Άσκηση 11: Αν α, β, γ >0 να αποδειχθεί ότι: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} \geq 2\left(\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\alpha+\gamma}\right)$

Λύση

Από την άσκηση 10 έχουμε ότι $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \geq \frac{4}{\alpha+\beta}$ με α, β>0 (1)

Ομοίως $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma} \geq \frac{4}{\alpha+\gamma}$ και $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} \geq \frac{4}{\beta+\gamma}$ με α, β, γ >0 (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε

$$\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma} \geq 4\left(\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha+\gamma}+\frac{1}{\beta+\gamma}\right) \Leftrightarrow$$

$$2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right) \geq 4\left(\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha+\gamma}+\frac{1}{\beta+\gamma}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} \geq 2\left(\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha+\gamma}+\frac{1}{\beta+\gamma}\right)$$

Άσκηση 12: Να αποδειχθεί ότι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \beta\gamma+\alpha\gamma+\beta\alpha \overset{\times 2}{\Leftrightarrow}$$

$$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2 \geq 2\beta\gamma+2\alpha\gamma+2\alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\beta\gamma-2\alpha\gamma-2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+\alpha^2+\beta^2+\beta^2+\gamma^2+\gamma^2-2\beta\gamma-2\alpha\gamma-2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2 \geq 0$$

<u>Για την ισότητα</u>

Η ισότητα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\beta\gamma+\alpha\gamma+\beta\alpha$ ισχύει αν και μόνο αν
$(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2=0$

Που ισχύει για α=β=γ

Άσκηση 13: Να αποδειχθεί ότι $\boldsymbol{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3} \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma}$

Λύση

Έχουμε να αποδείξουμε μια διπλή ανισότητα δηλαδή:

$a^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3}$ και $\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3} \geq \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$

<u>Απόδειξη της πρώτης ανισότητας:</u>

$$a^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3} \Leftrightarrow$$

$$3a^2+3\beta^2+3\gamma^2 \geq \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma \Leftrightarrow$$

$$2a^2+2\beta^2+2\gamma^2 \geq 2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma \Leftrightarrow$$

$$a^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$$

Που ισχύει, όπως αποδείξαμε στην άσκηση 12

<u>Για την ισότητα:</u>

Η ισότητα $a^2+\beta^2+\gamma^2 = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3}$ ισχύει αν και μόνο αν
$a^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ που όπως είδαμε στην άσκηση 12 ισχύει για α=β=γ

<u>Απόδειξη της δεύτερης ανισότητας:</u>

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3} \geq \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma+2\alpha\gamma+2\alpha\beta \geq 3\alpha\beta+3\alpha\gamma+3\beta\gamma \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$$

Που ισχύει, όπως αποδείξαμε στην άσκηση 12

<u>Για την ισότητα:</u>

Η ισότητα $\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3} \geq \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ ισχύει αν και μόνο αν
$a^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ που όπως είδαμε στην άσκηση 12 ισχύει για α=β=γ

Μαργαρίτης Γρηγόρης

Α΄ Λυκείου, Π.Π.Λ.Π.Π.