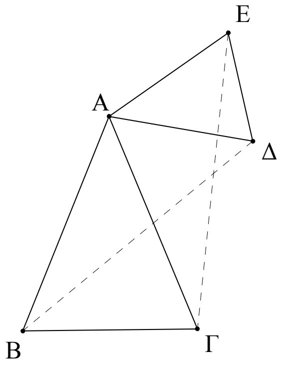
Κριτήρια Ισότητας Τριγώνων

1. Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ισοσκελή με $ΑΒ = ΑΓ$ και $ΑΔ = ΑΕ$. Αν $Β\widehat{Α}Γ = Δ\widehat{Α}Ε$ να αποδείξετε ότι $ΒΔ = ΓΕ$.



2. Στις πλευρές Ox και Oy μιας γωνίας $x\widehat{O}y$ παίρνουμε σημεία Α, Β αντίστοιχα τέτοια, ώστε $ΟΑ = ΟΒ$.
α) Να αποδείξετε ότι οποιοδήποτε σημείο Μ της διχοτόμου της γωνίας $x\widehat{O}y$ απέχει εξίσου από τα Α και Β.
β) Αν οι προεκτάσεις των ΑΜ και ΒΜ τέμνουν τις Oy και Ox στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $ΑΓ = ΒΔ$ και $ΜΓ = ΜΔ$.

3. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν $\widehat{Α} = \widehat{Δ}$, $ΑΒ = ΔΕ$ και ίσες περιμέτρους. Προεκτείνουμε την ΑΓ κατά τμήμα $ΓΗ = ΒΓ$ και την ΔΖ κατά τμήμα $ΖΘ = ΕΖ$.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΔΕΘ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΓΗ και ΕΖΘ είναι ίσα.
γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

4. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν $ΑΒ = ΔΕ$, $ΑΓ = ΔΖ$ και $ΑΜ = ΔΚ$, όπου ΑΜ και ΔΚ είναι διάμεσοι των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΑΜ παίρνουμε σημείο Η τέτοιο ώστε $ΑΜ = ΜΗ$ και στην προέκταση της ΔΚ παίρνουμε σημείο Θ τέτοιο ώστε $ΔΚ = ΚΘ$. Να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΗ είναι ίσα.
β) τα τρίγωνα ΔΕΚ και ΚΖΘ είναι ίσα.
γ) τα τρίγωνα ΑΓΗ και ΔΖΘ είναι ίσα.
δ) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

5. Σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ΒΓ = ΕΖ, $\widehat{Β} = \widehat{Ε}$ και οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{Β}$, $\widehat{Ε}$ είναι ίσες. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Η κάθετη από το Β προς την ΑΔ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι $ΕΓ = ΑΓ - ΑΒ$.

7. Σε έναν κύκλο κέντρου Ο παίρνουμε δύο σημεία Β, Γ. Ένα σημείο Α, που βρίσκεται εκτός κύκλου, απέχει εξίσου από τα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι η ΟΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\widehat{Α}Γ$.

8. Σε μια χορδή ΑΒ ενός κύκλου κέντρου Ο παίρνουμε σημεία Γ και Δ τέτοια, ώστε ΑΓ = ΒΔ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές.

9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ το ύψος του.
α) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta E = \Delta Z$ και $A\hat{\Delta}E = A\hat{\Delta}Z$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
β) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το μέρος του Α), αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta E = \Delta Z$ και $A\hat{\Delta}E = A\hat{\Delta}Z$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
(Θαλής 2009)

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$, το ύψος ΑΔ και η διάμεσος ΑΜ. Στις προεκτάσεις των ΑΔ, ΑΜ παίρνουμε σημεία Ε, Η τέτοια, ώστε $A\Delta = \Delta E$ και $AM = MH$. Να αποδείξετε ότι $BE = \Gamma H$.

11. Θεωρούμε δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΗ και το ύψος ΒΘ του ΑΒΓ, που τέμνονται στο Κ και τη διχοτόμο ΔΜ και το ύψος ΕΝ του ΔΕΖ που τέμνονται στο Ρ. Να αποδείξετε ότι ΚΘ = ΡΝ και ΚΗ = ΡΜ.

12. Αν προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατά τμήματα ΒΔ = ΑΒ και ΓΕ = ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ και Ε απέχουν εξίσου από την ευθεία ΒΓ.

13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και η διάμεσος του ΑΜ. Να αποδείξετε ότι τα Β, Γ απέχουν εξίσου από την ευθεία ΑΜ.

14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Στην πλευρά ΑΓ και στην προέκταση της ΒΑ προς το Α παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα τέτοια, ώστε $A\Delta = AE = \frac{\beta-\gamma}{2}$. Φέρουμε $BK \perp \Delta E$ και $\Gamma\Lambda \perp \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΒΕΚ και ΓΔΛ είναι ίσα.
β) η ΔΕ διέρχεται από το μέσο της ΒΓ.

15. Δύο ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου κέντρου Ο τέμνονται στο εσωτερικό σημείο Θ του κύκλου έτσι, ώστε το Ο να είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας $\Delta\hat{\Theta}B$. Να αποδείξετε ότι $O\Theta \perp A\Gamma$.

16. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν $\hat{A} = \hat{\Delta}$, τα ύψη ΑΚ, ΔΛ ίσα και τα ύψη ΒΖ, ΕΗ ίσα. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα.

17. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Η μεσοκάθετος της ΒΓ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνονται στο σημείο Ο. Φέρουμε $OE \perp A\Gamma$ και πάνω στην ΑΓ παίρνουμε σημείο Κ τέτοιο, ώστε ΑΚ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:
(α) ΟΚ = ΟΓ.
(β) $\Gamma E = \frac{\beta-\gamma}{2}$.

Συμπλήρωμα

18. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν $ΑΒ = ΔΕ$, $ΑΓ = ΔΖ$ και τις διαμέσους τους ΒΜ, ΕΚ ίσες. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

19. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Στην προέκταση της ΑΓ παίρνουμε ένα σημείο Δ ώστε $ΓΔ = ΑΓ$ και στην προέκταση της ΓΒ παίρνουμε σημείο Ε ώστε $ΒΕ = ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = ΒΔ$.

20. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Στο ημιεπίπεδο του ΑΒ που δεν ανήκει το σημείο Γ φέρνουμε ημιευθεία Αx κάθετη στην ΑΒ και στο ημιεπίπεδο του ΑΓ που δεν ανήκει το σημείο Β φέρνουμε ημιευθεία Αy κάθετη στην ΑΓ. Στην ημιευθεία Αx παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $ΑΔ = ΑΒ$ και στην ημιευθεία Αy παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $ΑΕ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι $ΒΕ = ΓΔ$.

21. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι ΒΔ και ΓΕ είναι ίσες.

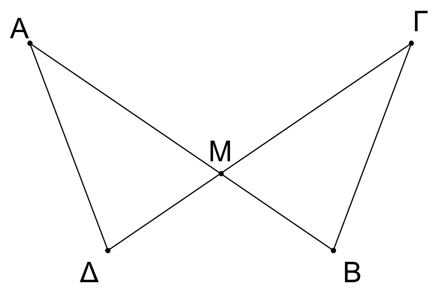
22. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ είναι ίσες.

23. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.

24. Στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε έτσι ώστε $ΑΔ = ΑΕ$. Έστω Μ το σημείο τομής των ΒΕ, ΓΔ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα.
γ) Να αποδείξετε ότι η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Α}$.

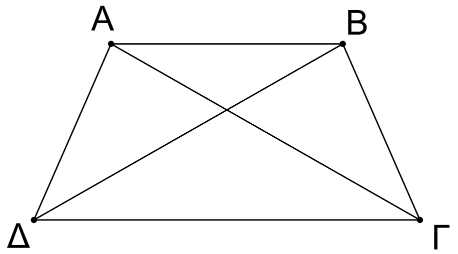
25. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Έστω Δ, Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισοσκελές.

26. Δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ τέμνονται σε ένα σημείο Μ. Αν $ΑΔ = ΒΓ$ να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΒΓΜ είναι ίσα.
(Υπόδειξη: Συγκρίνουμε πρώτα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ. Στη συνέχεια συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΒΓ).



27. Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $ΑΔ = ΒΓ$ και $\widehat{Γ} = \widehat{Δ}$.
α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = ΒΔ$.

β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{A} = \widehat{B}$.



28. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ και η μεσοκάθετος της ΒΓ τέμνονται στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε την ΔΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΒ και την ΔΖ κάθετη στην ΑΓ.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές.
β) Να αποδείξετε ότι $\Delta E = \Delta Z$.
γ) Να αποδείξετε ότι $BE = \Gamma Z$.

29. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^{o}$ και $AB < A\Gamma$. Έστω ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$. Φέρουμε την ΔΕ κάθετη στην ΒΓ. Αν η προέκταση της ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι:
α) $AB = BE$.
β) το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές.

30. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και η διάμεσος ΑΜ. Να αποδείξετε ότι οι κορυφές Β, Γ του τριγώνου ισαπέχουν από την ΑΜ.

31. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος ΑΔ. Η κάθετη από το Β προς την ΑΔ τέμνει την ΑΔ στο σημείο Ε και την ΑΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Delta Z$.