Ανισοτικές σχέσεις

1. Δίνεται γωνία $x\widehat{O}y$ και η διχοτόμος της Oδ. Από ένα σημείο B της Oy φέρνουμε την BA κάθετη στην Ox. Αν η AB τέμνει την Oδ στο M να αποδείξετε ότι $MA < MB$.

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Δ στη βάση ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $A\Delta < AB$.

3. Οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ ενός τριγώνου ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ τέμνονται στο Ι. Να αποδείξετε ότι $IB < I\Gamma$.

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η πλευρά ΒΓ είναι η μικρότερη. Αν Δ είναι σημείο της ΒΓ να αποδείξετε ότι $\alpha + A\Delta < \beta + \gamma$.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Ε, ώστε $AE = AB$.
   (α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Delta E$.
   (β) Να αποδείξετε ότι $B\Delta < \Delta\Gamma$. (Υπόδειξη: $\Gamma\widehat{E}\Delta = \widehat{B}_{\varepsilon\xi} > \widehat{\Gamma}$)

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και ένα σημείο Δ στην πλευρά ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $\Delta B > \Delta\Gamma$.

7. Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $AB > B\Gamma > A\Delta > \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\widehat{A} < \widehat{\Gamma}$ και $\widehat{B} < \widehat{\Delta}$.

8. Στις κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E < B\Gamma$.

9. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $AB < A\Gamma$ και Δ εσωτερικό σημείο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $A\Delta < A\Gamma$.

10. Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $AB = \Gamma\Delta$ και $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma > B\Delta$ και $\widehat{A} < \widehat{\Delta}$.

11. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ ενός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\tau < AE + BZ + \Gamma\Delta < 3\tau$.

12. Έστω Μ σημείο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και έστω Δ, Ε οι προβολές του Μ στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E < B\Gamma$.

13. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και η μεσοκάθετός του ε. Στο ημιεπίπεδο (ε, B) παίρνουμε σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι $PA > PB$.

14. Στην προέκταση της πλευράς ΓΑ (προς το Α) ενός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε ένα σημείο Δ, ώστε $A\Delta = AB$. Έστω Μ τυχαίο σημείο της διχοτόμου της γωνίας $B\widehat{A}\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\text{ΜΒ} = \text{ΜΔ}$.
(β) $\text{ΜΒ} + \text{ΜΓ} > \text{ΑΒ} + \text{ΑΓ}$.

15. (α) Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με ίσες υποτείνουσες ΒΓ και ΕΖ. Αν $\hat{\Gamma} < \hat{Z}$ να αποδείξετε ότι $\text{ΑΒ} < \text{ΔΕ}$.
(Υπόδειξη: Προεκτείνουμε την ΑΒ προς το Α κατά τμήμα $\text{ΑΗ} = \text{ΑΒ}$ και την ΔΕ προς το Δ κατά τμήμα $\Delta\Theta = \text{ΔΕ}$ και συγκρίνουμε τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΓΗ και ΕΖΘ.
(β) Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta > \gamma$ να αποδείξετε ότι $\upsilon_\beta < \upsilon_\gamma$.
(Υπόδειξη: Έστω ΒΔ και ΓΕ τα ύψη. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΓΕ έχουν κοινή υποτείνουσα την ΒΓ).

16. Δίνεται κύκλος $(\text{Ο}, \rho)$ και ένα σημείο Μ στο εξωτερικό του. Αν Α και Β είναι δύο σημεία του κύκλου τέτοια, ώστε $\text{Α}\hat{\text{Ο}}\text{Μ} > \text{Β}\hat{\text{Ο}}\text{Μ}$ να αποδείξετε ότι $\text{ΜΑ} > \text{ΜΒ}$.

17. Έστω Δ, Ε, Ζ σημεία των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα ενός τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ΔΕΖ είναι μικρότερη από την περίμετρο του ΑΒΓ.

18. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΒΓ προς το Β σημείο Δ, ώστε $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = \Delta\hat{\text{Α}}\text{Β}$. Στην προέκταση της ΒΓ προς το Γ παίρνουμε σημείο Ε, ώστε $\Gamma\hat{\text{Α}}\text{Ε} = \Gamma\hat{\text{Ε}}\text{Α}$. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι μικρότερη από $\text{ΑΔ} + \text{ΑΕ}$.