Εφαρμογές των παραλληλογράμμων στα τρίγωνα

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Έστω ΒΕ και ΓΖ οι κάθετες στην ΑΔ οι οποίες τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:
   i) ΕΜ // ΑΓ και ΜΖ // ΑΒ.
   ii) ΚΓ = ΒΛ.
   iii) το τρίγωνο ΜΕΖ είναι ισοσκελές.

2. Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΔ αντίστοιχα. Φέρουμε τη ΔΕ κάθετη στην ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:
   i) η ΓΝ διέρχεται από το μέσο της ΔΕ.
   ii) ΓΕ = ΓΔ.

3. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ παίρνουμε τα μέσα Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα. Αν Μ και Ν είναι οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ, να αποδείξετε ότι οι ΜΕ και ΝΖ είναι κάθετες.

4. Δίνεται γωνία $x\widehat{O}y$ και στο εσωτερικό της σημείο Α. Από το Α φέρουμε $\mathrm{AB} \perp Ox$ και $\mathrm{A\Gamma} \perp Oy$. Αν Μ είναι το μέσο της ΟΑ και Κ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:
   i) το ΜΒΓ είναι ισοσκελές.
   ii) $\mathrm{MK} \perp \mathrm{B\Gamma}$.

5. Έστω ΑΔ και ΒΕ τα ύψη τριγώνου ΑΒΓ, που τέμνονται στο Η. Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των ΑΗ, ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\mathrm{K\widehat{\Lambda}M} = 90^\circ$.

6. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, το βαρύκεντρο Κ του τριγώνου ΑΒΓ και τα μέσα Ε, Ζ, Η των ΑΒ, ΓΔ, ΚΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το ΚΕΗΖ είναι παραλληλόγραμμο.
7. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε την ΑΓ κατά τμήμα ΑΔ = ΑΓ και την ΒΓ κατά τμήμα ΓΕ = ΒΓ. Αν Ζ είναι το σημείο τομής των ΑΒ και ΔΕ, να αποδείξετε ότι ΑΖ = $\frac{1}{3}$ΑΒ. (Υπόδειξη: Φέρνουμε ΓΗ // ΒΖ)

8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}} = 90^\circ$ και $\mathrm{AB} > \mathrm{A\Gamma}$. Στην ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΔ = ΑΓ. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\mathrm{B\widehat{E}Z} = 45^\circ$.(Υπόδειξη: Στην προέκταση της ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΑΗ = ΑΓ)

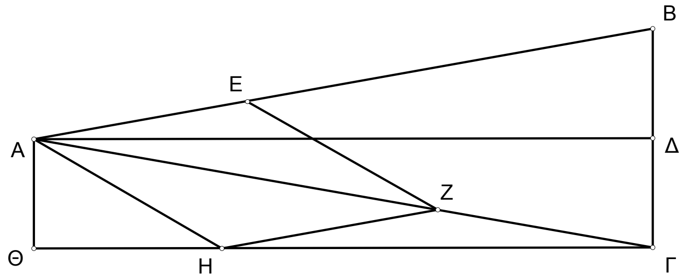
9. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{\mathrm{B}} = 2\widehat{\Gamma} < 90^\circ$. Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου και Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΑΒ = 2ΔΜ. (Υπόδειξη: Παίρνουμε το μέσο Ε της ΑΓ και φέρουμε τις ΔΕ και ΜΕ)

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΒΔ = ΓΕ. Αν Ζ, Η, Θ, Ι είναι τα μέσα των ΒΓ, ΒΕ, ΔΕ, ΔΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΖΗΘΙ είναι ρόμβος.

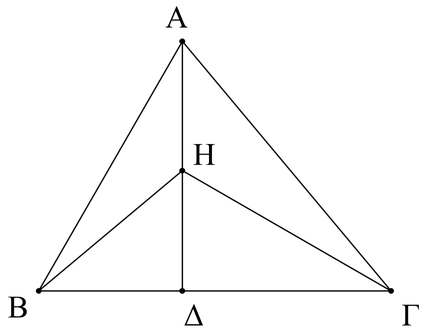
11. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος ΑΔ και τη διάμεσο ΑΜ. Αν Ε και Ζ είναι οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $ΕΖ \perp ΑΜ$.

12. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Έστω Μ το μέσο της ΒΓ και Κ, Λ τα κέντρα των τετραγώνων. Να αποδείξετε ότι:
   i) Τα τρίγωνα ΑΓΕ και ΑΒΗ είναι ίσα.
   ii) Το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

13. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Πάνω στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε τα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα, ώστε να είναι ΑΕ = ΕΖ = ΖΓ = ΒΓ. Η παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ και η παράλληλη από το Γ προς την ΑΔ τέμνονται στο Θ. Αν Η είναι σημείο της ΓΘ τέτοιο ώστε ΖΗ // ΑΒ, να αποδείξετε ότι:
   i) το ΑΕΖΗ είναι ρόμβος.
   ii) $Α\widehat{Η}Θ = 30^o$.
   iii) $Β\widehat{Α}Γ = 20^o$.



14. Στο παρακάτω σχήμα είναι $ΑΔ \perp ΒΓ$, $Α\widehat{Β}Η = 20^o$, $Γ\widehat{Β}Η = 40^o$ και $Β\widehat{Γ}Η = 30^o$. Να υπολογίσετε τη γωνία $Α\widehat{Γ}Η$.



15. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και το μέσο Μ της ΓΔ. Η ΒΜ τέμνει την ΑΔ στο Ζ. Έστω $ΑΕ \perp ΒΜ$.
   (α) Να αποδείξετε ότι το Δ είναι το μέσο του ΑΖ.
   (β) Να αποδείξετε ότι $ΔΕ = ΔΑ$.

16. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{Α} = 45^o$ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ τα οποία τέμνονται στο Η. Έστω ότι Μ και Ν είναι τα μέσα των ΑΗ και ΒΓ αντίστοιχα.
   (α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΗ και ΒΓΕ είναι ίσα.
   (β) Να αποδείξετε ότι το ΔΜΕΝ είναι τετράγωνο.

17. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{Α} = 120^o$. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Μ και Ν έτσι, ώστε $ΒΜ = ΜΝ = ΝΓ$. Έστω ΑΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ και ΝΕ το ύψος του τριγώνου ΑΓΝ. Να αποδείξετε ότι:
   (α) $ΔΝ = ΕΝ$.

(β) το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισόπλευρο.

18. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 45^o$ και $\widehat{B} = 30^o$. Έστω ΓΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ.
    (α) Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = ΓΔ = ΜΔ$.
    (β) Να υπολογίσετε τη γωνία $Α\widehat{Μ}Γ$.

19. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $Α\widehat{Β}Δ$ τέμνει την ΑΟ στο Ε και την ΑΔ στο Ζ να αποδείξετε ότι $ΟΕ = \frac{ΔΖ}{2}$.

Σύνθετα θέματα

20. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και το μέσο Μ της ΓΔ. Έστω $ΑΕ \perp ΒΜ$. Να αποδείξετε ότι $ΔΕ = ΔΑ$.
    (Μ. Βρετανία 2003)

21. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 120^o$. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Μ και Ν έτσι, ώστε $ΒΜ = ΜΝ = ΝΓ$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισόπλευρο.
    (Καναδάς 1997)

22. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 45^o$ και $\widehat{B} = 30^o$. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ να υπολογίσετε τη γωνία $Α\widehat{Μ}Γ$.
    (Βουλγαρία 1999)