Άσκηση 1: Για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς ισχύει η ανισότητα $\boldsymbol{\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta}$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

$\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow$

$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)^2\geq 0$ που ισχύει ως τέλειο τετράγωνο

<u>Για την ισότητα</u>

$\alpha^2+\beta^2=2\alpha\beta \Leftrightarrow$

$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow$

α-β=0 ⇔ α=β

Άσκηση 9: Έστω α, β ∈ IR να αποδειχθεί ότι $\boldsymbol{(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta}$

Λύση

$(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow$

$\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow$

$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta)^2\geq 0$ που ισχύει ως τέλειο τετράγωνο

Άσκηση 10: Αν α, β>0 να αποδειχθεί ότι:

i. $\boldsymbol{\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\geq\frac{4}{\alpha+\beta}}$

ii. $\boldsymbol{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq\frac{4}{\alpha+\beta}}$

Λύση

i. $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\geq\frac{4}{\alpha+\beta} \xLeftrightarrow[\alpha\beta>0,\alpha+\beta>0]{\alpha,\beta>0\Rightarrow}$

$(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)\geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta$ που ισχύει σύμφωνα με την άσκηση 9

ii. $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \geq \frac{4}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow$

$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \geq \frac{4}{\alpha+\beta}$ που ισχύει από το i)

Ανδριοπούλου Λυδία

Α΄ Λυκείου, Π.Π.Λ.Π.Π.