Για την λύση της άσκησης 21, θα αποδείξουμε πρώτα το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα: Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ τότε

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha+\gamma}\geq\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}+\frac{\beta}{\beta+\gamma}$$

Απόδειξη:

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha+\gamma}=\frac{\alpha(\alpha+\gamma)}{(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)}+\frac{\beta(\beta+\gamma)}{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}=\frac{\alpha(\alpha+\gamma)+\beta(\beta+\gamma)}{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}=\frac{\alpha^2+\alpha\gamma+\beta^2+\beta\gamma}{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}=$$

$$=\frac{(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\gamma+\beta\gamma}{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}\underset{(\alpha^2+\beta^2)\geq 2\alpha\beta}{\geq}\frac{2\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}=\frac{\alpha\beta+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}=\frac{\alpha(\beta+\gamma)+\beta(\alpha+\gamma)}{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}=$$

$$=\frac{\alpha(\beta+\gamma)}{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}+\frac{\beta(\alpha+\gamma)}{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}=\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}+\frac{\beta}{\beta+\gamma}$$

Άρα

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha+\gamma}\geq\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}+\frac{\beta}{\beta+\gamma}$$

□

Άσκηση 21 (Ανισότητα Nesbitt): Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ τότε

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha+\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\geq\frac{3}{2}$$

Απόδειξη

Από το Λήμμα έχουμε αμέσως τις σχέσεις:

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha+\gamma}\geq\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}+\frac{\beta}{\beta+\gamma}\qquad(1)$$

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\geq\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\gamma}{\gamma+\beta}\qquad(2)\quad\text{και}$$

$$\frac{\beta}{\alpha+\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\geq\frac{\beta}{\beta+\alpha}+\frac{\gamma}{\gamma+\alpha} \qquad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1), (2), (3) και έχουμε:

$$2\left(\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha+\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\right)\geq\frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\gamma}+\frac{\beta+\alpha}{\beta+\alpha}+\frac{\gamma+\beta}{\gamma+\beta} \;\Leftrightarrow$$

$$2\left(\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha+\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\right)\geq 3 \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha+\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\geq\frac{3}{2}$$

□

Ανδρέας Λάζαρης

Α' Λυκείου, Π.Π.Λ.Π.Π.