

Άσκηση 4: Αν α, β ομόσημοι να αποδειχθεί ότι: $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Από την άσκηση 2 έχουμε ότι για κάθε $A > 0$ ισχύει $A + \frac{1}{A} \geq 2$ (1)

Θέτουμε στην (1) όπου $A = \frac{\alpha}{\beta} > 0$ αφού α, β ομόσημοι

Οπότε $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$

Για την ισότητα:

Στην άσκηση 2 είδαμε ότι η ισότητα για την σχέση (1), ισχύει όταν $A=1$.

Άρα $\frac{\alpha}{\beta} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

Άσκηση 5: Αν α, β ετερόσημοι να αποδειχθεί ότι: $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \leq -2$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Από την άσκηση 3 έχουμε ότι για κάθε $A < 0$ ισχύει $A + \frac{1}{A} \leq -2$ (1)

Θέτουμε στην (1) όπου $A = \frac{\alpha}{\beta} < 0$ αφού α, β ετερόσημοι

Οπότε $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \leq -2$

Για την ισότητα:

Στην άσκηση 3 είδαμε ότι η ισότητα για την σχέση (1), ισχύει όταν $A=-1$.

Άρα $\frac{\alpha}{\beta} = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\beta$

Άσκηση 6: Αν $\alpha, \beta > 0$ να αποδειχθεί ότι: $\left(\alpha + 1 + \frac{1}{\alpha}\right) \left(\beta + 1 + \frac{1}{\beta}\right) \geq 9$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Από την άσκηση 2 έχουμε $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ με $\alpha > 0$ (1)

Ομοίως $\beta + \frac{1}{\beta} \geq 2$ με $\beta > 0$ (2)

Στις σχέσεις (1) και (2) προσθέτουμε και στα δύο μέλη το 1, επομένως θα έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \frac{1}{\alpha} + 1 \geq 2 + 1 \\ \beta + \frac{1}{\beta} + 1 \geq 2 + 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha + \frac{1}{\alpha} + 1 \geq 3 \\ \beta + \frac{1}{\beta} + 1 \geq 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{πολ/ντας κατά μέλη}} \left(\alpha + 1 + \frac{1}{\alpha} \right) \left(\beta + \frac{1}{\beta} + 1 \right) \geq 9$$

Για την ισότητα:

Η ισότητα $\left(\alpha + 1 + \frac{1}{\alpha} \right) \left(\beta + \frac{1}{\beta} + 1 \right) = 9$ ισχύει αν και μόνο αν

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha} = 3 \\ \beta + 1 + \frac{1}{\beta} = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \frac{1}{\alpha} = 2 \\ \beta + \frac{1}{\beta} = 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Άσκηση 2}} \alpha = \beta = 1$$

Άσκηση 7: Αν α, β, γ ομόσημοι να αποδειχθεί ότι: $(\alpha + \beta + \gamma) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) \geq 9$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Η ζητούμενη σχέση $(\alpha + \beta + \gamma) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) \geq 9$ μπορεί να πάρει την μορφή:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\beta} + 3 \geq 9 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\beta} \geq 6 \quad (1)$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι η σχέση (1) ισχύει για α, β, γ ομόσημοι αριθμοί

Από την άσκηση 4 έχουμε $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$ με α, β ομόσημοι (2)

Ομοίως $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} \geq 2$ και $\frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} \geq 2$ με α, β, γ ομόσημοι (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3), έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2 \\ \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} \geq 2 \\ \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} \geq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} \geq 6$$

Για την ισότητα:

$$(\alpha + \beta + \gamma) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} = 6 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2 \\ \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} = 2 \\ \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} = 2 \end{array} \right\} \stackrel{\text{ἀσ.4}}{\Leftrightarrow} \alpha = \beta = \gamma.$$

Μαγειροπούλου Αθηνά

Α' Λυκείου, Π.Π.Λ.Π.Π.