ρομποτ να χαράσσει π.χ. μία κυκλική τάφρο ακτίνας $R = 30$ εκατοστά ή ένα πιο δύσκολο πρόβλημα, να δημιουργεί το μήνυμα “SOS” στην άμμο. Τέλος, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η προσομοίωση του thimio στο GeogebraTube [7].

Βιβλιογραφία

1. Morrison, J., & Bartlett, R. V. (2009). “*STEM as a curriculum: An experiential approach*”. Education Week, 28(23), 28–31. <http://www.edweek.org/ew/articles/2009/03/04/23bartlett.h28.html>
2. Papert. S., 1993. “*Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*”. 2nd ed. NY: Basic Books.(σελ. 5).
3. Ευγενία Κολέζα, (1997). «*Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των μαθηματικών*» (σελ. 71-81). Πρακτικά 14ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Μυτιλήνη.

4. R. Siegwart & I. Nourbakhsh, (2004) "Autonomous Mobile Robots", The MIT Press Cambridge, Massachusetts.
<http://www.cs.cmu.edu/~rasc/Download/AMRobots3.pdf>
5. C. Myint, N. N. Win, (2016) "Position and Velocity control for Two-Wheel Differential Drive Mobile Robot", International Journal of Science, Engineering and Technology Research, Volume 5, Issue 9.
<http://ijsetr.org/wp-content/uploads/2016/09/IJSETR-VOL-5-ISSUE-9-2849-2855.pdf>
6. R. Dhaouadi & A. A. Hatab, (2013) "Dynamic Modelling of Differential-Drive Mobile Robots using Lagrange and Newton-Euler Methodologies: A Unified Framework, Adv Robot Autom. Volume 2, Issue 2.
<https://www.omicsonline.org/open-access/dynamic-modelling-of-differentialdrive-mobile-robots-using-lagrange-and-newtoneuler-methodologies-a-unified-framework-2168-9695.1000107.pdf>
<https://www.geogebra.org/m/nDnPzHWs#material/nPvBVkKV>