

Ασκήσεις επανάληψης

1. Θεωρούμε δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,7$ και $P(A \cap B) = 0,2$.
 - α) Να βρείτε την πιθανότητα $P(B)$.
 - β) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το A ή το B.
 - γ) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A, B.
2. Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν
$$B \subseteq A, P(A) = \frac{2}{3} \text{ και } P(B) = \frac{1}{3}.$$
Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.
3. Σε ένα τμήμα του σχολείου υπάρχουν 8 αγόρια και 12 κορίτσια. Το $\frac{1}{4}$ των αγοριών και το $\frac{1}{3}$ των κοριτσιών έχουν μαύρα μάτια. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή του τμήματος να βρείτε την πιθανότητα
 - α) να είναι κορίτσι.
 - β) να έχει μαύρα μάτια.
 - γ) να είναι αγόρι και να μην έχει μαύρα μάτια.
4. Σε ένα σχολείο τα ποσοστά των μαθητών της Α' Λυκείου που άριστευσαν στην Άλγεβρα είναι 15%, στη Γεωμετρία 7% ενώ το 5% άριστευσε και στα δύο αυτά μαθήματα. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή της Α' Λυκείου από το παραπάνω σχολείο. Να βρείτε την πιθανότητα:
 - α) ο μαθητής να άριστευσε σε ένα τουλάχιστον από τα δύο μαθήματα.
 - β) ο μαθητής να άριστευσε στην Άλγεβρα αλλά όχι στη Γεωμετρία.
 - γ) ο μαθητής να άριστευσε σε ένα μόνο από τα δύο μαθήματα.
5. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος και A ένα ενδεχόμενο του Ω . Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $|P(A) - 2| + |P(A) + 1| + P(\Omega)$.
6. Αν η εξίσωση $(\lambda^2 - 4)x = 3\lambda - 6$ είναι αόριστη να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια για αυτή την τιμή του λ να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x = \lambda + 7$.
7. Αν η εξίσωση $(\alpha - 7)x = \alpha + 5$ είναι αδύνατη να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια για αυτή την τιμή του α να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^2 - (3 - \alpha)x - 2 + \alpha = 1$.
8. Αν η εξίσωση $\lambda x^2 - 2x + 1 = 0$ έχει μια διπλή ρίζα να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια για αυτή την τιμή του λ να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $(\lambda + 3)x = 3\lambda - 3$.
9. Να λύσετε τις ανισώσεις:
 - α) $|x - 7| < 1$
 - β) $|4 - x| > 2$.

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x^2 - 3x| - 4 = 0$

β) $|2x - 3| = 7$

γ) $|-2x| = x + 9$

δ) $|4x - 5| = -3$

11. Αν $1 < x < 3$ να αποδείξετε ότι $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2$.

12. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα $2x^2 + x - 10$ και $-3x^2 - 4x + 7$.

13. Να λύσετε τις ανισώσεις $2x^2 - x - 6 < 0$ και $-3x^2 - 2x + 8 < 0$.

14. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\kappa - 1)x - \kappa + 1 = 0$.

α) Για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $x_1 + x_2 < 2x_1x_2 + 3$.

15. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$.

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

β) Να λύσετε την ανίσωση $A \leq 1$.

16. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 - 4x + \lambda + 2 = 0$ με $\lambda \neq 1$.

α) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ανίσωση $(\lambda - 1)x^2 - 4x + \lambda + 2 < 0$ αληθεύει για κάθε τιμή του x .

17. Δίνεται η παράσταση $A = |3 - x| - 4$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $A = 0$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $A \leq 6$.

18. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{4 - x}{x^2 - 4x + 3} \leq 0$.

19. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (2\lambda - 2)x + \lambda^2 - 5 = 0$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

γ) Έστω x_1, x_2 δύο άνισες ρίζες της εξίσωσης. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $x_1x_2 = 17 - (x_1 + x_2)$.

20. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{|x-2|-3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{|x-2|+5}{6}$.

21. Να λύσετε την ανίσωση $(x-2)(-2x^2 + 5x - 3) < 0$.

22. α) Να αποδείξετε ότι $-x^2 + x - 4 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
β) Να λύσετε την ανίσωση $|-x^2 + x - 4| > 2x + 2$.
23. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + x - \kappa^2 = 0$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες.
β) Αν x_1, x_2 είναι δύο ρίζες της εξίσωσης να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύει $x_1(\kappa + x_2) + \kappa x_2 > -6$.
24. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{-x^2 + x + 2}$.
α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A.
β) Αν $|x| < 1$ να απλοποιήσετε την παράσταση $B = A^2 + |x - 3| + |x + 2|$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $B = 7 - 4x$.
25. Αν α είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $x^5 - 81x = 0$ να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\sqrt{\alpha + 1}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha - 1}} = \sqrt{\alpha}$.
26. Αν $-1 < x < 3$ να απλοποιήσετε την παράσταση $2\sqrt{x^2 + 2x + 1} - |x - 3| + \frac{12}{|x + 2| + \sqrt{x^2 - 8x + 16}}$.
27. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 4$ και $B = 2|x| + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} - \sqrt{2}$.
α) Να αποδείξετε ότι $A = |x - 2| - 4$ και $B = 2|x| - 1$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $A = B - 3$.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $A + 1 < 0$.
28. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 1 = 0$ με $\lambda \neq -2$.
α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.
β) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο άνισες ρίζες της εξίσωσης να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $x_1 + x_2 > \lambda$.
29. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{5} - 3$ και $\beta = \sqrt{5} + 3$.
α) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις α^2 και β^2 .
β) Να απλοποιήσετε την παράσταση $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} + \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$.
γ) Να γράψετε το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.
30. α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2 + x - 4$.
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται το κλάσμα $A = \frac{3x^2 + x - 4}{x - x^3}$ και στη συνέχεια να το απλοποιήσετε.
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $A \leq 0$.

31. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{3|x-2|-5}{2} - \frac{|2-x|-1}{3} = \frac{|3x-6|-2}{4}$.

32. Δίνονται οι παραστάσεις $A = |x-4|$ και $B = |x+1|$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $A = 9$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $B \leq 5$.

γ) Αν $-1 \leq x \leq 4$ να αποδείξετε ότι $A + B = 5$.

33. Δίνεται η εξίσωση $6x^2 - x - 1 = 0$ με ρίζες ρ_1, ρ_2 όπου $\rho_1 < \rho_2$.

α) Να βρείτε τα ρ_1 και ρ_2 .

β) Να λύσετε την εξίσωση $5 - \rho_1|x-2| = |2x-8\rho_2|$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $1 \leq \sqrt{x^2 - 2x + 1} < -\frac{1}{\rho_1}$.

34. Δίνονται οι παραστάσεις $A = |3x-2|$ και $B = 1 + |4-x|$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $A = 1$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $B \leq 4$.

γ) Να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $(A+1)(B-3) = 0$.

35. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 4x + \mu = 0$ η οποία έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες x_1, x_2 .

α) Να αποδείξετε ότι $\mu < 2$.

β) Αν $x_1 \cdot x_2 = -3$ να βρείτε την τιμή του μ .

γ) Να λύσετε την εξίσωση για $\mu = -6$ και να βρείτε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες $2x_1, 2x_2$.

36. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 0$.

α) Χωρίς να λύσετε την εξίσωση να αποδείξετε ότι έχει δύο ρίζες ετερόσημες.

Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $x_1 > 0$ και $x_2 < 0$.

β) Να βρείτε τα x_1, x_2 .

γ) Να βρείτε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες $x_1 + x_2$ και $x_1 x_2$.

δ) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x_1 και $x_1 - 2$ είναι αντίστροφοι.