Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί. Τι σχέση μπορεί να έχουν αυτοί οι αριθμοί;

Μπορεί, να είναι ίσοι: α=β

ή

Να είναι άνισοι, δηλαδή: $\begin{cases} \alpha < \beta \\ \text{ή} \\ \beta > \alpha \end{cases}$

Πρόσθεση πραγματικών αριθμών

- Αν α, β ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί τότε

  i. Άθροισμα θετικών αριθμών, δίνει θετικό αριθμό

  $$\left.\begin{matrix} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha+\beta>0$$

  ii. Άθροισμα αρνητικών αριθμών, δίνει αρνητικό αριθμό

  $$\left.\begin{matrix} \alpha < 0 \\ \beta < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha+\beta<0$$

και

- Αν α, β ετερόσημοι πραγματικοί αριθμοί τότε

  I. Αν α>0 και β<0 με $|\alpha| > |\beta|$ τότε α+β>0

  II. Αν α>0 και β<0 με $|\alpha| < |\beta|$ τότε α+β<0

Παράδειγμα:

I. Έστω α=3>0 και β=-2<0

$$\left.\begin{matrix} |\alpha| = |3| = 3 \\ |\beta| = |-2| = 2 \\ 3 > 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |\alpha| > |\beta|$$

και α+β=3+(-2)=3-2=1>0

II. Έστω α=3>0 και β=-4<0

$$\left.\begin{matrix} |\alpha| = |3| = 3 \\ |\beta| = |-4| = 4 \\ 3 < 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |\alpha| < |\beta|$$

και α+β=3+(-4)=3-4=-1<0

Ενώ στον

Πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών

- Αν α, β ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί:

  i. Έστω α, β > 0 τότε $\alpha \cdot \beta > 0$,
  ii. Έστω α, β < 0 τότε $\alpha \cdot \beta > 0$

και

- Αν α, β ετερόσημοι πραγματικοί αριθμοί:

  Έστω α>0 και β<0 τότε $\alpha \cdot \beta < 0$

Διαίρεση πραγματικών αριθμών

- Αν α, β ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί:

  iii. Έστω α, β > 0 τότε $\frac{\alpha}{\beta} > 0$,
  iv. Έστω α, β < 0 τότε $\frac{\alpha}{\beta} > 0$

και

- Αν α, β ετερόσημοι πραγματικοί αριθμοί:

  Έστω α>0 και β<0 τότε $\frac{\alpha}{\beta} < 0$

Συμπέρασμα: Το γινόμενο και το πηλίκο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός

ενώ το γινόμενο και το πηλίκο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός.

Ιδιότητες της Διάταξης

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί

Αν $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha < \beta \\ \text{ή} \\ \alpha = \beta \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha - \beta < 0 \\ \text{ή} \\ \alpha = \beta \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \alpha - \beta \leq 0$

Αν $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha > \beta \\ \text{ή} \\ \alpha = \beta \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha - \beta > 0 \\ \text{ή} \\ \alpha = \beta \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \alpha - \beta \geq 0$

Μεταβατική ιδιότητα

Αν $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$ τότε $\alpha < \gamma$

Απόδειξη

$$\left.\begin{matrix}\alpha < \beta \\ \beta < \gamma\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\beta - \alpha > 0 \\ \gamma - \beta > 0\end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow} \quad \gamma-\beta+\beta-\alpha>0 \;\Rightarrow\; \gamma-\alpha>0 \Rightarrow\; \gamma>\alpha$$

Ανάλογα: Αν $\alpha \le \beta$ και $\beta \le \gamma$ τότε $\alpha \le \gamma$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν $\alpha \le \beta$ και $\boldsymbol{\beta < \gamma}$ τότε $\boldsymbol{\alpha < \gamma}$

Αντισυμμετρική Ιδιότητα

Αν $\alpha \le \beta$ και $\beta \le \alpha$ τότε $\alpha = \beta$

Απόδειξη

$$\left.\begin{matrix}\alpha \le \beta \\ \beta \le \alpha\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha < \beta \;\; \text{ή} \;\; \alpha = \beta \\ \beta < \alpha \;\; \text{ή} \;\; \beta = \alpha\end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\alpha < \beta \quad \kappa\alpha\iota \quad \beta < \alpha \\ \text{ή} \\ \alpha < \beta \quad \kappa\alpha\iota \quad \beta = \alpha \\ \text{ή} \\ \alpha = \beta \quad \kappa\alpha\iota \quad \beta = \alpha \\ \text{ή} \\ \alpha = \beta \quad \kappa\alpha\iota \quad \beta < \alpha\end{cases} \Rightarrow \; \alpha=\beta$$

Προσοχή: $\left.\begin{matrix}\alpha \le \beta \\ \kappa\alpha\iota \\ \beta < \alpha\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Ατοπο

Αν και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά

$\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma<\beta+\gamma$ και $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha-\gamma<\beta-\gamma$

Απόδειξη

Για την πρόσθεση

$\alpha < \beta \Leftrightarrow \beta-\alpha>0 \Leftrightarrow \beta+\gamma-\gamma-\alpha>0 \Leftrightarrow \beta+\gamma-(\alpha+\gamma)>0 \Leftrightarrow \beta+\gamma>\alpha+\gamma$

Για την αφαίρεση

$\alpha < \beta \Leftrightarrow \beta-\alpha>0 \Leftrightarrow \beta+\gamma-\gamma-\alpha>0 \Leftrightarrow \beta-\gamma-(\alpha-\gamma)>0 \Leftrightarrow \beta-\gamma>\alpha-\gamma$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ τότε $\alpha + \gamma < \beta + \delta$

Απόδειξη

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{\alpha} < \beta \\ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota} \\ \boldsymbol{\gamma} < \delta \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} < 0 \\ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota} \\ \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\delta} < 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\delta}) < 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma}) - (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta}) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma} < \beta + \delta$$

ΟΜΟΙΩΣ: Αν $\alpha \leq \beta$ και $\gamma \leq \delta$ τότε $\alpha + \gamma \leq \beta + \delta$

Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$ και Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$

Απόδειξη

$$\left.\begin{matrix} \beta - \alpha > 0 \\ \gamma > 0 \end{matrix}\right\} \overset{\cdot}{\Rightarrow} \gamma(\beta - \alpha) > 0 \Rightarrow \gamma\beta - \gamma\alpha > 0 \Rightarrow \gamma\alpha < \gamma\beta$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma \geq 0$ τότε $\alpha\gamma \geq \beta\gamma$

Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά.

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ ΚΑΙ Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

Απόδειξη

$$\left.\begin{matrix} \beta - \alpha > 0 \\ \gamma < 0 \end{matrix}\right\} \overset{\cdot}{\Rightarrow} \gamma(\beta - \alpha) < 0 \Rightarrow \gamma\beta - \gamma\alpha < 0 \Rightarrow \gamma\alpha > \gamma\beta$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma \leq 0$ τότε $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$

Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

Αν α, β, γ, δ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με α>β και γ>δ τότε αγ>βδ

- **Γενίκευση:** Αν α, β>0 και α>β τότε $\alpha^{\nu} > \beta^{\nu}$

Απόδειξη

$$\nu: \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma \left\{ \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \left.\begin{cases} \alpha > \beta \\ \alpha > \beta \end{cases}\right\} \alpha^2 > \beta^2 \\ \alpha > \beta \end{matrix}\right\} \alpha^3 > \beta^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha > \beta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha^{\nu} > \beta^{\nu}, \qquad \nu \in IN^*$$

Ομοίως: Αν α, β, γ, δ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με α≥β και γ≥δ τότε αγ≥βδ

- Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε:

  Αν ν$\in IN^*$ και ν: περιττός : $\alpha^{\nu} < \beta^{\nu} \Leftrightarrow \alpha < \beta$

  Αν ν$\in IN^*$ και ν: άρτιος : $\alpha^{\nu} < \beta^{\nu} \Leftrightarrow |\alpha| < |\beta|$

- Αν α, β >0 τότε: α=β ⇔ $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$
- Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε:

  Αν ν$\in IN^*$ και ν: περιττός: $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu} \Rightarrow$ α=β

  Αν ν$\in IN^*$ και ν: άρτιος $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu} \Rightarrow |\alpha| = |\beta|$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Υπενθυμίζουμε ότι **το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού α είναι μη αρνητικός** αριθμός, δηλαδή ισχύει $\alpha^2 \geq 0$. Επομένως:
  - Αν α, β πραγματικοί αριθμοί τότε $(\alpha - \beta)^2$
  - Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε: $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow$ α=β=0

Ενώ αν $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow$ α$\neq 0$ ή β$\neq 0$

- **Δεν επιτρέπεται** να αφαιρούμε ή να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.

Δηλαδή

αν α<β και γ<δ δεν συνεπάγεται α- γ < β-δ

αν α<β και γ<δ δεν συνεπάγεται $\frac{α}{γ} < \frac{β}{δ}$

ΑΛΛΑ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΓΙΝΕΙ ΤΟ ΕΞΗΣ:

Για την αφαίρεση έχουμε:

$$\left.\begin{matrix} \alpha < \beta \\ \kappa\alpha\iota \\ \gamma < \delta \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \alpha < \beta \\ \kappa\alpha\iota \\ -\delta < -\gamma \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \alpha + (-\delta) < \beta + (-\gamma) \Leftrightarrow \alpha - \delta < \beta - \gamma$$

Για την διαίρεση έχουμε:

$$\left.\begin{matrix} \alpha < \beta \\ \kappa\alpha\iota \\ \gamma < \delta \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \alpha < \beta \\ \kappa\alpha\iota \\ \frac{1}{\delta} < \frac{1}{\gamma} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \alpha \cdot \frac{1}{\delta} < \beta \cdot \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\delta} < \frac{\beta}{\gamma}$$

- Οι πιο πολλές ιδιότητες των ανισοτήτων ισχύουν για μη αρνητικούς αριθμούς (α≥ 0) και για αυτό το λόγο χρειάζεται κάθε φορά να ελέγχουμε, αν πληρούνται οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή των ιδιοτήτων αυτών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς ισχύει η ανισότητα**:** $α^2 + β^2 \geq 2αβ$

Πότε ισχύει η ισότητα;

2. Αν α>0 να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \frac{1}{a} \geq 2$

Πότε ισχύει η ισότητα;

3. Αν α<0 να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \frac{1}{a} \leq -2$

Πότε ισχύει η ισότητα;

4. Αν α, β ομόσημοι να αποδειχθεί ότι: $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2$

Πότε ισχύει η ισότητα;

5. Αν α, β ετερόσημοι να αποδειχθεί ότι: $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\leq -2$

Πότε ισχύει η ισότητα;

6. Αν α, β>0 να αποδειχθεί ότι: $\left(\alpha+1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+1+\frac{1}{\beta}\right)\geq 9$

Πότε ισχύει η ισότητα;

7. Αν α, β, γ ομόσημοι να αποδειχθεί ότι: $(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\geq 9$

8. Έστω α, β ∈ IR τέτοια ώστε: $\alpha\leq 2\leq \beta$ Να αποδειχθεί ότι:

α) $\alpha^2+2\beta\geq \alpha\beta+2\alpha$

β) Αν $\alpha^2+2\beta=\alpha\beta+2\alpha$ να δείξετε ότι α=2

9. Έστω α, β ∈ IR να αποδειχθεί ότι $(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta$

10. Αν α, β>0 να αποδειχθεί ότι:

i. $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\geq\frac{4}{\alpha+\beta}$

ii. $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq\frac{4}{\alpha+\beta}$

11. Αν α, β, γ >0 να αποδειχθεί ότι: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\geq 2\left(\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\alpha+\gamma}\right)$

12. Να αποδειχθεί ότι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma$

Πότε ισχύει η ισότητα;

13. Να αποδειχθεί ότι $α^2 + β^2 + γ^2 \geq \frac{(α+β+γ)^2}{3} \geq αβ + βγ + αγ$

14. Αν α, β>0 να αποδειχθεί ότι $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$

15. Για μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς να αποδειχθεί ότι: $\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta} \geq \frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}$

16. Αν α, β, γ >0 να αποδειχθεί ότι: $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \geq \frac{3}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}$

Πότε ισχύει η ισότητα;

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η γενίκευση της παραπάνω σχέσης

Αν $α_1$, $α_2$, $α_3$,.....,$α_ν$>0 τότε $\frac{\alpha_1+\alpha_{2\ldots\ldots}+\alpha_\nu}{\nu} \geq \sqrt[\nu]{\alpha_1.\alpha_2 \cdot \ldots . \cdot \alpha_\nu} \geq \frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots\frac{1}{\alpha_\nu}}$

Η ισότητα ισχύει αν $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\nu$

17. Αν α,β, γ >0 να αποδειχθεί ότι: $(α + β)(β + γ)(γ + α) \geq 8αβγ$

18. Αν α, β, γ>0 να αποδειχθεί ότι: $\left(\alpha + \frac{\beta}{\alpha\gamma}\right)\left(\beta + \frac{\gamma}{\alpha\beta}\right)\left(\gamma + \frac{\alpha}{\beta\gamma}\right) \geq 8$

19. Αν α, β, γ≥ 0 να αποδειχθεί ότι:

i. $(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) \geq 9\alpha\beta\gamma$

ii. $(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq 9\alpha\beta\gamma$

20. Για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς να αποδειχθεί ότι:

i. $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + \beta y)^2$

ii. $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + \beta y + \gamma z)^2$

21. Να αποδειχθεί ότι: $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\alpha+\gamma}+\frac{\gamma}{\beta+\alpha} \geq \frac{3}{2}$

22. Αν α, β, γ>0 να αποδειχθεί ότι: $\frac{\alpha}{\beta^3}+\frac{\beta}{\gamma^3}+\frac{\gamma}{\alpha^3} \geq \frac{27}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$

23. Αν α, β ≥ 0 να αποδειχθεί ότι:

i. $\alpha^5+\beta^5 \geq \beta\alpha(\alpha^3+\beta^3) \geq \alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$

ii. $\alpha^3+\beta^3 \geq \beta\alpha(a+\beta)$

iii. $\alpha^4+\beta^4 \geq \beta\alpha(\alpha^2+\beta^2)$

Γενίκευση: $\alpha^\nu+\beta^\nu \geq \beta\alpha(\alpha^\nu+\beta^\nu) \geq \alpha^2\beta^2(\alpha^{\nu-2}+\beta^{\nu-2})$

24. Αν α, β, γ >0

i. Να αποδειχθεί ότι: $\frac{(\alpha^3+\beta^3)(\beta^3+\gamma^3)(\alpha^3+\gamma^3)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} \geq (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)$

ii. και αν αβγ=1 να αποδειχθεί ότι: $\frac{\alpha\beta}{\alpha^5+\beta^5+\gamma^5}+\frac{\beta\gamma}{\beta^5+\gamma^5+\beta\gamma}+\frac{\alpha\gamma}{\alpha^5+\gamma^5+\alpha\gamma} \leq 1$