ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΕ ΕΡΓΑ ΤΟΥ M. C. ESCHER

Νίκος Α. Φωτιάδης
Δρ. Μαθηματικών
Επιμορφωτής Β΄ επιπέδου κλάδου ΠΕ 03
E-mail: nikos.fotiades@gmail.com
Website: http://users.sch.gr/nfotiades/

Περίληψη

Τέσσερα έργα του M. C. Escher με τον τίτλο Circle Limit I-IV απεικονίζουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα στο εσωτερικό ενός κύκλου. Αφορμή για τη δημιουργία αυτών των έργων αποτέλεσε η γνωριμία με Escher με τον γεωμέτρη H. S. M. Coxeter και ειδικότερα ένα σχήμα του τελευταίου στο οποίο παρουσίαζε μια πλακόστρωση με τρίγωνα μέσα στον δίσκο του Poincaré. Με την εργασία αυτή θέλουμε να καταδείξουμε τα μαθηματικά που βοήθησαν τον Escher να δημιουργήσει τα παραπάνω έργα. Τα μαθηματικά αυτά μόνο τετριμμένα δεν μπορούν να θεωρηθούν αφού απαιτούνται γνώσεις μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Abstract

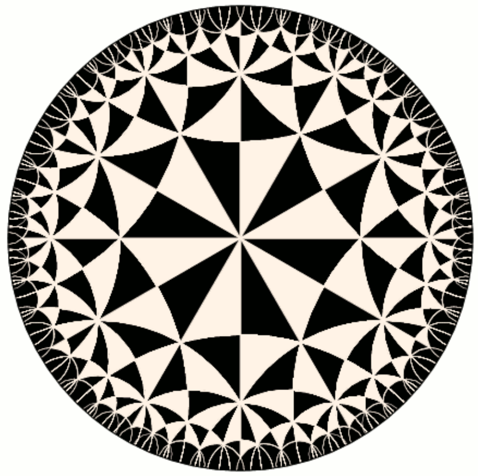
Four of M.C. Escher's prints, entitled Circle Limit I-IV, depict repetitive motifs inside a circle. The inspiration for these works came from Escher's acquaintance with geometer H.S.M. Coxeter and specifically from a figure created by the latter showing a tiling made with triangles within Poincaré's disk. The present paper shows the mathematical underpinnings of Escher's works which are by no means trivial since they require knowledge of non-Euclidean geometry.

Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι το μεγαλύτερο μέρος της δουλειάς του M. C. Escher είναι επηρεασμένο από τα μαθηματικά. Ένα μέρος αυτής της επιρροής οφείλεται στον γεωμέτρη H. S. M. Coxeter, ο οποίος διατέλεσε για πολλές δεκαετίες καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Toronto. Η γνωριμία τους έγινε στο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών του 1954, που πραγματοποιήθηκε στο Άμστερνταμ. Λίγα χρόνια αργότερα, το 1957 ο Coxeter έδωσε μια διάλεξη με τον τίτλο "Η Κρυσταλλική Συμμετρία και οι Γενικεύσεις της[1]". Σε αυτή την εργασία ο Coxeter συμπεριέλαβε 2 έργα του Escher μετά από άδεια που του έδωσε ο ίδιος ο καλλιτέχνης. Στο βιβλίο της [4] η Doris Schattschneider αναφέρει ότι ο Coxeter για να ευχαριστήσει τον Escher που του επέτρεψε να χρησιμοποιήσει έργα του του έστειλε αντίγραφο των πρακτικών στα οποία δημοσιεύτηκε η ομιλία. Λίγους μήνες αργότερα ο Coxeter έλαβε ένα ενθουσιώδες γράμμα από τον Escher. Το κείμενο που ακολουθεί είναι μετάφραση μέρους του γράμματος.

> *Απόλαυσα αυτό το άρθρο και ένιωσα περήφανος για τις δύο αναπαραγωγές των επίπεδων μοτίβων μου. Παρόλο που το κείμενο του άρθρου είναι πολύ εξειδικευμένο για κάποιον αυτοδίδαχτο στα επίπεδα μοτίβα όπως εγώ, κάποια σχήματα και ιδιαίτερα το σχήμα 7 στη σελίδα 11 μου προκάλεσαν ένα σοκ.*

Το σχήμα που προκάλεσε σοκ στον Escher είναι το Σχήμα 1 της παρούσας εργασίας. Ο Escher αναζητούσε τρόπους να δημιουργήσει άπειρα επαναλαμβανόμενα μοτίβα σε περιορισμένο χώρο και το σχέδιο του Coxeter φαίνεται να έδινε λύση σε αυτό το πρόβλημα.



Σχήμα 1

[1] Η ομιλία αυτή έγινε στη Βασιλική Ακαδημία του Καναδά (Royal Society of Canada) και ο τίτλος της στα αγγλικά είναι "Crystal Symmetry and Its Generalizations". Πρέπει να είναι το πρώτο δημοσιευμένο μαθηματικό άρθρο που περιείχε πλακοστρώσεις του Escher.

Το σχέδιο του Coxeter είναι μια πλακόστρωση με τρίγωνα μέσα στον δίσκο του Poincaré, που αποτελεί ένα μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας.

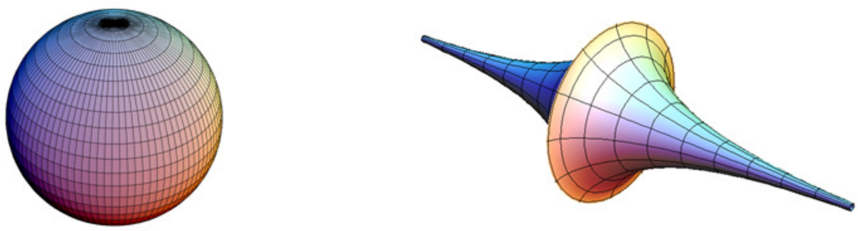
Μη Ευκλείδειες γεωμετρίες

Είναι γνωστό ότι ο Ευκλείδης θεμελίωσε τη γεωμετρία του πάνω σε ορισμένα αξιώματα (αιτήματα). Το περίφημο πέμπτο αίτημα ισχυρίζεται ότι

Από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη προς την ευθεία[2].

Η μη αποδοχή αυτού του αιτήματος οδήγησε στην ανακάλυψη μη Ευκλείδειων γεωμετριών όπως η Ελλειπτική γεωμετρία και η Υπερβολική γεωμετρία. Στην Ελλειπτική γεωμετρία ισχύουν όλα τα αξιώματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας εκτός από το πέμπτο το οποίο αντικαθίσταται από το αίτημα: "Αν δοθεί σημείο εκτός ευθείας τότε κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο τέμνει την αρχική ευθεία". Αντίστοιχα στην Υπερβολική γεωμετρία ισχύουν όλα τα αξιώματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας εκτός από το πέμπτο το οποίο αντικαθίσταται από το αίτημα: "Από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχονται περισσότερες από μία ευθείες που δεν τέμνουν την αρχική ευθεία".

Για την κατανόηση των μη Ευκλείδειων γεωμετριών έχουν επινοηθεί διάφορα μοντέλα. Η επιφάνεια της σφαίρας είναι μοντέλο για την Ελλειπτική γεωμετρία, ενώ η ψευδοσφαίρα του Beltrami αποτέλεσε ένα από τα πρώτα μοντέλα της Υπερβολικής γεωμετρίας (Σχήμα 2). Στη συνέχεια διάφοροι διακεκριμένοι μαθηματικοί παρουσίασαν μοντέλα της Υπερβολικής γεωμετρίας όπως ο F. Klein και ο H. Poincaré. Η ύπαρξη μοντέλων μη Ευκλείδειας γεωμετρίας μέσα στον Ευκλείδειο χώρο απέδειξε ότι αυτές είναι συνεπείς αν και μόνο αν η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι συνεπής.



Σχήμα 2

[2] Η διατύπωση του πέμπτου αιτήματος από τον Ευκλείδη είναι διαφορετική από αυτή. Παρόλα αυτά η συγκεκριμένη διατύπωση είναι ισοδύναμη με αυτή του Ευκλείδη και μάλλον πιο γνωστή.

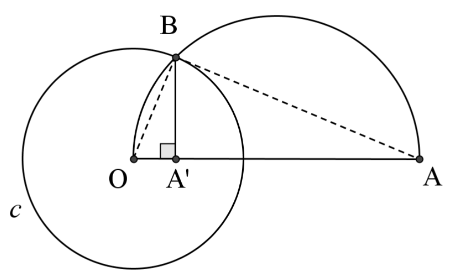
Ο μετασχηματισμός της αντιστροφής

Για την περιγραφή του μοντέλου της Υπερβολικής γεωμετρίας που είναι γνωστό ως "δίσκος του Poincaré" είναι απαραίτητος ο μετασχηματισμός της αντιστροφής ως προς δοσμένο κύκλο. Έστω c ένας κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Για κάθε σημείο Α στο επίπεδο του κύκλου c, διαφορετικό από το Ο, η αντιστροφή του Α ως προς τον κύκλο c είναι ένα σημείο A' που βρίσκεται στην ημιευθεία που ορίζεται από τα σημεία Ο, Α (αρχή είναι το Ο) και έχει την ιδιότητα $\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OA}'=\rho^2$. Είναι φανερό ότι η αντιστροφή του σημείου A' ως προς τον κύκλο c είναι το σημείο Α. Έτσι η αντιστροφή ως προς τον κύκλο (O,ρ) είναι ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει κάθε σημείο Α, διαφορετικό του Ο, στο σημείο A' και το σημείο A' πίσω στο Α.

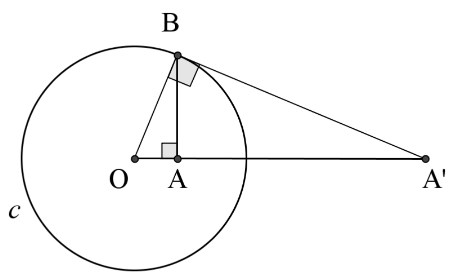
Από την ισότητα $\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OA}'=\rho^2$ προκύπτει ότι αν το σημείο Α είναι εσωτερικό του κύκλου $(\mathrm{OA}<\rho)$, τότε το σημείο A' είναι εξωτερικό του κύκλου $(\mathrm{OA}'>\rho)$ και αντίστροφα. Ακόμη, αν το σημείο Α ανήκει στον κύκλο τότε το σημείο A' συμπίπτει με το Α.

Στη συνέχεια δίνουμε έναν γεωμετρικό τρόπο εύρεσης της εικόνας A' όταν δίνεται το σημείο Α και ο κύκλος c της αντιστροφής. Υποθέτουμε αρχικά ότι το σημείο Α βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου. Κατασκευάζουμε ημικύκλιο διαμέτρου ΟΑ το οποίο τέμνει τον κύκλο c στο σημείο Β. Η προβολή του σημείου Β πάνω στην ΟΑ είναι το σημείο A' (Σχήμα 3α). Αν το σημείο Α βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου τότε φέρουμε την ημιευθεία ΟΑ και την κάθετη στην ΟΑ στο σημείο Α η οποία τέμνει τον κύκλο στο σημείο Β. Η κάθετη στην ΟΒ στο σημείο Β τέμνει την ημιευθεία ΟΑ στο σημείο A' (Σχήμα 3β).

Και στις δύο περιπτώσεις από την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων ΟΑΒ και $\mathrm{OA'B}$ έχουμε $\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OA}'=\mathrm{OB}^2=\rho^2$.



Σχήμα 3α



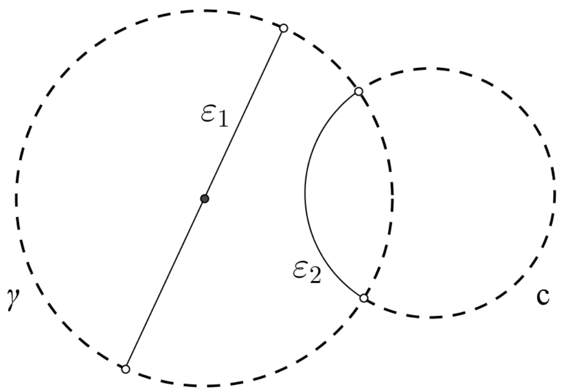
Σχήμα 3β

Ο δίσκος του Poincaré ως μοντέλο Υπερβολικής γεωμετρίας

Ένα γεωμετρικό μοντέλο είναι ένα σύνολο σημείων στα οποία ορίζουμε βασικές γεωμετρικές έννοιες όπως ευθεία, απόσταση, γωνία κλπ και σχέσεις μεταξύ αυτών μέσω ορισμένων αξιωμάτων. Ο δίσκος του Poincaré είναι το εσωτερικό ενός κύκλου. Δηλαδή είναι ένα μοντέλο Υπερβολικής γεωμετρίας το οποίο βρίσκεται μέσα στο Ευκλείδειο επίπεδο. Υπάρχουν αρκετές πηγές για το δίσκο του Poincaré, ενδεικτικά αναφέρουμε τα βιβλία [2], [3], [5].

Ο δίσκος του Poincaré είναι το σύνολο $\mathbb{H}=\left\{(x,y): x^2+y^2<1\right\}$, έτσι *υπερβολικά σημεία* είναι τα σημεία στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $\gamma: x^2+y^2=1$. Το σύνολο $\mathbb{H}$ λέγεται *υπερβολικό επίπεδο* ενώ τα σημεία του κύκλου γ λέγονται *ιδεατά σημεία*.

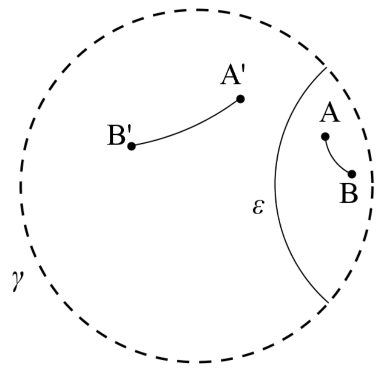
Στο υπερβολικό επίπεδο $\mathbb{H}$ ορίζουμε δύο είδη *υπερβολικών ευθειών*. Το πρώτο είδος υπερβολικής ευθείας είναι κάθε διάμετρος του κύκλου γ, χωρίς τα άκρα. Έστω c ένας κύκλος κάθετος στον γ. Το δεύτερο είδος υπερβολικής ευθείας είναι το τόξο του κύκλου c που βρίσκεται στο εσωτερικό του γ (Σχήμα 4).



Σχήμα 4

Οι μοναδικές ισομετρίες στο μοντέλο αυτό είναι οι αντιστροφές ως προς οποιαδήποτε υπερβολική ευθεία (στην περίπτωση που η υπερβολική ευθεία είναι διάμετρος του κύκλου γ τότε η αντιστροφή είναι στην ουσία ανάκλαση ως προς τη διάμετρο). Στο σχήμα 5 δίνεται μια υπερβολική ευθεία ε και δύο υπερβολικά σημεία Α, Β. Έστω A', B' οι εικόνες των Α, Β μέσω της αντιστροφής ως προς τον (ευκλείδειο) κύκλο στον οποίο ανήκει η υπερβολική ευθεία ε. Τα υπερβολικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$

έχουν το ίδιο μήκος αφού υποθέσαμε ότι ο μετασχηματισμός της αντιστροφής ως προς υπερβολική ευθεία είναι ισομετρία.

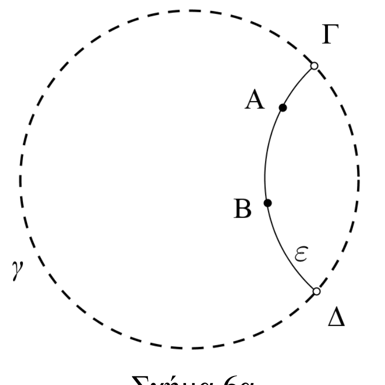


Σχήμα 5

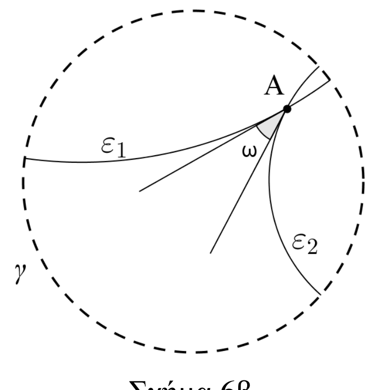
Αν κάποιος βλέπει το σχήμα 5 με ευκλείδειο τρόπο τότε τα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ και $\overset{\frown}{\mathrm{A'B'}}$ φαίνονται άνισα. Όμως στο δίσκο του Poincaré η μετρική είναι διαφορετική από την ευκλείδεια. Έστω Α, Β δύο υπερβολικά σημεία και ε η υπερβολική ευθεία που διέρχεται από αυτά. Έστω Γ, Δ τα ιδεατά σημεία που βρίσκονται στα άκρα της ε (Σχήμα 6α). Ορίζουμε ως *υπερβολική απόσταση* των σημείων Α, Β τον αριθμό

$$d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \left| \ln\left(\frac{\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{B\Gamma}} \right) \right|.$$

Τέλος, γωνία μεταξύ δύο υπερβολικών ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α είναι η ευκλείδεια γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των τόξων στο σημείο Α (Σχήμα 6β).



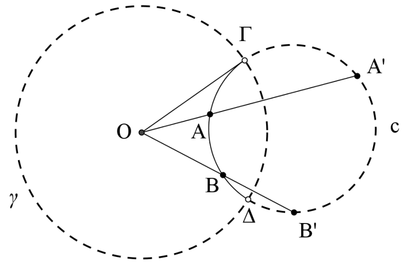
Σχήμα 6α



Σχήμα 6β

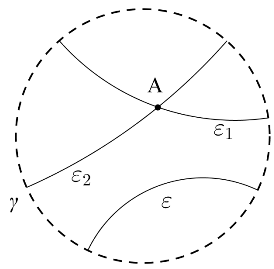
Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το παραπάνω μοντέλο $\mathbb{H}$ ικανοποιεί τα τέσσερα πρώτα αξιώματα του Ευκλείδη. Θα αποδείξουμε ενδεικτικά ένα από τα αξιώματα αυτά και συγκεκριμένα ότι από δύο υπερβολικά σημεία διέρχεται μοναδική υπερβολική ευθεία. Αν τα σημεία Α, Β είναι συνευθειακά με το κέντρο Ο του δίσκου τότε η μοναδική υπερβολική ευθεία που διέρχεται από αυτά είναι η διάμετρος που περιέχει τα δύο σημεία.

Έστω τώρα ότι τα σημεία Ο, Α, Β δεν είναι συνευθειακά. Με αντιστροφή ως προς τον κύκλο γ βρίσκουμε τις εικόνες A', B' των σημείων Α, Β αντίστοιχα (Σχήμα 7). Τα σημεία Α, Β, A', B' είναι ομοκυκλικά αφού $\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OA}'=\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OB}'=1$. Έστω c ο κύκλος των παραπάνω σημείων και Γ, Δ τα σημεία τομής των κύκλων γ, c. Το τμήμα ΟΓ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο c αφού $\mathrm{O\Gamma}^2=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OA}'$. Άρα οι κύκλοι τέμνονται κάθετα, οπότε το τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\mathrm{A}\Delta}$ είναι η υπερβολική ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α, Β.



Σχήμα 7

Όμως στο μοντέλο $\mathbb{H}$ δεν ισχύει το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη. Στο σχήμα 8 δίνεται μια υπερβολική ευθεία ε και ένα υπερβολικό σημείο Α. Οι υπερβολικές ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ διέρχονται από το σημείο Α και δεν τέμνουν την ε. Κάθε υπερβολική ευθεία που διέρχεται από το Α και βρίσκεται ανάμεσα στις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δεν τέμνει την ε.



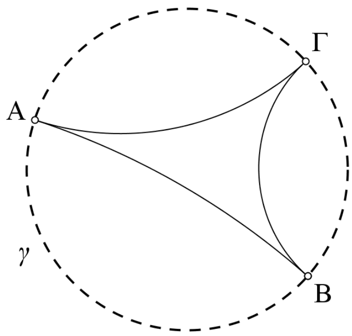
Σχήμα 8

Πλακοστρώσεις στον δίσκο του Poincaré

Στην Υπερβολική γεωμετρία το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από π ακτίνια. Αν ΑΒΓ είναι ένα υπερβολικό τρίγωνο τότε οι γωνίες και το εμβαδόν του τριγώνου συνδέονται με τον τύπο

$$\pi - (\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma) = (\mathrm{AB}\Gamma).$$

Ο παραπάνω τύπος εμφανίστηκε για πρώτη φορά σε μια μονογραφία του J. H. Lambert που εκδόθηκε μετά το θάνατό του το 1786 με τον τίτλο *Theorie der Parallellinien.* Σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο το εμβαδόν κάθε υπερβολικού τριγώνου είναι άνω φραγμένο από τον αριθμό π. Επιπλέον όσο μεγαλύτερο είναι το εμβαδόν του τριγώνου τόσο μικρότερο είναι το άθροισμα των γωνιών του. Στην οριακή περίπτωση που τα σημεία Α, Β, Γ είναι ιδεατά η κάθε γωνία του τριγώνου είναι 0 ακτίνια αφού στο σημείο Α, για παράδειγμα, τα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}, \overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma}$ είναι κάθετα στον κύκλο γ οπότε οι εφαπτόμενες των τόξων στο σημείο Α συμπίπτουν (Σχήμα 9). Για μια απόδειξη του παραπάνω τύπου παραπέμπουμε στο [3].



Σχήμα 9

Ένα πολύγωνο με n κορυφές χωρίζεται σε $n-2$ τρίγωνα. Επειδή το άθροισμα των γωνιών είναι μικρότερο από π, το άθροισμα των γωνιών του πολυγώνου είναι μικρότερο από $(n-2)\pi$. Αν ω είναι μια γωνία ενός κανονικού n-γώνου τότε $n\omega < (n-2)\pi \Leftrightarrow \omega < \dfrac{(n-2)\pi}{n}$. (1)

Έστω ότι υπάρχει μια πλακόστρωση του υπερβολικού δίσκου $\mathbb{H}$ με ίσα κανονικά n-γωνα, γωνίας ω, ώστε σε κάθε κορυφή να συναντιόνται m πολύγωνα, χωρίς επικαλύψεις. Τότε $m\omega = 2\pi$. (2)

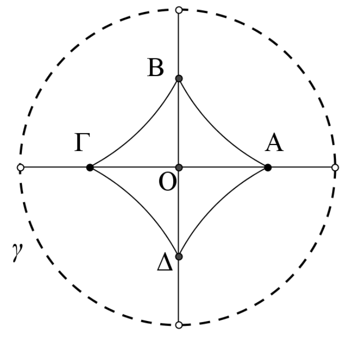
Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε

$$2\pi < m\frac{(n-2)\pi}{n} \Leftrightarrow (n-2)(m-2) > 4.$$

Σε κάθε πλακόστρωση χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\{n,m\}$ για να δηλώσουμε ότι τα κανονικά πολύγωνα έχουν n πλευρές και σε κάθε κορυφή συναντιούνται m από αυτά. Στο ευκλείδειο επίπεδο επειδή το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με π ακτίνια για τους αριθμούς n,m ισχύει η ισότητα $(n-2)(m-2)=4$. Οι μόνες δυνατές τιμές είναι $\{3,6\}$, $\{4,4\}$ και $\{6,3\}$, έτσι προκύπτει το γνωστό αποτέλεσμα ότι στο ευκλείδειο επίπεδο οι μόνες κανονικές πλακοστρώσεις είναι αυτές που γίνονται με ισόπλευρα τρίγωνα, τετράγωνα και κανονικά εξάγωνα. Επιπλέον ο αριθμός των πολυγώνων που συναντιούνται σε κάθε κορυφή είναι μοναδικός. Έτσι σε μια πλακόστρωση με ισόπλευρα τρίγωνα ο αριθμός των τριγώνων που συναντιούνται σε κάθε κορυφή είναι υποχρεωτικά ίσος με 6.

Στο υπερβολικό όμως επίπεδο ισχύει, όπως είδαμε, η ανισότητα $(n-2)(m-2)>4$ οπότε υπάρχουν άπειροι συνδυασμοί ακέραιων αριθμών n,m που την επαληθεύουν. Θα περιγράψουμε στη συνέχεια την κατασκευή πλακόστρωσης στο υπερβολικό επίπεδο $\mathbb{H}$ με κανονικά πολύγωνα που έχουν $n=4$ κορυφές. Από την ανισότητα $(n-2)(m-2)>4$ προκύπτει για το πλήθος m των κανονικών πολυγώνων ανά κορυφή ότι $m>4$. Δηλαδή μπορούμε να κάνουμε τις πλακοστρώσεις $\{4,5\}$, $\{4,6\}$, $\{4,7\}$ κλπ.

Κατασκευάζουμε δύο κάθετες διαμέτρους μέσα στον υπερβολικό δίσκο και παίρνουμε πάνω σε αυτές τα σημεία Α, Β, Γ και Δ ώστε $\text{ΟΑ}=\text{ΟΒ}=\text{ΟΓ}=\text{ΟΔ}=r$ όπως φαίνεται στο σχήμα 10. Αν σχεδιάσουμε τα υπερβολικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ το τετράπλευρο είναι κανονικό. Η γωνία ω του πολυγώνου είναι μικρότερη από $\frac{\pi}{2}$.

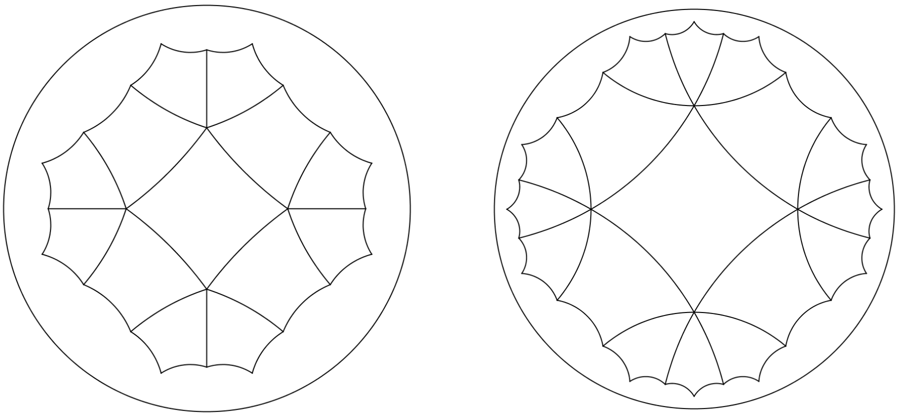


Σχήμα 10

Όταν το r τείνει προς το 1 και οι κορυφές του πολυγώνου πλησιάζουν προς τον κύκλο γ η γωνία τείνει στο μηδέν, ενώ όταν r τείνει προς το 0 και οι κορυφές του πολυγώνου πλησιάζουν προς τον κέντρο Ο η γωνία τείνει στο $\frac{\pi}{2}$. Η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στα ω, r είναι

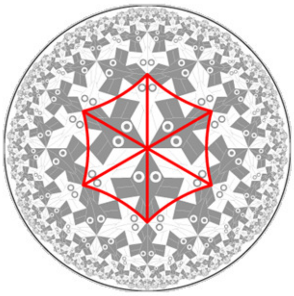
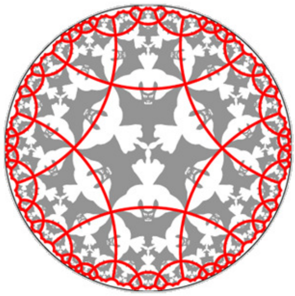
$$r = \sqrt{\text{εφ}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right)}.$$

Από την ισότητα (2) προκύπτει ότι η γωνία του κανονικού πολυγώνου είναι $\omega = \frac{2\pi}{m}$, έτσι ο παραπάνω τύπος γίνεται $r = \sqrt{\text{εφ}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{m}\right)}$, $m > 4$. Αφού τοποθετήσουμε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ σε κατάλληλη απόσταση από το κέντρο Ο με βάση τον παραπάνω τύπο, στη συνέχεια με τον μετασχηματισμό της αντιστροφής βρίσκουμε τα συμμετρικά του πολυγώνου ΑΒΓΔ ως προς κάθε πλευρά του και αυτό επαναλαμβάνεται για κάθε νέο τετράπλευρο. Στο σχήμα 11 φαίνονται τα πρώτα βήματα της διαδικασίας για $m = 5$ (αριστερά) και $m = 6$ (δεξιά).



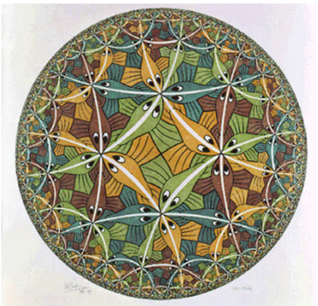
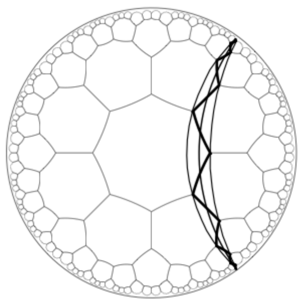
Σχήμα 11

Το σχήμα του Coxeter που εντυπωσίασε τον Escher (Σχήμα 1) είναι μια $\{6,4\}$ πλακόστρωση του υπερβολικού επιπέδου $\mathbb{H}$. Κάθε κανονικό εξάγωνο χωρίζεται σε 12 ίσα τρίγωνα με υπερβολικά ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν το κέντρο του πολυγώνου με κάποια κορυφή ή το μέσο κάποιας πλευράς. Την ίδια ακριβώς πλακόστρωση χρησιμοποίησε ο Escher για τα έργα του Circle Limit I, II και IV (Σχήμα 12). Στο Circle Limit III η πλακόστρωση που υπάρχει είναι $\{8,3\}$ (Σχήμα 13).

Σχήμα 12

Μια πρώτη ματιά δίνει την εντύπωση ότι τα τόξα που περνούν από τη ραχοκοκαλιά των ψαριών είναι υπερβολικές ευθείες. Όμως ο Coxeter απέδειξε [1] ότι αυτά τα τόξα τέμνουν τον εξωτερικό κύκλο με γωνία περίπου 80^{o}. Άρα η πλακόστρωση δεν είναι αυτό που φαίνεται, δηλαδή τετράγωνα και τρίγωνα αλλά υπάρχει κάτι βαθύτερο. Όπως αναφέρθηκε η πλακόστρωση στηρίζεται σε κανονικά οκτάγωνα και τα τόξα διέρχονται από τα μέσα των πλευρών των οκταγώνων.

Σχήμα 13

Βιβλιογραφία

1. H.S.M. Coxeter, The non-Euclidean symmetry of Escher's picture "Circle Limit III", *Leonardo* 12 (1979) 19-25.
2. R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, (UTM) Springer-Verlag (2000).
3. E. Rees, *Notes on Geometry*, Universitext, Springer-Verlag (2004).
4. D. Schattschneider, *M. C. Escher, Visions of Symmetry*, Thames & Hudson (2004).
5. G. Venema, *Foundations of Geometry*, Pearson (2012).