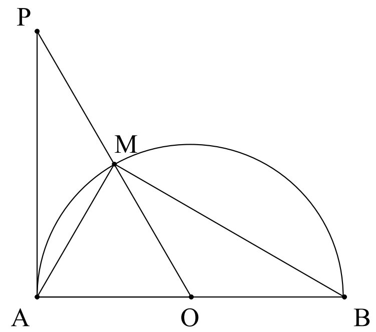
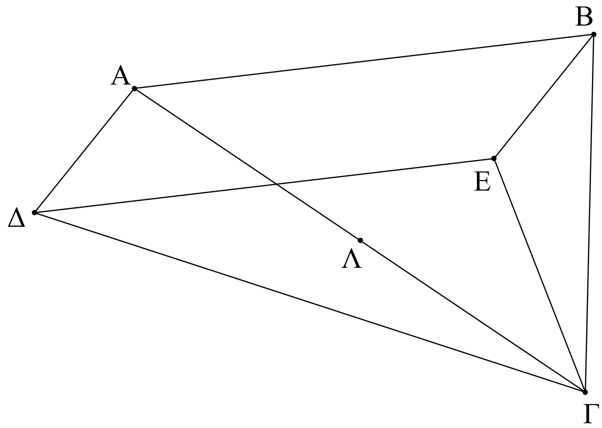
Ασκήσεις επανάληψης

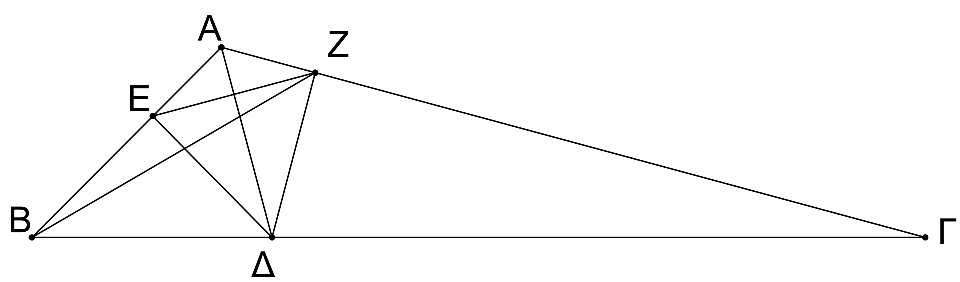
1. Δίνεται ημικύκλιο (O,R) διαμέτρου ΑΒ και εφαπτόμενο τμήμα ΡΑ. Αν το ημικύκλιο τέμνει το ΡΟ στο μέσο του Μ, να αποδείξετε ότι:
   (α) το τρίγωνο ΟΑΡ είναι ορθογώνιο.
   (β) το τρίγωνο ΑΜΟ είναι ισόπλευρο.
   (γ) $A\hat{B}M = 30^o$.
   (δ) το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ορθογώνιο.



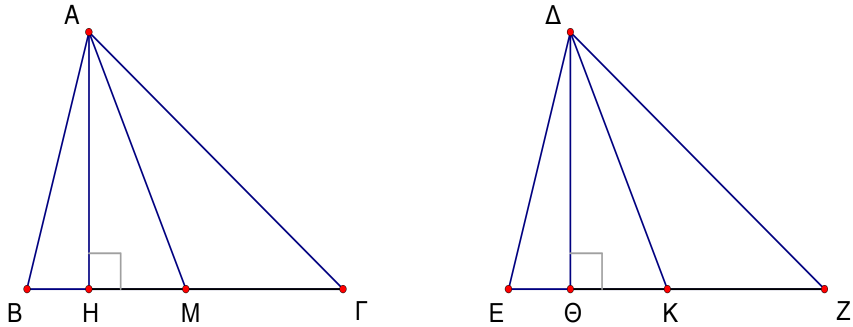
2. Στο διπλανό σχήμα το τμήμα ΔΕ είναι ίσο και παράλληλο με το ΑΒ.
   (α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι παραλληλόγραμμο.
   (β) Έστω Κ το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΕΔ και Λ το μέσο της ΑΓ. Να αποδείξετε ότι το ΕΓ είναι παράλληλο προς το ΚΛ και διπλάσιο από αυτό.
   (γ) Να βρείτε ένα σημείο Σ τέτοιο, ώστε τα τρίγωνα ΣΕΒ και ΣΕΓ να είναι ισοσκελή με βάσεις ΕΒ και ΕΓ αντίστοιχα. (Να περιγράψετε τον τρόπο που βρήκατε το σημείο Σ).



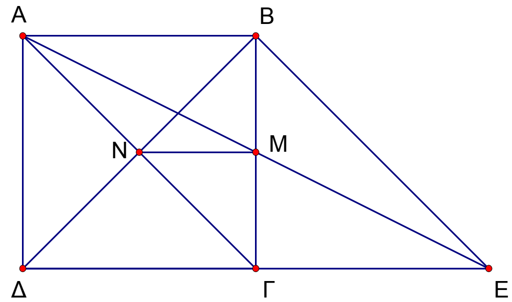
3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 120^o$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Φέρουμε τις ΔΕ, ΔΖ κάθετες στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Δίνεται ότι $\Delta Z = BE$.
   (α) Να αποδείξετε ότι $\Delta E = \Delta Z$.
   (β) Να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{\Delta}Z$.
   (γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.
   (δ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ.
   (ε) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{B}Z$.



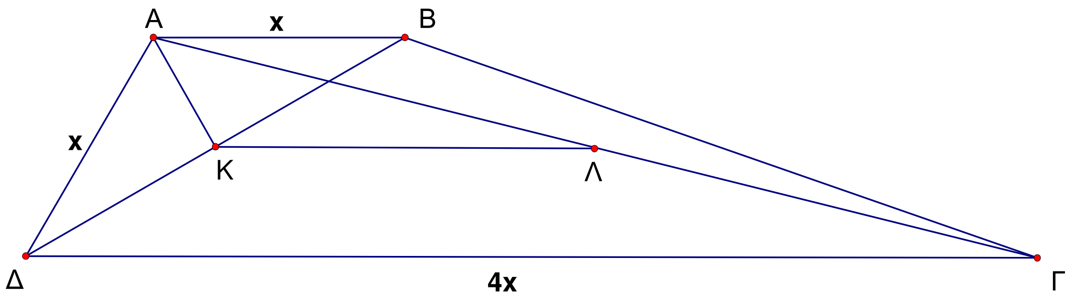
4. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ. Έστω ΑΜ, ΑΗ η διάμεσος και το ύψος του ΑΒΓ και ΔΚ, ΔΘ η διάμεσος και το ύψος του ΔΕΖ. Αν ΑΜ = ΔΚ, ΑΗ = ΔΘ και ΒΓ = ΕΖ να αποδείξετε ότι:
   (α) $A\hat{M}B = \Delta\hat{K}E$.
   (β) ΑΒ = ΔΕ .
   (γ) ΑΓ = ΔΖ .



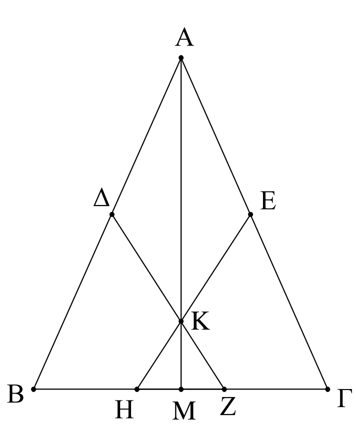
5. Προεκτείνουμε την πλευρά ΔΓ τετραγώνου ΑΒΓΔ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $ΓΕ = ΔΓ$. Αν Ν και Μ τα σημεία τομής των ΑΓ, ΔΒ και ΑΕ, ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
(α) το ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.
(β) το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ορθογώνιο.
(γ) $MN = \frac{1}{4}ΔE$.



6. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ = ΑΔ = x, ΔΓ = 4x και $B\hat{A}Δ = 120^o$. Έστω Κ και Λ τα μέσα των διαγωνίων ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι το ΑΚ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΔ.
β) Να αποδείξετε ότι 2ΚΛ = 3x.
γ) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΚ ως συνάρτηση του x.
δ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $A\hat{K}Λ$.



7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AΓ$ και σημείο Κ της διαμέσου ΑΜ. Στις ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε σημεία Δ, Ε αντίστοιχα τέτοια ώστε $AΔ = AE$. Η ΔΚ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ζ και η ΕΚ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Η.
(α) Να αποδείξετε ότι $ΔK = EK$.
(β) Να αποδείξετε ότι $BH = ZΓ$.

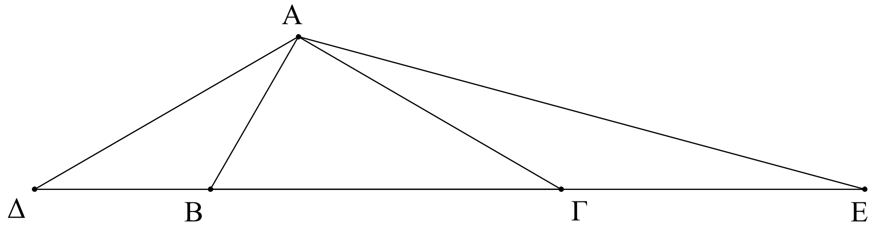


8. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}=90^o$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το σημείο Β κατά τμήμα ΒΔ ίσο με την πλευρά ΑΒ και προς το σημείο Γ κατά τμήμα ΓΕ ίσο με την πλευρά ΑΓ.

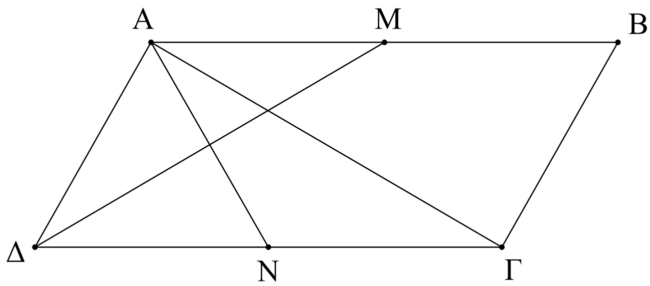
(α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\Delta\widehat{A}E$.

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

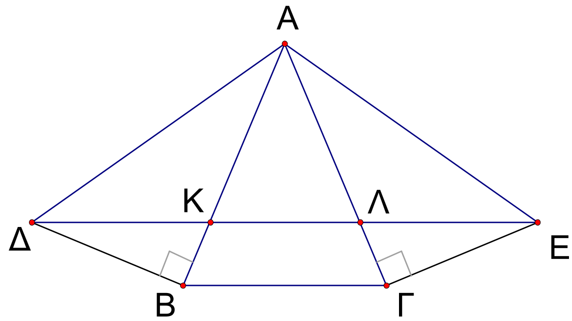
(γ) Αν $\widehat{\Gamma}=30^o$ να αποδείξετε ότι ΔΓ = 3ΑΒ.



9. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\widehat{A}=120^o$, Μ μέσο του ΑΒ και Ν μέσο του ΓΔ. Αν ΔΜ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$ να αποδείξετε ότι:
(α) Το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές.
(β) Το τετράπλευρο ΑΜΝΔ είναι ρόμβος.
(γ) Το τρίγωνο ΑΔΝ είναι ισόπλευρο.
(δ) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο.
(ε) Το τετράπλευρο ΑΒΓΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



10. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ φέρουμε $B\Delta \perp BA$ και $\Gamma E \perp \Gamma A$ με ΒΔ = ΓΕ (όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα). Η ΔΕ τέμνει την ΑΒ στο Κ και την ΑΓ στο Λ. Να αποδείξετε ότι:
(α) ΑΔ = ΑΕ.
(β) Τα τρίγωνα ΑΔΚ και ΑΕΛ είναι ίσα.
(γ) ΚΛ//ΒΓ.



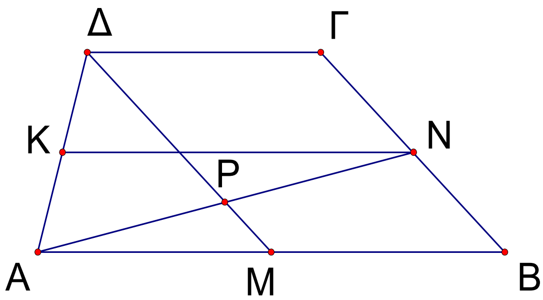
11. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με $AB=2\Delta\Gamma$. Αν Κ, Μ, Ν είναι τα μέσα των ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα και Ρ το σημείο τομής των ΑΝ και ΔΜ, να αποδείξετε ότι:

(α) $KN=\dfrac{3\Delta\Gamma}{2}$.

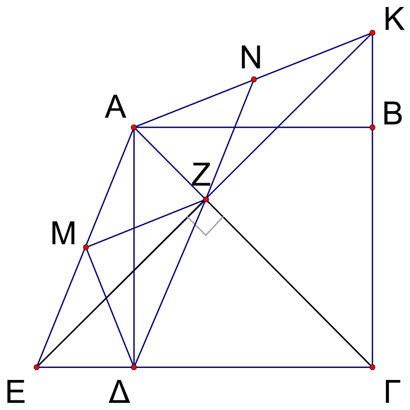
(β) το ΔΓΒΜ είναι παραλληλόγραμμο.

(γ) $AP=PN$.

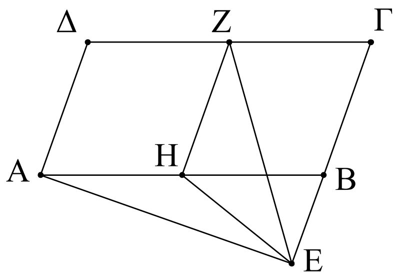
(δ) $\Delta P=3PM$.



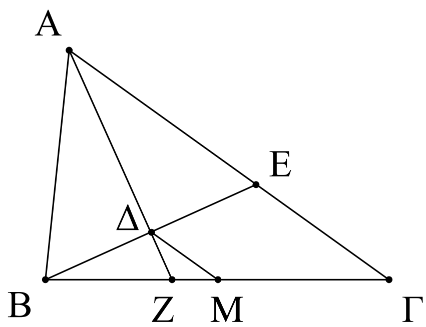
12. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημείο Ε στην προέκταση της πλευράς ΓΔ προς το Δ. Από το Ε φέρουμε ευθεία κάθετη στην ΑΓ, που τέμνει την ΑΓ στο Ζ και την προέκταση της ΓΒ στο Κ. Αν Μ, Ν μέσα των ΑΕ, ΑΚ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
(α) Το τρίγωνο ΜΔΖ είναι ισοσκελές.
(β) Η ΓΖ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΕΓΚ .
(γ) Το τετράπλευρο ΑΝΖΜ είναι ρόμβος.
(δ) Αν επιπλέον ισχύει $ΕΔ = ΖΝ$ να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $Ε\widehat{Α}Δ$.



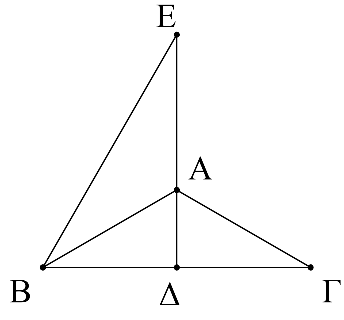
13. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = 2ΒΓ$. Από την κορυφή Α φέρουμε την ΑΕ κάθετη στην ΒΓ. Έστω Η, Ζ τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
(α) το τετράπλευρο ΗΒΓΖ είναι ρόμβος.
(β) τα τρίγωνα ΗΕΒ, ΗΕΖ είναι ισοσκελή.
(γ) το τετράπλευρο ΕΗΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
(δ) $Δ\widehat{Ζ}Ε = 3Ζ\widehat{Ε}Γ$.



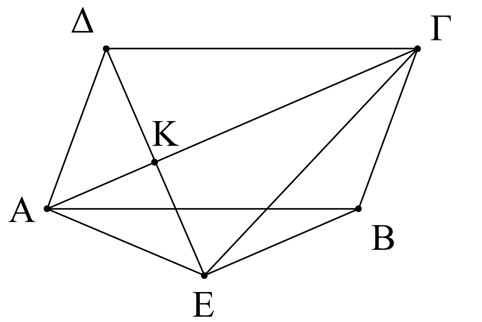
14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΖ και τη ΒΔ κάθετη στην ΑΖ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ε. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:
(α) $ΔΜ = \dfrac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$.
(β) $Δ\widehat{Β}Γ = \dfrac{\widehat{Β} - \widehat{Γ}}{2}$.
(γ) $Β\widehat{Δ}Μ = 90^\circ + \dfrac{\widehat{Α}}{2}$.



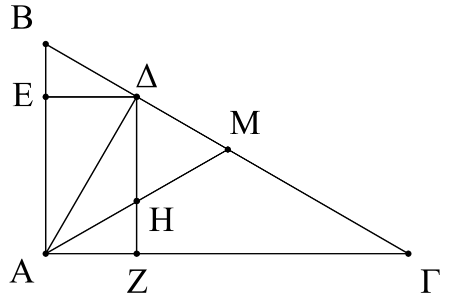
15. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $Β\widehat{Α}Γ = 4Α\widehat{Β}Γ$. Στην προέκταση του ύψους ΑΔ προς το Α παίρνουμε τμήμα $ΑΕ = ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι:
(α) $\widehat{Α} = 120^\circ$.
(β) τα τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΒΓ είναι ίσα.
(γ) $ΓΑ \perp ΒΕ$.



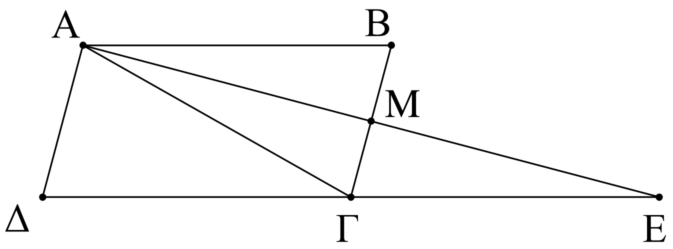
16. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB > B\Gamma$. Φέρουμε την $\Delta K \perp A\Gamma$ και στην προέκταση της ΔΚ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $KE = \Delta K$. Να αποδείξετε ότι:
(α) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.
(β) $E\Gamma = \Gamma\Delta$.
(γ) το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



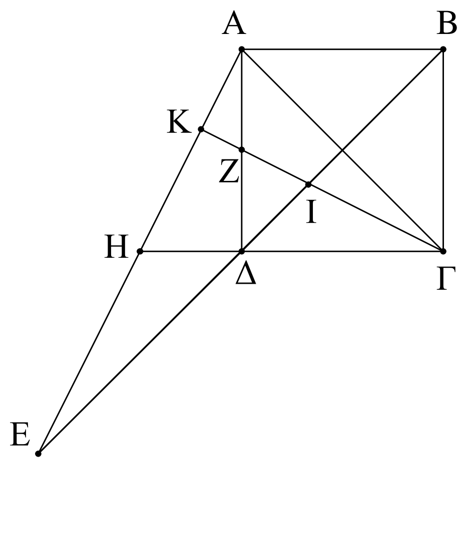
17. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^o$ και $AB < A\Gamma$ φέρουμε το ύψος ΑΔ και τις $\Delta E \perp AB$ και $\Delta Z \perp A\Gamma$. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τη ΔΖ στο Η να αποδείξετε ότι:
(α) τα τρίγωνα ΑΗΖ, ΒΔΕ είναι ίσα.
(β) το τετράπλευρο ΒΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.
(γ) $A\Delta = BH$.



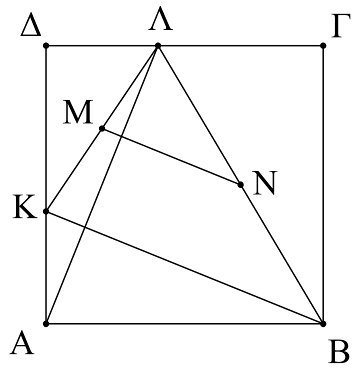
18. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = A\Gamma$ και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Αν η ΑΜ τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι:
(α) $AM = ME$.
(β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ορθογώνιο.
(γ) το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι ρόμβος.
(δ) το Γ είναι το μέσο του ΔΕ.



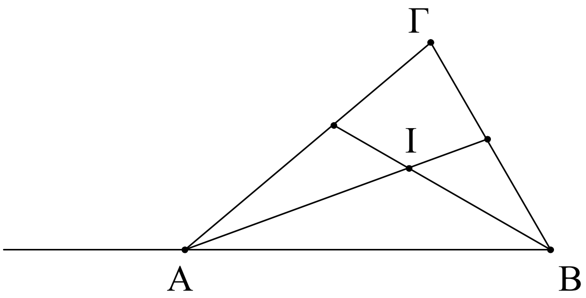
19. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και στην προέκταση της ΒΔ τμήμα $\Delta E = B\Delta$. Αν Η είναι το σημείο τομής των ΑΕ και ΓΔ, Ζ είναι το μέσο της ΑΔ και η ΓΖ τέμνει τις ΒΔ και ΑΕ στα σημεία Ι και Κ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
(α) $\Delta H = \frac{1}{2}AB$.
(β) τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΓΔ είναι ίσα.
(γ) η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ.
(δ) το Γ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΙΕ.



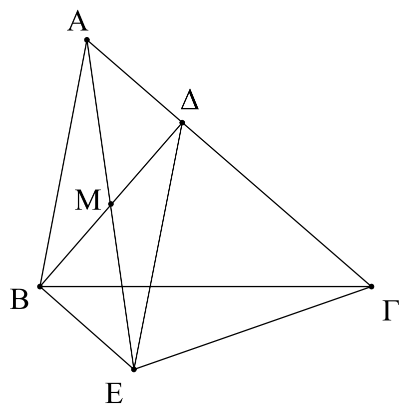
20. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τα σημεία Κ, Λ στις πλευρές ΑΔ, ΔΓ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $ΑΚ = ΔΛ$. Έστω Μ, Ν τα μέσα των ΚΛ, ΒΛ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
(α) $ΑΛ = ΒΚ$.
(β) $ΜΝ \perp ΑΛ$.



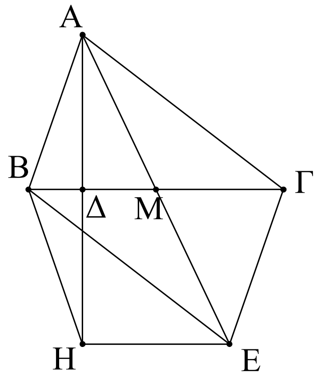
21. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{Α}_{εξ} = 140^o$, $\widehat{Β} = 60^o$ και Ι το έγκεντρο του τριγώνου. Να υπολογίσετε:
(α) τις γωνίες $\widehat{Α}$ και $\widehat{Γ}$ του τριγώνου.
(β) τη γωνία $Α\hat{Ι}Β$.



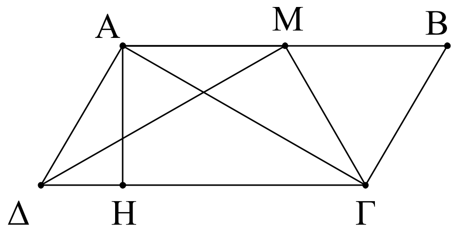
22. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{Α} = 60^o$ και $ΑΒ = \frac{2}{3}ΑΓ$.
Έστω Μ το μέσο του ύψους ΒΔ. Προεκτείνουμε το ΑΜ κατά τμήμα $ΑΜ = ΜΕ$. Να αποδείξετε ότι:
(α) το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι παραλληλόγραμμο.
(β) $ΒΕ \perp ΒΔ$.
(γ) $ΑΒ = ΓΔ$.
(δ) το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισόπλευρο.
(ε) $ΑΕ = ΒΓ$.



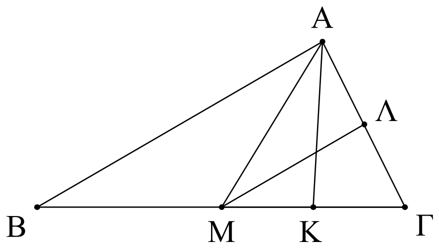
23. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$. Στην προέκταση του ύψους ΑΔ παίρνουμε τμήμα $ΔΗ = ΑΔ$ και στην προέκταση της διαμέσου ΑΜ παίρνουμε τμήμα $ΜΕ = ΑΜ$. Να αποδείξετε ότι:
(α) το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.
(β) $ΑΒ = ΒΗ$.
(γ) το τετράπλευρο ΒΓΕΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



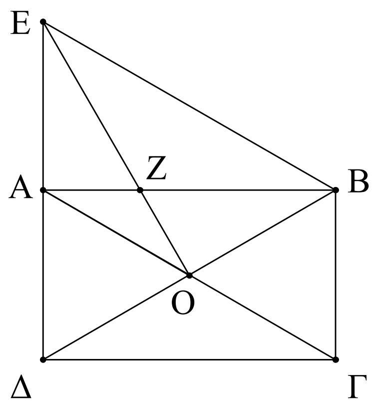
24. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ = 2ΑΔ$ και $\widehat{Α} = 120^o$. Έστω Μ το μέσο της ΑΒ και $ΑΗ \perp ΓΔ$. Να αποδείξετε ότι:
(α) η ΔΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Δ}$.
(β) το τετράπλευρο ΑΜΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
(γ) το τρίγωνο ΜΓΔ είναι ορθογώνιο.
(δ) $ΑΓ \perp ΑΔ$.



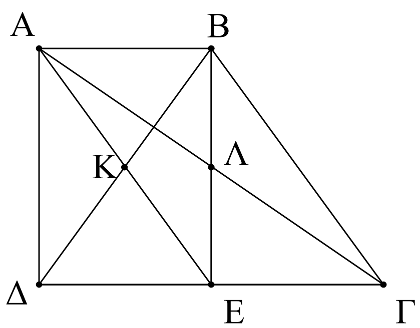
25. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ = 2ΑΓ$. Έστω ΑΜ η διάμεσος και Κ, Λ τα μέσα των ΜΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
(α) $ΑΚ = ΜΛ$.
(β) $ΑΚ = \frac{1}{2}ΑΒ$.
(γ) η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\widehat{Α}Κ$.



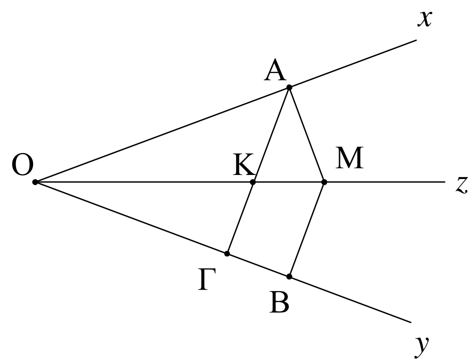
26. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, $ΑΒ > ΒΓ$ και $ΑΓ = 2ΒΓ$. Αν η κάθετος στη ΒΔ στο σημείο Ο τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο Ε και την ΑΒ στο Ζ να αποδείξετε ότι
(α) $Β\widehat{Δ}Α = 60^o$.
(β) το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο.
(γ) το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο.
(δ) $ΔΖ \perp ΒΕ$.



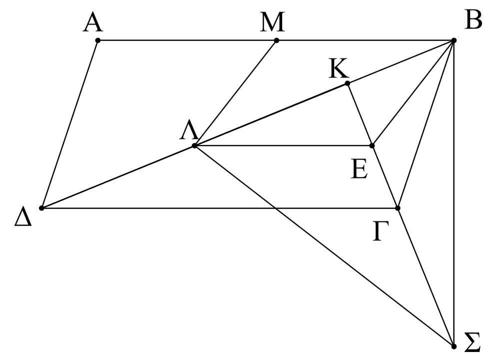
27. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\widehat{Α} = \widehat{Δ} = 90^o$ και $ΔΓ = 2ΑΒ$. Φέρνουμε την ΒΕ κάθετη στην ΔΓ η οποία τέμνει την διαγώνιο ΑΓ στο Λ. Έστω Κ το σημείο τομής της ΑΕ με την διαγώνιο ΒΔ.
(α) $ΑΕ = ΒΔ$.
(β) τα τμήματα ΑΓ και ΒΕ διχοτομούνται.
(γ) το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.
(δ) το τετράπλευρο ΚΛΓΔ είναι τραπέζιο.
(ε) $ΚΛ = \frac{1}{4}ΔΓ$.



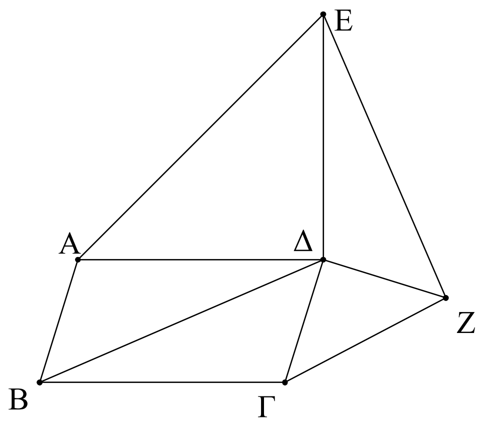
28. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και η διχοτόμος της Oz. Θεωρούμε σημείο Μ της Oz και φέρουμε τις $\mathrm{MA} \perp Ox$, $\mathrm{MB} \perp Oy$ και $\mathrm{A\Gamma} \perp Oy$. Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΑΓ και Oz, να αποδείξετε ότι:
(α) $\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$.
(β) $\mathrm{AM} = \mathrm{AK}$.
(γ) Το τετράπλευρο ΑΜΒΚ είναι ρόμβος.



29. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρουμε $\Gamma\mathrm{K} \perp \mathrm{B}\Delta$. Έστω Μ, Λ και Ε τα μέσα των ΑΒ, ΔΚ και ΓΚ αντίστοιχα. Αν η κάθετη στην ΑΒ στο Β τέμνει τη ΓΚ στο Σ, να αποδείξετε ότι:
(α) $\Lambda\mathrm{E} \perp \mathrm{B}\Sigma$.
(β) Το τετράπλευρο ΒΕΛΜ είναι παραλληλόγραμμο.
(γ) $\mathrm{BE} \perp \Lambda\Sigma$.
(δ) $\mathrm{M}\hat{\Lambda}\mathrm{E} = \mathrm{B}\hat{\Sigma}\Lambda$.



30. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Εξωτερικά αυτού κατασκευάζουμε τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΓΖ με $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z} = 90^{o}$. Να αποδείξετε ότι:
(α) $\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$.
(β) $\mathrm{B}\Delta = \mathrm{EZ}$.
(γ) $\mathrm{B}\Delta \perp \mathrm{EZ}$.



31. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\mathrm{AB}//\Gamma\Delta$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 45^{o}$. Έστω ΕΖ η διάμεσος του τραπεζίου και ΑΗ το ύψος του. Η παράλληλη από το Ζ προς την ΑΔ τέμνει την ΓΔ στο Θ. Να αποδείξετε ότι:
(α) Το τετράπλευρο ΕΖΘΔ είναι παραλληλόγραμμο.
(β) Το τετράπλευρο ΗΘΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
(γ) $\Theta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = 90^{o}$.
(δ) $\Delta\mathrm{H} = \Theta\Gamma$.
(ε) $\mathrm{EZ} + \mathrm{AH} = \Gamma\Delta$.