Άσκηση 2: **Αν** $\alpha > 0$ **να αποδειχθεί ότι** $\boldsymbol{\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2}$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

1ος τρόπος:

$\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow$ (επειδή $\alpha > 0$)

$\alpha^2 + 1 - 2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha - 1)^2 \geq 0$ που ισχύει ως τέλειο τετράγωνο

Για την ισότητα:

$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2 \Leftrightarrow$

$(\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 1}$

2ος τρόπος:

Έχουμε αποδείξει ότι: $A^2 + B^2 \geq 2AB$

Θέτουμε $A = \sqrt{\alpha}$ και $B = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

$A^2 + B^2 \geq 2AB \Leftrightarrow \sqrt{\alpha}^2 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}^2} \geq 2\sqrt{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$

Άσκηση 3: **Αν** $\boldsymbol{\alpha} < 0$ **να αποδειχθεί ότι** $\boldsymbol{\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2}$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

1ος τρόπος:

$\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2 \Leftrightarrow \varepsilon\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ \alpha < 0$

$\alpha^2 + 1 \geq -2\alpha \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + 1 + 2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha+1)^2 \geq 0$ που ισχύει ως τέλειο τετράγωνο

Για την ισότητα:

$\alpha + \frac{1}{\alpha} = -2 \Leftrightarrow$

$(\alpha + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = -1}$

2ος τρόπος:

$\alpha < 0 \Rightarrow -\alpha > 0$

Από την άσκηση 2 έχουμε

$-\alpha - \frac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$

Άσκηση 8: Έστω α, β ∈IR τέτοια ώστε $\boldsymbol{\alpha \leq 2 \leq \beta}$. Να αποδειχθεί ότι:

α) $\boldsymbol{\alpha^2 + 2\beta \geq \alpha\beta + 2\alpha}$

β) Αν $\boldsymbol{\alpha^2 + 2\beta = \alpha\beta + 2\alpha}$ να δείξετε ότι **α=2**

Λύση

α) $\alpha^2 + 2\beta \geq \alpha\beta + 2\alpha \Leftrightarrow$

$\alpha^2 - 2\alpha + 2\beta - \alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow$

$\alpha(\alpha - 2) - \beta(-2 + \alpha) \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha - \beta)(\alpha - 2) \geq 0$ ισχύει γιατι: $\left\{\frac{\alpha \leq 2 \Leftrightarrow \alpha - 2 \leq 0}{\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \leq 0}\right\} \Longrightarrow (\alpha - 2)(\alpha - \beta) \geq 0$

β) $\alpha^2 + 2\beta = \alpha\beta + 2\alpha \Leftrightarrow$

$\alpha^2 - 2\alpha + 2\beta - \alpha\beta = 0 \Leftrightarrow$

α(α-2)-β(α-2)=0 ⇔

(α-2)(α-β)=0 ⇔

α=2 (1) ή α=β (2)

Αν α=β τότε, επειδή α≤ 2 ≤ β , έχουμε α≤ 2 ≤ α. Άρα $\alpha = 2$.

Επομένως οι (1) και (2) οδηγούν στο συμπέρασμα α=2.

Καλύβα Στέλλα

Α΄ Λυκείου, Π.Π.Λ.Π.Π.