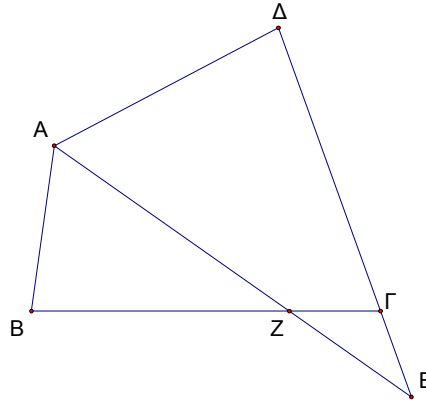
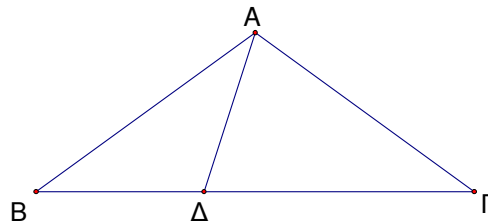


Άθροισμα γωνιών τριγώνου

1. Σε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$ και $AB < A\Delta$. Η διχοτόμος της γωνίας \widehat{A} τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο E και την $B\Gamma$ στο Z . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Gamma Z$ είναι ισοσκελές.

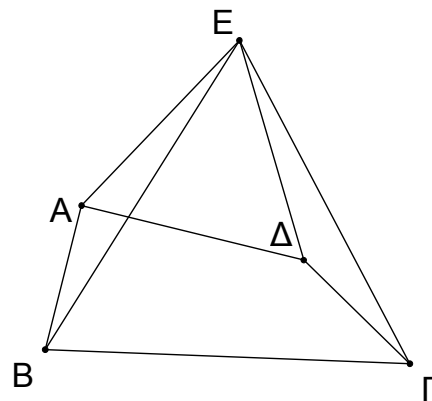


2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, το ύψος $B\Delta$ και η κάθετη της AB στο B , η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας \widehat{A} στο E . Αν Z είναι το σημείο τομής των $B\Delta$, AE , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BEZ είναι ισοσκελές.
3. Στο παρακάτω σχήμα είναι $AB = A\Gamma = \Gamma\Delta$ και $B\Delta = A\Delta$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

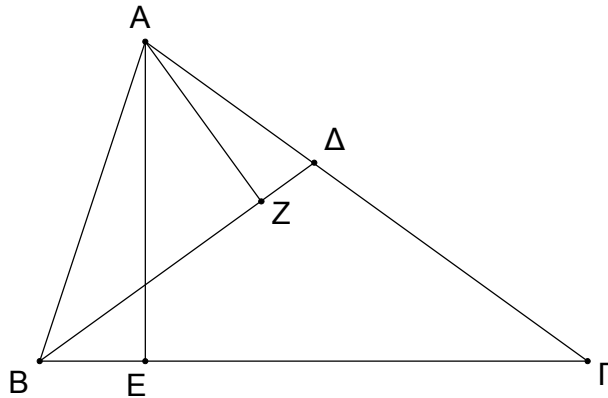


4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το ύψος του $B\Delta$. Η κάθετη από το Δ προς την AB τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο Z . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.
5. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = 60^\circ$. Αν $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας \widehat{A} , να αποδείξετε ότι $\widehat{A\Delta B} = 60^\circ$.
6. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\widehat{B} = 60^\circ$ και $B\Gamma = 2AB$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
7. Έστω $AB\Gamma$ οξυγώνιο τρίγωνο και O το περίκεντρο του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι $\widehat{B\hat{O}\Gamma} = 2\widehat{A}$.
8. Δίνεται κύκλος με κέντρο O , μια διάμετρος AB και η μεσοκάθετος του OB που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Γ και Δ . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $OB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρα.

9. Δίνεται κύκλος (O, R) , σημείο Γ στο εξωτερικό αυτού, η τέμνουσα ΓBA τέτοια, ώστε $\Gamma\text{B} = R$ και η διακεντρική ευθεία ΓO που τέμνει τον κύκλο στο σημείο E (το O βρίσκεται μεταξύ των Γ, E). Να αποδείξετε ότι $\widehat{E\text{O}A} = 3\widehat{B\text{O}\Gamma}$.
10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ με $\widehat{A} = 90^\circ$. Στο ημιεπίπεδο της $\text{B}\Gamma$ που δεν περιέχει το σημείο A φέρουμε κάθετη ημιευθεία προς τη $\text{B}\Gamma$ στο σημείο B και σ' αυτήν παίρνουμε τμήμα $\text{B}\Delta = \text{BA}$. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος GE της γωνίας $\widehat{\Gamma}$ είναι κάθετη στην $\text{A}\Delta$.
11. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ με $\widehat{A} = 90^\circ$ φέρουμε τη διχοτόμο $\text{B}\Delta$. Αν $\text{B}\Delta = \text{G}\Delta$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ του τριγώνου $\text{AB}\Gamma$.
12. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ με $\text{AB} = \text{A}\Gamma$. Η κάθετη της AB στο A και η κάθετη της $\text{A}\Gamma$ στο Γ τέμνονται στο Δ . Αν η DE είναι διχοτόμος του τριγώνου $\text{A}\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι $\text{D}\text{E} \parallel \text{B}\Gamma$.
13. Δίνεται τετράπλευρο $\text{AB}\Gamma\Delta$ με $\text{AB} = \text{G}\Delta$ και $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 120^\circ$. Εξωτερικά του τετραπλεύρου κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο $\text{E}\text{A}\Delta$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\text{E}\text{B}\Gamma$ είναι ισόπλευρο.



14. Δίνεται κύκλος (O, R) , ένα σημείο A στο εξωτερικό του κύκλου και η εφαπτομένη AB . Έστω Γ σημείο της OA τέτοιο, ώστε $\text{A}\text{B} = \text{A}\Gamma$. Αν η $\text{B}\Gamma$ τέμνει ξανά τον κύκλο στο σημείο Δ , να αποδείξετε ότι $\text{O}\Delta \perp \text{O}\text{A}$.
15. Σε τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ με $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = 90^\circ$ να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της \widehat{A} σχηματίζει με τη $\text{B}\Gamma$ γωνία 45° .
16. Δίνεται τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ και η διχοτόμος του $\text{B}\Delta$. Φέρουμε τις $\text{A}\text{E}, \text{A}\text{Z}$ κάθετες στις $\text{B}\Gamma, \text{B}\Delta$ αντίστοιχα. Αν $\widehat{B\text{A}E} = \widehat{\Delta\text{A}Z}$, να αποδείξετε ότι:
(α) Το τρίγωνο $\text{B}\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές,
(β) $\widehat{Z\text{A}E} = \widehat{\Gamma}$.



17. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 100^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ με $\hat{\Delta B\Gamma} = 20^\circ$ και $B\Gamma = B\Delta$. Να αποδείξετε ότι $\Gamma A + \Gamma\Delta = \Gamma B$.
18. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$ και σημείο B στο εσωτερικό του. Κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$ προς το ίδιο μέρος του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$. Αν οι AE και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο Z , να βρείτε τη γωνία $A\hat{Z}\Delta$.
19. Να βρεθούν οι γωνίες των ισοσκελών τριγώνων τα οποία έχουν τη παρακάτω ιδιότητα: "υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μια κορυφή με την απέναντι πλευρά ώστε να δημιουργούνται μέσα στο ισοσκελές τρίγωνο, δύο ισοσκελή τρίγωνα". (Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις).
20. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE . Πάνω στις $B\Delta$ και ΓE παίρνουμε σημεία Z, H αντίστοιχα ώστε $BZ = A\Gamma$ και $\Gamma H = AB$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZH είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
21. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 40^\circ$ και η διχοτόμος $B\Delta$. Πάνω στη $B\Gamma$ παίρνουμε σημεία E, Z τέτοια ώστε $BE = B\Delta$ και $BZ = AB$.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $B\Delta E$, $\Gamma\Delta E$ και $\Delta E Z$.
β) Να αποδείξετε ότι $A\Delta + \Delta B = B\Gamma$.
22. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $A\Gamma = \frac{3}{2} AB$. Παίρνουμε σημείο E πάνω στην πλευρά $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $AE = AB$. Η διχοτόμος της γωνίας \hat{A} τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα BE στο σημείο Δ .
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABE είναι ισόπλευρο.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές.
γ) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.
23. Δίνεται ισοσκελές και οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta B\Gamma} = 30^\circ$.

24. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 36^\circ$. Από την κορυφή A φέρουμε ευθεία ε παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας \hat{B} τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ και την ευθεία ε στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$, $B\Gamma\Delta$, $A\Delta E$ και ABE είναι ισοσκελή.
25. Στις πλευρές AB και $A\Delta$ ενός ρόμβου $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε τα σημεία E και Z αντίστοιχα ώστε το $\Gamma E Z$ να είναι ισόπλευρο. Να υπολογίσετε τις γωνίες του ρόμβου.