ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΔΙΑΤΑΞΗ

1. Για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς ισχύουν οι ανισότητες:

i. $2(\alpha^2+\beta^2) \geq (\alpha+\beta)^2$

ii. $(\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

iii. $3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \geq (\alpha+\beta+\gamma)^2$

2. Αν α, β, γ ∈ ℝ και αβγ=1, να αποδειχθεί ότι $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 \geq \alpha+\beta+\gamma$

3. Αν α, β, γ ≥ 0, να αποδειχθεί ότι:

$$(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)(\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2)(\gamma^2-\gamma\alpha+\alpha^2) \geq \alpha^2\beta^2\gamma^2$$

4. Αν α, β, γ>0, να αποδειχθεί ότι: $\left(\alpha+1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+1+\frac{1}{\beta}\right)\left(\gamma+1+\frac{1}{\gamma}\right) \geq 27$

5. Για μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς ισχύει ότι:

i. $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma$

ii. $\alpha+\beta+\gamma \geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$

6. Αν α, β, γ, δ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$(1+\alpha^4)(1+\beta^4)(1+\gamma^4)(1+\delta^4) \geq (1+\alpha\beta\gamma\delta)^4$$

7. Αν α, β, γ >0 να αποδειχθεί ότι:

$$(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right) \geq (\alpha+\beta+\gamma)^2$$

8. Αν α, β >0, τότε να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \geq \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}$

β. $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \geq \frac{\alpha+\beta}{2}$

γ. $\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$

9. Αν α, β, γ ≥ 0, τότε $\sqrt{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)} \geq \sqrt{\alpha\gamma}+\sqrt{\beta\delta}$

10. Αν α, β, γ>0 και x, y, ω ∈ ℝ τότε:

i. $\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta} \geq \frac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}$

ii. $\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{\omega^2}{\gamma}\geq\frac{(x+y+\omega)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$

11. Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί και αβγ=1, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)}+\frac{1}{\beta^3(\gamma+\alpha)}+\frac{1}{\gamma^3(\alpha+\beta)}\geq\frac{3}{2}$$

36$^{\eta}$ I.M.O.-1995

12. Αν α, β, γ >0 και $\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\beta}+\frac{1}{1+\gamma}=1$, να αποδειχθεί ότι αβγ$\geq 8$

Team Selection Test, Ρουμανία 2003

13. Αν α, β, γ >0 με αβγ=1, να αποδειχθεί ότι: $1+\frac{3}{\alpha+\beta+\gamma}\geq\frac{6}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}$

14. Αν α, β, γ >0 με α+β+γ=1 και οι αριθμοί 3α-β, 3β-γ και 3γ-α είναι επίσης θετικοί, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\alpha^3}{3\alpha-\beta}+\frac{\beta^3}{3\beta-\gamma}+\frac{\gamma^3}{3\gamma-\alpha}\geq\frac{1}{6}$$

15. Αν x, y, ω>0 και xyω=1, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{x+xy}+\frac{1}{y+y\omega}+\frac{1}{\omega+\omega x}\geq\frac{3}{2}$$

G.M 2000

16. Αν α, β, γ>0 με αβ+βγ+γα=$\frac{1}{3}$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta\gamma+1}+\frac{\beta}{\beta^2-\gamma\alpha+1}+\frac{\gamma}{\gamma^2-\alpha\beta+1}\geq\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$$

17. Αν x, y, ω >-1, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1+x^2}{1+y+\omega^2}+\frac{1+y^2}{1+\omega+x^2}+\frac{1+\omega^2}{1+x+y^2}\geq 2$$

Βαλκανιάδα Νέων 2003

18. Έστω x, y, z θετικοί αριθμοί με $x^2+y^2+z^2=3$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης S=$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}$