

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΑΣ ΤΙΣ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ ΜΕ ΤΟ CABRI 3D

Νίκος Α. Φωτιάδης
Δρ. Μαθηματικών
Επιμορφωτής Β' επιπέδου κλάδου ΠΕ 03
E-mail: nikos.fotiades@gmail.com
Website: <http://users.sch.gr/nfotiades/>

Περίληψη

Οι μαθητές της Β' Λυκείου μαθαίνουν ότι ο κύκλος, η έλλειψη, η παραβολή και η υπερβολή είναι κάποιες καμπύλες του επιπέδου. Οι περισσότεροι από τους μαθητές γνωρίζουν τις (κανονικές) εξισώσεις και ορισμένες ιδιότητες των παραπάνω καμπύλων, κάποιοι λίγοι γνωρίζουν ότι αυτές οι καμπύλες λέγονται κωνικές τομές και ακόμα λιγότεροι μπορούν να κατανοήσουν για ποιο λόγο ονομάζονται έτσι. Με τη βοήθεια του λογισμικού Cabri 3D είναι δυνατόν να δείξουμε στους μαθητές ποιο είναι το αποτέλεσμα της τομής μιας κωνικής επιφάνειας με ένα επίπεδο.

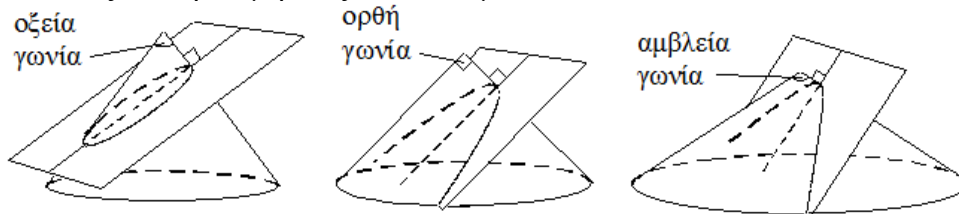
Abstract

High school pupils learn that the circle, the ellipse, the parabola and, the hyperbola are some plane curves. Most of them know the (standard) equations and some geometrical properties of these curves, some of them know that they are called conic sections but only a few understand why they are called so. Using Cabri 3D software we can display the section of a plane and a cone.

Εισαγωγή

Η συστηματική διδασκαλία της στερεομετρίας απουσιάζει από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών. Έτσι δεν είναι λίγοι οι μαθητές της Β' Λυκείου που δεν προσέχουν καν ότι ο κύκλος, η έλλειψη, η παραβολή και η υπερβολή βρίσκονται σε ένα κεφάλαιο με τον τίτλο "Κωνικές τομές".

Στο σχολικό βιβλίο [1], στην εισαγωγή του κεφαλαίου "Κωνικές τομές", υπάρχουν ορισμένα ιστορικά σχόλια και τα παρακάτω σχήματα που απεικονίζουν την τομή ενός επιπέδου με έναν κώνο.

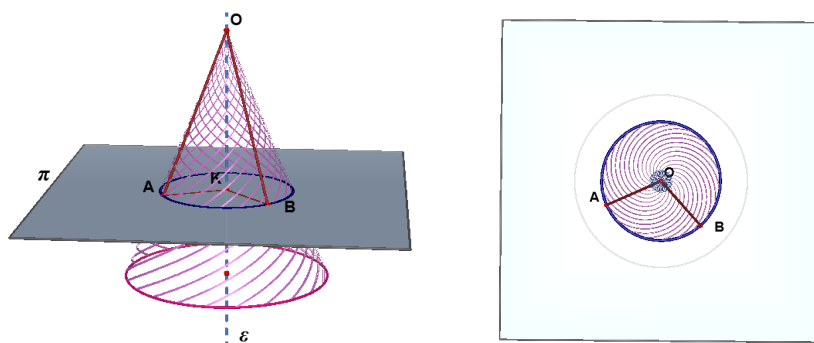


Σχήμα 1

Οι μαθητές μπορούν να φανταστούν ότι η καμπύλη στο πρώτο σχήμα (αριστερά) έχει σχήμα ωσειδές όμως δεν μπορούν να είναι σίγουροι ότι είναι πράγματι μια έλλειψη. Στα άλλα δύο σχήματα δεν είναι καθόλου σαφές σε τι διαφέρουν οι κωνικές τομές μεταξύ τους. Φυσικά, ούτε σε αυτά τα σχήματα μπορεί κάποιος να εξηγήσει γιατί η καμπύλη είναι παραβολή ή υπερβολή αντίστοιχα.

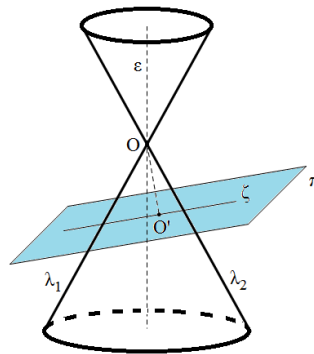
Με τη χρήση του λογισμικού Cabri 3D είναι δυνατόν να δείξουμε στους μαθητές τα παραπάνω σχήματα από διάφορες οπτικές γωνίες. Επιπλέον, με τις σφαίρες του Dandelin μπορούμε σχετικά εύκολα να εξηγήσουμε για ποιο λόγο το ωσειδές σχήμα είναι έλλειψη ή γιατί η τομή του κώνου με το επίπεδο είναι παραβολή ή υπερβολή στις άλλες δύο περιπτώσεις.

Έστω π ένα επίπεδο που δεν διέρχεται από την κορυφή O μιας κωνικής επιφάνειας και είναι κάθετο στον άξονά της ε . Η τομή της κωνικής επιφάνειας με το επίπεδο είναι κύκλος (σχήμα 2) αφού από τη σύγκριση των ορθογωνίων τριγώνων OAK , OBK προκύπτει ότι $KA = KB$.



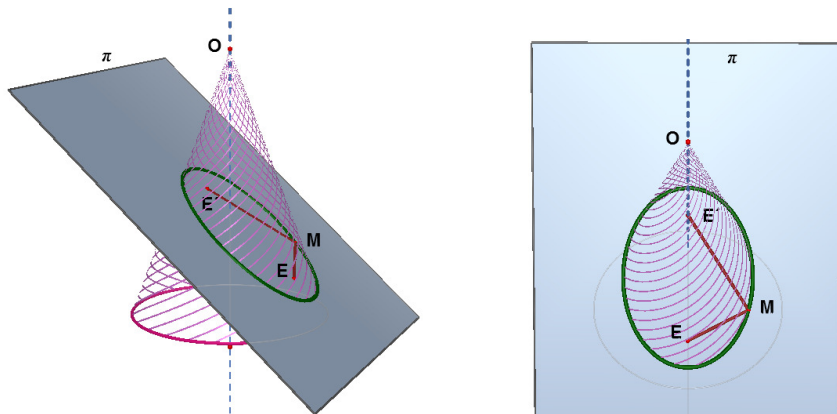
Σχήμα 2

Έστω π ένα επίπεδο που δεν διέρχεται από την κορυφή O μιας κωνικής επιφάνειας και δεν είναι κάθετο στον άξονά της ε . Αν O' είναι η προβολή της κορυφής O πάνω στο επίπεδο π τότε οι ε και OO' ορίζουν ένα επίπεδο σ (είναι το επίπεδο της σελίδας). Έστω ζ η τομή των επιπέδων π, σ και λ_1, λ_2 οι γενέτειρες της κωνικής επιφάνειας που ανήκουν στο επίπεδο σ (Σχήμα 3).



Σχήμα 3

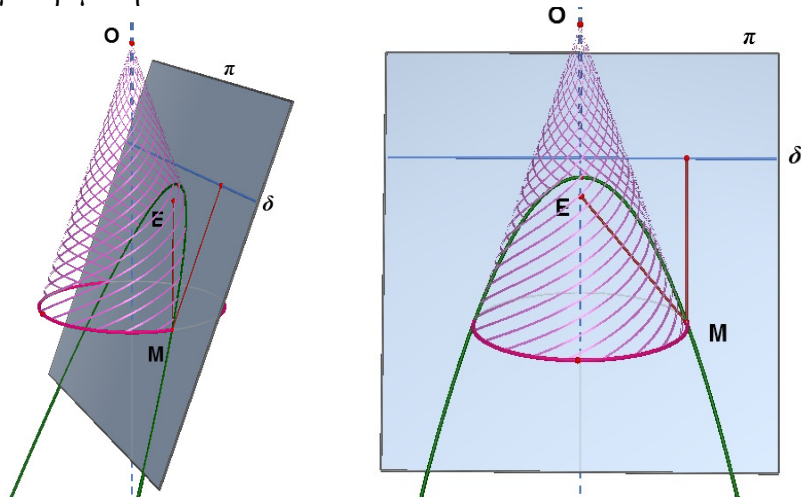
Στο σχήμα 4 η τομή της κωνικής επιφάνειας με το επίπεδο π είναι μια έλλειψη. Αν M είναι ένα τυχαίο σημείο της κωνικής τομής τότε το άθροισμα $ME + ME'$ είναι σταθερό, όπου E, E' είναι δύο συγκεκριμένα σημεία του επιπέδου π .



Σχήμα 4

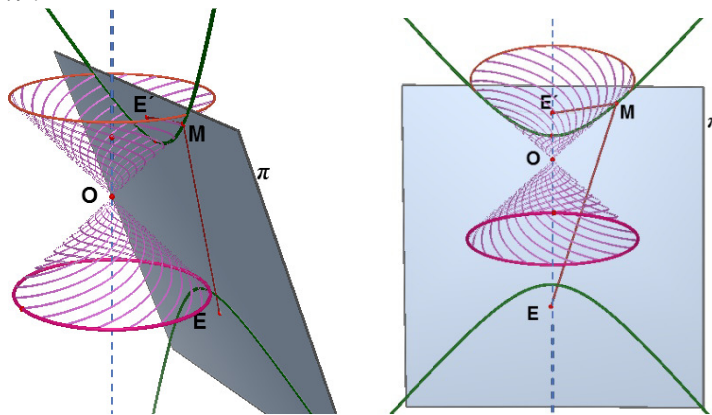
Στο σχήμα 5 η τομή της κωνικής επιφάνειας με το επίπεδο π είναι μια παραβολή. Αν M είναι ένα τυχαίο σημείο της κωνικής τομής τότε

$ME = d(M, \delta)$, όπου E είναι ένα συγκεκριμένο σημείο του επιπέδου π και δ μια συγκεκριμένη ευθεία του επιπέδου π .



Σχήμα 5

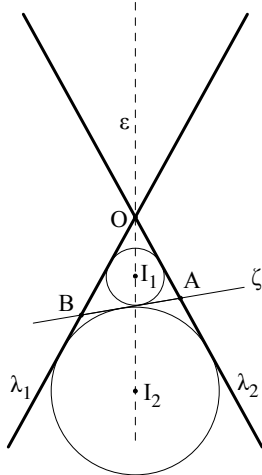
Στο σχήμα 6 η τομή της κωνικής επιφάνειας με το επίπεδο π είναι μια υπερβολή. Αν M είναι ένα τυχαίο σημείο της κωνικής τομής τότε η διαφορά $|ME - ME'|$ είναι σταθερή, όπου E, E' είναι δύο συγκεκριμένα σημεία του επιπέδου π .



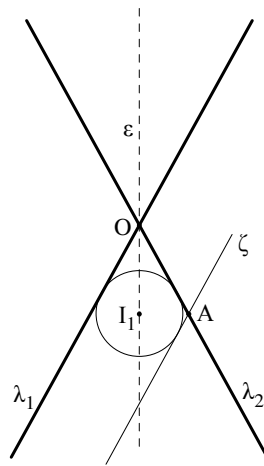
Σχήμα 6

Είναι γνωστό [2], [3] ότι υπάρχουν μία ή δύο σφαίρες που εφάπτονται (εσωτερικά) στην κωνική επιφάνεια και ταυτόχρονα στο επίπεδο π . Οι σφαίρες αυτές, που τα κέντρα τους βρίσκονται πάνω στον άξονα της κωνικής επιφάνειας, ονομάζονται σφαίρες του Dandelin.

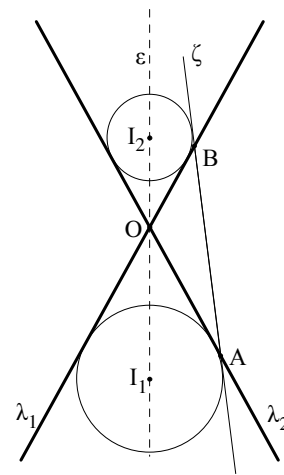
Η ευθεία ζ μπορεί να είναι παράλληλη σε κάποια από τις γενέτειρες λ_1, λ_2 (Σχήμα 7β) ή να τέμνει και τις δύο σχηματίζοντας με αυτές ένα τρίγωνο OAB το οποίο μπορεί να βρίσκεται στο εσωτερικό της κωνικής επιφάνειας (Σχήμα 7α) ή εξωτερικά αυτής (Σχήμα 7γ).



Σχήμα 7α



Σχήμα 7β



Σχήμα 7γ

Στο σχήμα 7α το σημείο I_1 είναι το έγκεντρο του τριγώνου OAB και το I_2 το παράκεντρο του τριγώνου OAB που αντιστοιχεί στη γωνία \widehat{AOB} . Στο σχήμα 7β το σημείο I_1 είναι η προβολή του σημείου A πάνω στον άξονα ε της κωνικής επιφάνειας και στο σχήμα 7γ τα σημεία I_1, I_2 είναι τα παράκεντρα του τριγώνου OAB που αντιστοιχούν στις γωνίες \widehat{OBA} και \widehat{OAB} αντίστοιχα.

Ένα επίπεδο π που δεν διέρχεται από την κορυφή O μιας κωνικής επιφάνειας και δεν είναι κάθετο στον άξονά της μπορεί να τέμνει

- όλες τις γενέτειρες (Σχήμα 7α),
- όλες τις γενέτειρες εκτός από μία (Στο σχήμα 7β είναι η γενέτειρα λ_1) ή
- όλες τις γενέτειρες εκτός από δύο (Στο σχήμα 7γ είναι οι γενέτειρες που ανήκουν στο επίπεδο που είναι παράλληλο στο π).

Η έλλειψη

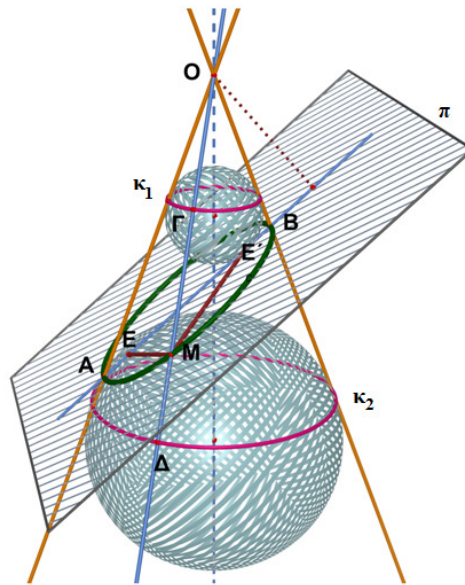
Έστω π ένα επίπεδο το οποίο τέμνει όλες τις γενέτειρες της κωνικής επιφάνειας. Το επίπεδο π δεν διέρχεται από την κορυφή O της κωνικής

επιφάνειας και δεν είναι κάθετο στον άξονά της. Οι σφαίρες με κέντρα τα σημεία I_1, I_2 (Σχήμα 7α) που είναι εγγεγραμμένες στην κωνική επιφάνεια εφάπτονται σε αυτή κατά μήκος των κύκλων κ_1, κ_2 αντίστοιχα και στο επίπεδο π στα σημεία E', E αντίστοιχα (Σχήμα 8).

Έστω M ένα σημείο που ανήκει στην τομή της κωνικής επιφάνειας με το επίπεδο π . Θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα $ME + ME'$ είναι σταθερό. Η γενέτειρα OM τέμνει τους κύκλους κ_1, κ_2 στα σημεία Γ, Δ αντίστοιχα. Είναι $ME = M\Delta$ ως εφαπτόμενα τμήματα στη σφαίρα με κέντρο το σημείο I_2 και $ME' = M\Gamma$ ως εφαπτόμενα τμήματα στη σφαίρα με κέντρο το σημείο I_1 . Άρα

$$ME + ME' = M\Delta + M\Gamma = \Gamma\Delta.$$

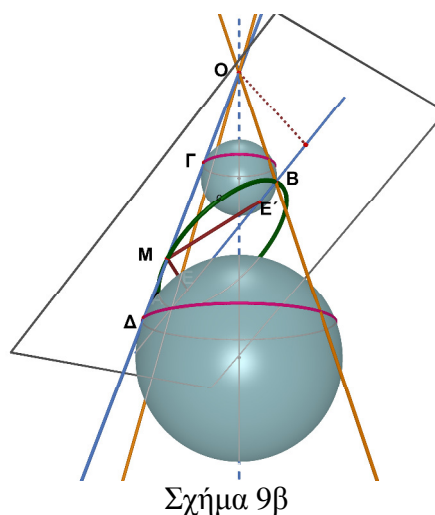
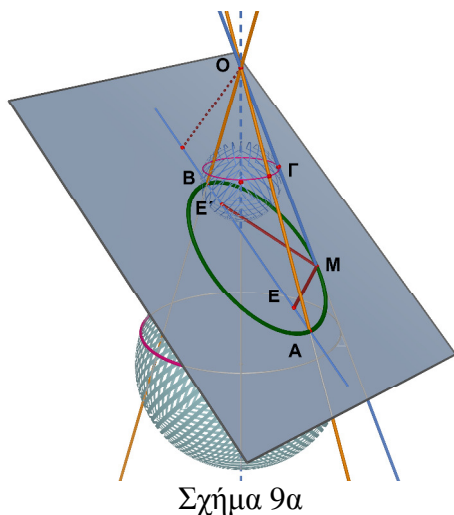
Το μήκος του τμήματος $\Gamma\Delta$ είναι σταθερό και ίσο με το μήκος της γενέτειρας του κόλουρου κώνου που έχει ως βάσεις τους κύκλους κ_1, κ_2 .



Σχήμα 8

Το λογισμικό Cabri 3D μας δίνει τη δυνατότητα να αλλάξουμε τη γωνία θέασης του σχήματος καθώς επίσης και την εμφάνιση όσων γεωμετρικών αντικειμένων επιθυμούμε. Στο σχήμα 9α φαίνεται πιο καθαρά

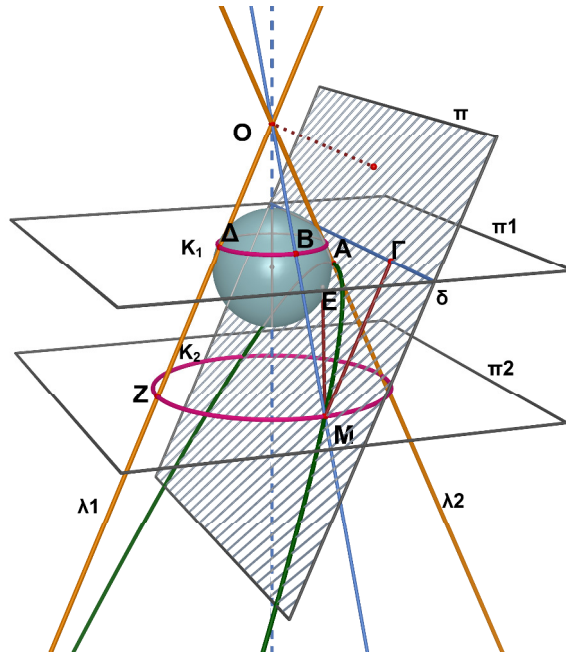
το σχήμα της κωνικής τομής καθώς και τα τμήματα ME , ME' ενώ στο σχήμα 9β προβάλλεται η ισότητα $ME' = MG$ των εφαπτόμενων τμημάτων.



Η παραβολή

Έστω π ένα επίπεδο που τέμνει όλες τις γενέτειρες της κωνικής επιφάνειας εκτός από μία, τη γενέτειρα λ_1 . Η σφαίρα με κέντρο το σημείο I_1 (Σχήμα 7β) που είναι εγγεγραμμένη στην κωνική επιφάνεια εφάπτεται σε αυτή κατά μήκος του κύκλου κ_1 και στο επίπεδο π στο σημείο E . Το επίπεδο π και το επίπεδο π_1 που περιέχει τον κύκλο κ_1 τέμνονται κατά μήκος της ευθείας δ (Σχήμα 10).

Έστω M ένα σημείο που ανήκει στην τομή της κωνικής επιφάνειας με το επίπεδο π και έστω Γ η προβολή του σημείου M πάνω στην ευθεία δ . Θα αποδείξουμε ότι $ME = MG$. Η γενέτειρα OM τέμνει τον κύκλο κ_1 στο σημείο B . Έστω π_2 το επίπεδο που διέρχεται από το σημείο M και είναι παράλληλο στο επίπεδο π_1 . Έστω κ_2 ο κύκλος που προκύπτει από την τομή της κωνικής επιφάνειας με το επίπεδο π_2 . Η γενέτειρα λ_1 τέμνει τους κύκλους κ_1, κ_2 στα σημεία Δ, Z αντίστοιχα.



Σχήμα 10

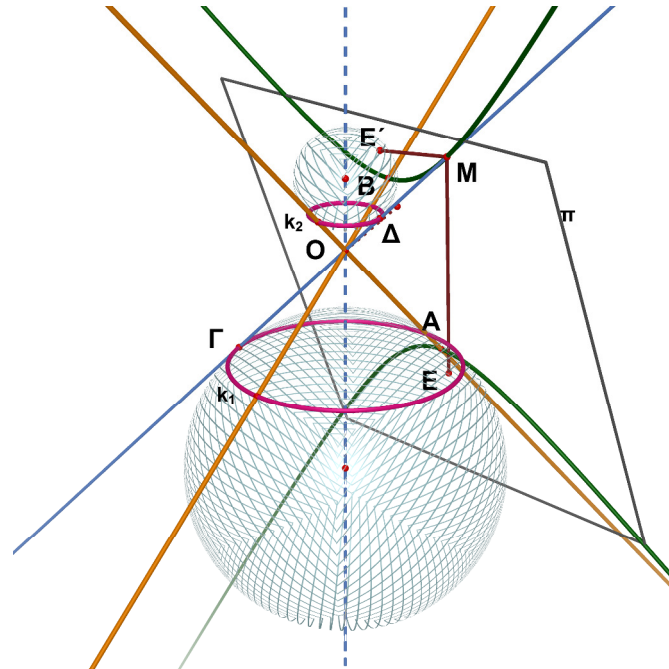
Είναι

- $ME = MB$ ως εφαπτόμενα τμήματα στη σφαίρα,
- $MB = \Delta Z$ ως γενέτειρες του κόλουρου κώνου με βάσεις τους κύκλους κ_1, κ_2 ,
- $\Delta Z = M\Gamma$ ως παράλληλα τμήματα με άκρα σε παράλληλα επίπεδα.

Η υπερβολή

Έστω π ένα επίπεδο που τέμνει όλες τις γενέτειρες της κωνικής επιφάνειας εκτός από δύο. Οι σφαίρες με κέντρα τα σημεία I_1, I_2 (Σχήμα 7γ) που είναι εγγεγραμμένες στην κωνική επιφάνεια εφάπτονται σε αυτή κατά μήκος των κύκλων κ_1, κ_2 αντίστοιχα και στο επίπεδο π στα σημεία E, E' αντίστοιχα (Σχήμα 11).

Έστω M ένα σημείο που ανήκει στην τομή της κωνικής επιφάνειας με το επίπεδο π . Θα αποδείξουμε ότι η διαφορά $ME - ME'$ είναι σταθερή. Η γενέτειρα OM τέμνει τους κύκλους κ_1, κ_2 στα σημεία Γ, Δ αντίστοιχα.



Σχήμα 11

Είναι $ME = M\Gamma$ ως εφαπτόμενα τμήματα στη σφαίρα με κέντρο το σημείο I_1 και $ME' = M\Delta$ ως εφαπτόμενα τμήματα στη σφαίρα με κέντρο το σημείο I_2 . Άρα

$$ME - ME' = M\Gamma - M\Delta = \Gamma\Delta.$$

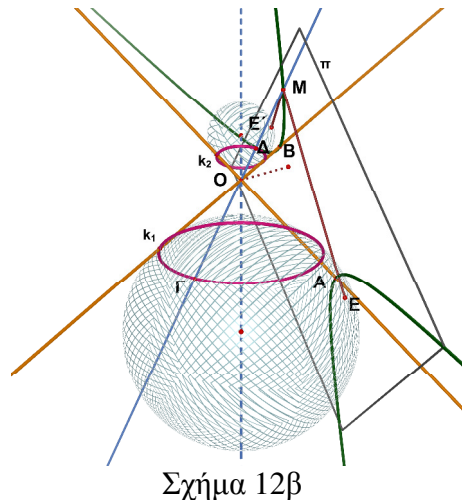
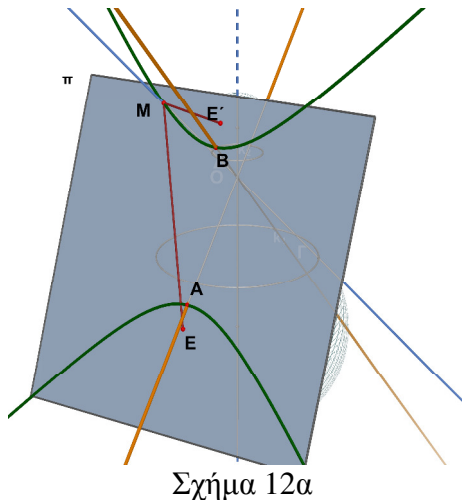
Το μήκος του τμήματος $\Gamma\Delta$ είναι σταθερό και ίσο με το άθροισμα των μηκών των γενέτειρων των κώνων με κοινή κορυφή το O και βάσεις τους κύκλους κ_1, κ_2 .

Παρατήρηση

Αποδείξαμε ότι η διαφορά $ME - ME'$ είναι σταθερή ίση με $\Gamma\Delta$ για την επιλογή του σημείου M στον συγκεκριμένο κλάδο της υπερβολής. Αν επιλέγαμε το σημείο M στον άλλο κλάδο της υπερβολής τότε θα αποδεικνύαμε ότι $ME' - ME = \Gamma\Delta$. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$|ME - ME'| = \Gamma\Delta.$$

Στα σχήματα 12α και 12β απεικονίζεται η τομή του επιπέδου π με την κωνική επιφάνεια από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Στο σχήμα 12β φαίνεται καλύτερα ότι το τμήμα ME είναι εφαπτόμενο στη σφαίρα και ότι ισχύει η ισότητα $ME = MG$.



Διδακτική αξιοποίηση του λογισμικού. Συμπεράσματα

Το λογισμικό Cabri 3D είναι ιδιαίτερα δύσχρηστο για κάποιον που το χρησιμοποιεί για πρώτη φορά. Έτσι δεν είναι εύκολο να σχεδιαστεί μια δραστηριότητα στην οποία να συμμετέχουν ενεργά οι μαθητές για την ανακάλυψη της γνώσης. Οπότε το λογισμικό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ένα μάθημα επίδειξης με τη βοήθεια βιντεοπροβολέα ή διαδραστικού πίνακα. Σε αυτή την περίπτωση είναι δυνατόν κάποιος ή κάποιοι μαθητές να μετακινήσουν ορισμένα τμήματα ενός έτοιμου σχήματος και να παρατηρήσουν τις αλλαγές που προκαλούνται.

Βιβλιογραφία

1. Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, Β' Γενικού Λυκείου, ΙΤΥΕ Διόφαντος (2013).
2. Πάρις Πάμφιλος, *Έλασσον γεωμετρικόν*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (2012).
3. A. Ostermann, G. Wanner, *Geometry by its history*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer (2012).