Η ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΛΟΓΙΣΜΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Νίκος Α. Φωτιάδης
Δρ. Μαθηματικών
Επιμορφωτής Β΄ επιπέδου κλάδου ΠΕ 03
E-mail: nikos.fotiades@gmail.com
Website: http://users.sch.gr/nfotiades/

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε κάποιες αιτίες που εμποδίζουν τους μαθητές να κάνουν αυστηρή απόδειξη σε μια άσκηση γεωμετρίας ή σε κάποιο θεώρημα και προτείνουμε διδακτικούς τρόπους αξιοποίησης των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας για την αντιμετώπιση του προβλήματος.

Abstract

In this paper we examine some of the reasons that prevent pupils to make a formal proof in a geometry exercise or theorem and we suggest instructive ways of utilizing dynamic geometry software to confront the problem.

Εισαγωγή

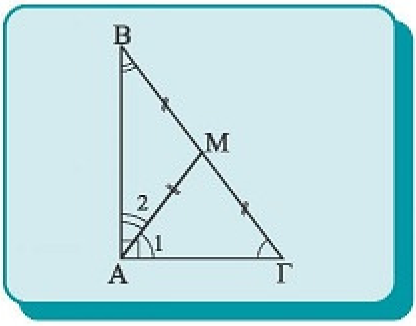
Είναι κοινή εμπειρία στην πλειοψηφία των μαθηματικών ότι ένα σημαντικό ποσοστό μαθητών του Λυκείου δυσκολεύεται να διατυπώσει με αυστηρό μαθηματικό τρόπο τη λύση ενός προβλήματος γεωμετρίας ή την απόδειξη κάποιου θεωρήματος. Οι αιτίες για την εμφάνιση αυτών των προβλημάτων είναι πολλές και οι έρευνες που έχουν γίνει εξετάζουν παράγοντες παιδαγωγικούς, ψυχολογικούς και κοινωνικούς. Στο παρόν άρθρο θα εξετάσουμε τρεις σημαντικές αιτίες και θα προτείνουμε κάποιες ιδέες για την αντιμετώπισή τους αξιοποιώντας λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας.

<u>1η αιτία</u>: Υπάρχουν μαθητές που δεν έχουν ξεκαθαρίσει βασικές γεωμετρικές έννοιες. Για παράδειγμα, θεωρούν ότι η διχοτόμος σε ένα

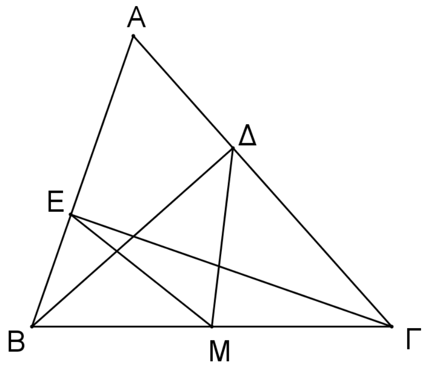
τρίγωνο είναι και διάμεσος ή ότι οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούν τις γωνίες του.

2η αιτία: Ο προσανατολισμός και η πολυπλοκότητα του σχήματος δεν επιτρέπουν σε ορισμένους μαθητές να αναγνωρίσουν κάποια βασική θεωρία ή θεώρημα. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 1α δίνεται το σχήμα που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο για το θεώρημα που αναφέρεται στη διάμεσο ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Κάποιοι μαθητές έχουν συνδέσει τη συγκεκριμένη θεωρία με αυτό τον συγκεκριμένο προσανατολισμό με αποτέλεσμα να δυσκολεύονται να την αναγνωρίζουν όταν έχει αλλάξει ο προσανατολισμός. Στην ίδια παράγραφο του σχολικού βιβλίου υπάρχει η παρακάτω άσκηση (Άσκηση Εμπέδωσης 3).

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΜΔ = ΜΕ. (Σχήμα 1β)



Σχήμα 1α



Σχήμα 1β

Στη συγκεκριμένη άσκηση ο μαθητής θα πρέπει να συγκεντρώσει την προσοχή του στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ και να δει ότι η ΔΜ είναι η διάμεσος στην υποτείνουσα. Στη συνέχεια πρέπει να κάνει το ίδιο στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ. Βέβαια η δυσκολία δεν έχει να κάνει μόνο με τον προσανατολισμό αλλά και με τη πολυπλοκότητα του σχήματος. Για να μπορέσει ο μαθητής να δει μέσα στο Σχήμα 1β τη εικόνα του Σχήματος 1α θα πρέπει να κάνει δύο νοητικές ενέργειες. Θα πρέπει να έχει την ικανότητα να κάνει αφαίρεση περιττών γραμμών ή αλλιώς να συγκεντρωθεί μόνο στο τρίγωνο ΒΓΕ, για παράδειγμα, αλλά να κάνει και περιστροφή του τριγώνου ΑΒΓ του Σχήματος 1α ώστε να μοιάζει με το ΒΓΕ.

3η αιτία: Αρκετοί είναι οι μαθητές που αναρωτιούνται γιατί θα πρέπει να αποδείξουμε κάτι που είναι "προφανές" ή "γνωστό". Γενικά, οι μαθητές δεν μπορούν να συνειδητοποιήσουν για ποιο λόγο πρέπει να γίνει αυστηρή απόδειξη. Γιατί πρέπει να αποδείξουμε ότι οι γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες αφού είναι φανερό ότι είναι ίσες ή γιατί πρέπει να αποδείξουμε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^o αφού είναι γνωστό;

Επαγωγικός και παραγωγικός συλλογισμός

Πριν περιγράψουμε πως μπορούμε να αξιοποιήσουμε τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας θα αναφερθούμε με συντομία σε δύο είδη συλλογισμού: τον επαγωγικό και παραγωγικό και για τον ρόλο που παίζουν στη διαδικασία της απόδειξης.

Όταν στηριζόμαστε σε ένα περιορισμένο πλήθος παρατηρήσεων για να συμπεράνουμε ότι κάτι είναι πάντοτε αληθινό, ο συλλογισμός που κάνουμε ονομάζεται επαγωγικός. Το περιορισμένο πλήθος παρατηρήσεων προκύπτει συνήθως με εμπειρικό τρόπο, με πειράματα και διερεύνηση ειδικών περιπτώσεων. Ο επαγωγικός συλλογισμός κυριαρχεί στις φυσικές επιστήμες. Όμως ανεξάρτητα από το πόσο πλήρως φαίνεται να δικαιολογούνται τα συμπεράσματα ενός επαγωγικού συλλογισμού από τα γεγονότα, αυτά τα συμπεράσματα δεν θεωρούνται αποδεδειγμένα και βέβαια πέρα από κάθε αμφιβολία.

Στον παραγωγικό συλλογισμό στηριζόμαστε σε ορισμένες προτάσεις που τις αποδεχόμαστε ως αληθείς (υποθέσεις) και με κάποια λογική επεξεργασία (κανόνες εξαγωγής συμπεράσματος) φτάνουμε σε κάποιο συμπέρασμα. Αντίθετα με τον επαγωγικό συλλογισμό τα συμπεράσματα στα οποία φτάνουμε με παραγωγικό συλλογισμό είναι αναμφισβήτητα. Τα μαθηματικά, από την εποχή των αρχαίων ελλήνων, είναι μια παραγωγική επιστήμη. Η αξιωματική μέθοδος ξεκίνησε από τον Ευκλείδη και από τότε κυριαρχεί στα μαθηματικά.

Όμως, παρά τα πλεονεκτήματα που έχει ο παραγωγικός συλλογισμός δεν μπορεί να αντικαταστήσει τον επαγωγικό συλλογισμό. Στην πραγματικότητα, κάθε τρόπος να αποκτήσουμε γνώση έχει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά του. Με τον παραγωγικό συλλογισμό γίνεται η αυστηρή απόδειξη κάποιου θεωρήματος με αποτέλεσμα να είμαστε πλέον βέβαιοι ότι είναι αληθινό. Όμως η ανακάλυψη του θεωρήματος γίνεται συνήθως με επαγωγικό συλλογισμό. Πριν την αυστηρή απόδειξη προηγείται μια διαδικασία διερεύνησης με δοκιμές, πειραματισμό και διατύπωση εικασιών. Ο M. de Villiers [1] (σελ. 15) αναφέρει

> *Υπάρχει μια τάση πολλών μαθηματικών να εκθέτουν τα τελικά τους αποτελέσματα με οργανωμένο τρόπο, χωρίς να συζητούν αρκετά για τη διαδικασία ανακάλυψης/επινόησης και απόδειξης. Αυτό το γεγονός τείνει να δώσει μια*

παραμορφωμένη οπτική της μαθηματικής δημιουργίας δηλαδή ότι είναι μόνο καθαρά παραγωγική.

Την αξία του επαγωγικού συλλογισμού και της διερευνητικής προσέγγισης για την ανακάλυψη της μαθηματικής γνώσης προβάλλουν οι Imre Lakatos [2] και George Polya [3] στα βιβλία τους δίνοντας πολλά παραδείγματα και εξηγώντας ότι είναι απαραίτητη προϋπόθεση για να οδηγηθούμε στον τελικό στόχο που είναι η αυστηρή μαθηματική δικαιολόγηση με παραγωγικό συλλογισμό. Σύμφωνα με τον Polya [3] (σελ. 83)

Η επαγωγική φάση υπερνικά τις αρχικές μας δυσπιστίες και μας δίνει ισχυρή αυτοπεποίθηση για το θεώρημα. Χωρίς αυτήν την αυτοπεποίθηση σπάνια θα βρίσκαμε το κουράγιο να καταπιαστούμε με την απόδειξη...

Αξιοποίηση των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας

Ένα εξαιρετικά χρήσιμο χαρακτηριστικό των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας είναι η δυνατότητα του "συρσίματος". Αυτό το χαρακτηριστικό επιτρέπει στο χρήστη να μετακινήσει ορισμένα στοιχεία του σχήματος που έχει κατασκευάσει και να παρατηρήσει άμεσα τις αλλαγές που συμβαίνουν με δυναμικό τρόπο. Καθώς γίνονται οι διάφορες αλλαγές το λογισμικό διατηρεί όλες τις σχέσεις που προσδιορίστηκαν ως ουσιαστικοί περιορισμοί για την αρχική κατασκευή, και φυσικά όλες τις σχέσεις που είναι μαθηματικές συνέπειες αυτών των αρχικών σχέσεων. Επιπλέον, τα λογισμικά αυτά έχουν την δυνατότητα του σχεδιασμού με απόλυτη ακρίβεια καθώς και των μετρήσεων διαφόρων μεγεθών.

Οι μαθητές συχνά σχεδιάζουν το σχήμα μιας άσκησης ή ενός θεωρήματος πρόχειρα, χωρίς τη χρήση γεωμετρικών οργάνων. Έτσι, αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ζητηθεί να σχεδιαστεί η διάμεσος ΑΜ ή η διχοτόμος ΑΔ οι μαθητές σχεδιάζουν απλά μια γραμμή στο εσωτερικό του τριγώνου. Σχεδιάζοντας επιπόλαια το σχήμα δεν συγκεντρώνουν την σκέψη τους στην ιδιότητα ότι το Μ είναι το μέσο της ΒΓ (όταν αναφερόμαστε στη διάμεσο) ή ότι η γωνία $\widehat{A}$ χωρίζεται σε δύο ίσες γωνίες (όταν αναφερόμαστε στη διχοτόμο). Για να αντιμετωπίσουμε τα προβλήματα που οφείλονται στην 1η αιτία μπορούμε να οργανώσουμε ορισμένες εκπαιδευτικές δραστηριότητες που θα έχουν ως κύριο στόχο τον σχεδιασμό σχημάτων με κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες και τη διενέργεια μετρήσεων για να διαπιστωθεί αν ισχύουν ή όχι κάποιες άλλες ιδιότητες.

<u>Δραστηριότητα 1η</u>

α) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ.

β) Να βρείτε το μέσο της πλευράς ΒΓ και να το ονομάσετε Μ.

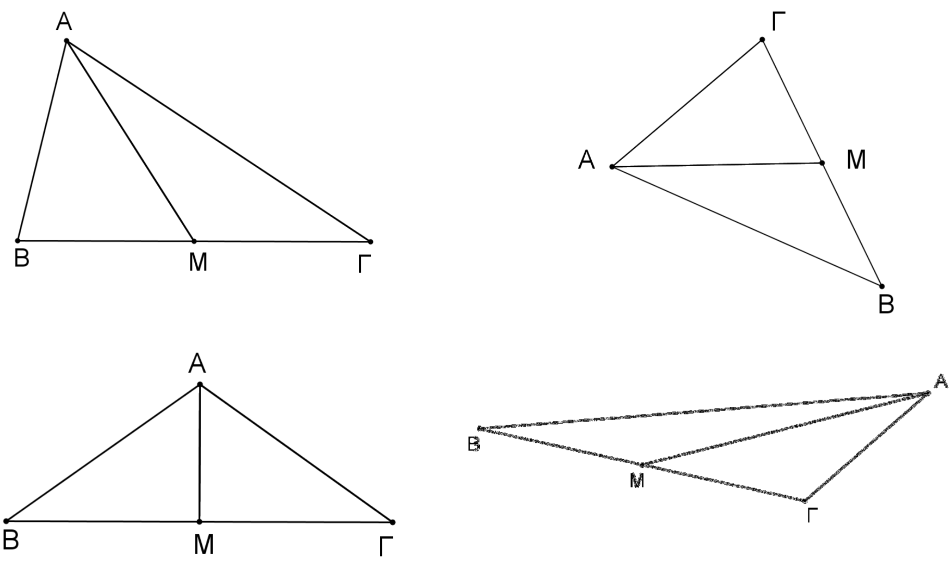
γ) Να φέρετε τη διάμεσο ΑΜ.

δ) Μετρήστε τις γωνίες $B\widehat{A}M$ και $M\widehat{A}\Gamma$.

ε) Είναι οι παραπάνω γωνίες ίσες;

στ) Επανεξετάστε το προηγούμενο ερώτημα μετακινώντας την κορυφή Α του τριγώνου. Σε ποιες περιπτώσεις οι γωνίες είναι ίσες και σε ποιες όχι; Μετρήστε και άλλα στοιχεία του τριγώνου.

Ο σχεδιασμός του σχήματος με τον υπολογιστή παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τους μαθητές από τον σχεδιασμό με τα παραδοσιακά γεωμετρικά όργανα. Επιπλέον, με τη δυνατότητα που έχουν τα λογισμικά να δίνουν μετρήσεις διαφόρων μεγεθών δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να κάνουν εύκολα μαθηματικά πειράματα, να διατυπώνουν και να ελέγχουν ως προς την ορθότητα διάφορες υποθέσεις. Όμως το σημαντικότερο είναι ότι με τη λειτουργία του συρσίματος δίνεται η δυνατότητα μεταβολής του σχήματος με συνεχή (σχεδόν) τρόπο, οπότε οι μαθητές μπορούν να εξετάσουν ορισμένες ειδικές περιπτώσεις αλλά και να το δουν με διαφορετικό προσανατολισμό. Με αυτό τον τρόπο αντιμετωπίζουμε στην ουσία και προβλήματα που οφείλονται στην 2η αιτία. Οι μαθητές μπορούν να περιστρέψουν το σχήμα και να εμπλουτίσουν την εμπειρία τους με διάφορους προσανατολισμούς και ειδικές περιπτώσεις. (Σχήμα 2)



Σχήμα 2

Η 3η αιτία είναι ίσως η πιο σημαντική. Θα πρέπει ο μαθητής να πειστεί για την αναγκαιότητα μιας αυστηρής απόδειξης. Αν εξετάσουμε ιστορικά το θέμα θα διαπιστώσουμε ότι τα μαθηματικά πριν τους αρχαίους έλληνες ήταν μια εμπειρική επιστήμη όπου κυριαρχούσε ο επαγωγικός συλλογισμός, ο συλλογισμός με αναλογίες που είναι μια μορφή επαγωγικού συλλογισμού ενώ απουσίαζε οποιαδήποτε προσπάθεια αυστηρής απόδειξης και δικαιολόγησης. Σε αυτή την κατάσταση παρέμειναν τα μαθηματικά για χιλιετίες μέχρι την εποχή του Θαλή και του Πυθαγόρα. Αυτό το γεγονός μας πείθει ότι έπρεπε να περάσει πολύς καιρός μέχρι να ωριμάσει η μαθηματική κοινότητα και να προχωρήσει στο αξιωματικό σύστημα και στις αποδείξεις με παραγωγικό συλλογισμό. Μπορούμε λοιπόν να φανταστούμε ότι είναι μάλλον φυσιολογικό να δυσκολεύονται οι μαθητές να μπουν στην λογική του παραγωγικού λογισμού.

Με τη διερεύνηση που περιγράφεται στην 1η δραστηριότητα μπορούμε να οδηγήσουμε τους μαθητές να παρατηρήσουν ότι όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$ τότε η διάμεσος ΑΜ είναι και διχοτόμος. Έτσι αυτή η δραστηριότητα μπορεί να προκαλέσει το αρχικό ερέθισμα ώστε με μια σειρά ερωτήσεων να αναγκάσουμε τους μαθητές να προσπαθήσουν να δικαιολογήσουν γιατί αυτό ισχύει πάντα. Επιπλέον, αυτή η συζήτηση μπορεί να οδηγηθεί στο πιο δύσκολο αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή αν σε τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΑΜ είναι και διχοτόμος να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Η δραστηριότητα που ακολουθεί είναι σχεδιασμένη για να δώσει στους μαθητές τον προβληματισμό ότι η επαγωγική φάση δεν μπορεί να υπάρχει από μόνη της και ότι είναι απαραίτητος ο παραγωγικός συλλογισμός για να δοθεί πλήρης αιτιολόγηση. Η εμπειρική/πρακτική λύση σε αρκετές περιπτώσεις δεν είναι αρκετή.

<u>Δραστηριότητα 2η</u>

Δημιουργούμε ένα αρχείο Geogebra στο οποίο τοποθετούμε τον μοναδιαίο κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ και το σημείο του $\mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ζητάμε από τους μαθητές να τοποθετήσουν ένα σημείο Β στον θετικό ημιάξονα $\mathrm{O}x$, να σχεδιάσουν την ευθεία που ορίζεται από τα σημεία Α, Β και να βρουν τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τον μοναδιαίο κύκλο. Στη συνέχεια ζητάμε από τους μαθητές να προσδιορίσουν με μετατοπίσεις του σημείου Β μία κατάλληλη θέση ώστε η ευθεία ΑΒ και ο μοναδιαίος κύκλος να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

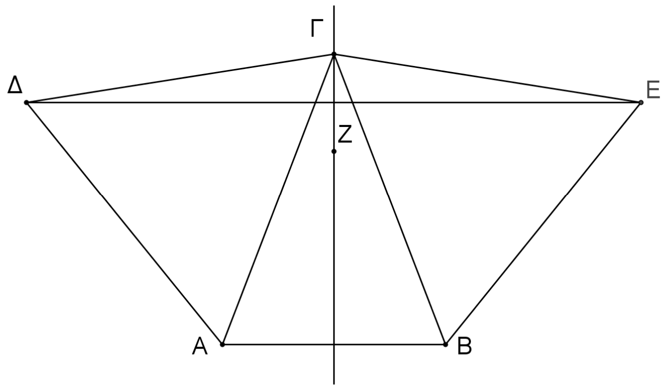
Είναι πρακτικά αδύνατον να βρεθεί αυτή η κατάλληλη θέση με διαδοχικές μετατοπίσεις του σημείου Β. Για τη συγκεκριμένη επιλογή του σημείου Α το ζητούμενο σημείο Β έχει συντεταγμένες $\mathrm{B}(\sqrt{2},0)$. Η τετμημένη του σημείου Β είναι άρρητος αριθμός οπότε δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί η θέση στην τύχη. Η διερεύνηση, ο πειραματισμός και γενικά η επαγωγική διαδικασία δεν μπορεί να δώσει τη λύση. Εδώ μπορεί να γίνει συζήτηση για τη σχετική θέση ευθείας και κύκλου και ειδικά για την περίπτωση της εφαπτομένης του κύκλου που είναι κάθετη στην ακτίνα στο σημείο επαφής. Έτσι για τον προσδιορισμό της θέσης του σημείου Β αρκεί να φέρουμε την κάθετη στην ακτίνα ΟΑ (όπου Ο η αρχή των αξόνων) στο σημείο Α και να βρούμε το σημείο τομής αυτής της ευθείας με τον άξονα $x'x$.

Με τη δυνατότητα του συρσίματος και με αρκετή παρατηρητικότητα είναι δυνατόν να εντοπίσουμε σε ένα σχήμα σχέσεις που παραμένουν σταθερές και αναλλοίωτες κατά τις μετατοπίσεις. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 1β που αναφέρεται σε άσκηση του σχολικού βιβλίου θα μπορούσε κάποιος να παρατηρήσει ότι τα τμήματα ΜΔ, ΜΕ, που πρέπει να αποδείξουμε ότι είναι ίσα, φαίνεται να είναι ίσα και με τα τμήματα ΜΒ, ΜΓ. Έτσι μπορούμε να διατυπώσουμε την εικασία ότι τα τμήματα ΜΒ, ΜΓ, ΜΔ και ΜΕ είναι ίσα και να ελέγξουμε την αλήθεια της εικασίας με μετρήσεις ή σχεδιάζοντας έναν κύκλο με κέντρο το σημείο Μ και ακτίνα ΜΒ. Ο κύκλος αυτός διέρχεται από τα σημεία Γ, Δ και Ε.

Ένα τελευταίο παράδειγμα για να δείξουμε πως η επαγωγική φάση μπορεί να βοηθήσει ώστε να εφοδιαστούμε με αρκετά στοιχεία και τελικά να προχωρήσουμε με επιτυχία στην παραγωγική φάση είναι η άσκηση που ακολουθεί.

> *Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα σημείο Γ στη μεσοκάθετο του ΑΒ. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ. Αν Ζ είναι το συμμετρικό του Γ ως προς την ΔΕ να αποδείξετε ότι η θέση του σημείου Ζ είναι ανεξάρτητη από τη θέση του σημείου Γ. (Σχήμα 3)*

Η άσκηση αυτή είναι αρκετά πιο δύσκολη κυρίως γιατί πρέπει να φέρουμε κάποιες βοηθητικές γραμμές. Ο σχεδιασμός του σχήματος σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να προσφέρει μια μοναδική εμπειρία που ένα αντίστοιχο σχήμα στο χαρτί δεν μπορεί να προσφέρει με κανένα τρόπο. Ο χρήστης μπορεί να μετακινήσει ελεύθερα το σημείο Γ κατά μήκος της μεσοκαθέτου και να διαπιστώσει ότι το σημείο Ζ δεν μετακινείται από τη θέση του. Στη συνέχεια αν μετακινήσουμε κάποιο από τα σημεία Α, Β ώστε να αλλάξει η μεταξύ τους απόσταση παρατηρούμε ότι μετακινείται και το σημείο Ζ. Σε αυτό το σημείο θα είναι σημαντικό για τη λύση της άσκησης να παρατηρήσουμε ότι το μήκος του ΑΖ φαίνεται να είναι ίσο με το μήκος του ΑΒ. Έτσι μπορούμε να διατυπώσουμε την εικασία ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισόπλευρο και να προχωρήσουμε στον έλεγχο της εικασίας. Βρίσκοντας πειραματικά όλο και περισσότερες σχέσεις οδηγούμαστε πιο κοντά στη λύση που για να ολοκληρωθεί με αυστηρό τρόπο θα πρέπει τελικά να συγκρίνουμε το τρίγωνο ΑΒΓ με το ΑΔΖ (ή το ΒΖΕ).



Σχήμα 3

Οι προτεινόμενες δραστηριότητες είναι σχεδιασμένες για να υλοποιηθούν στο σχολικό εργαστήριο πληροφορικής από μαθητές της Α' Λυκείου. Σε κάθε υπολογιστή, που πρέπει να είναι εφοδιασμένος με κατάλληλο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, κάθονται 2 ή 3 μαθητές οι οποίοι συνεργάζονται μεταξύ τους και συζητούν τις διάφορες φάσεις της δραστηριότητας. Ένα φύλλο εργασίας είναι απαραίτητο για την καθοδήγηση της δραστηριότητας. Σε αυτό το φύλλο θα περιγράφονται τα διάφορα βήματα της κατασκευής, αλλά θα πρέπει να υπάρχουν και κατάλληλες ερωτήσεις που θα δίνουν τα ερεθίσματα στους μαθητές να πειραματιστούν, να διατυπώσουν και να ελέγξουν ως προς την ορθότητά τους διάφορες εικασίες.

Συμπέρασμα

Για να πραγματοποιηθούν οι δραστηριότητες που περιγράψαμε απαιτείται αρκετός χρόνος. Τη λύση της άσκησης του σχολικού βιβλίου ένας μαθηματικός μπορεί να την παρουσιάσει στην τάξη μέσα σε λίγα λεπτά και στη διάρκεια μιας σχολικής ώρας να κάνει και άλλες ασκήσεις ή να παρουσιάσει επόμενα θεωρήματα. Με αυτό τον τρόπο όμως στερεί από τους μαθητές τη δυνατότητα να πειραματιστούν και να διερευνήσουν το πρόβλημα. Επιπλέον σχηματίζουν την εσφαλμένη εντύπωση ότι τα μαθηματικά είναι μόνο αυστηρές αποδείξεις. Η φάση του επαγωγικού συλλογισμού είναι χρονοβόρα αν όμως προηγηθεί της αυστηρής απόδειξης τότε η τελευταία αποκτάει περισσότερο νόημα για τους μαθητές.

Βιβλιογραφία

1. M. De Villiers, *The Role of Proof in Investigative, Computer-based Geometry: Some Personal Reflections*, Geometry Turned On, Dynamic Software in Learning, Teaching and Research, J. King, and D. Schattschneider, (Eds) MAA Notes 41 (1997) 15-24.
2. I. Lakatos, *Proof and Refutations*, Cambridge University Press, (1976).
3. G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning. Induction and Analogy in Mathematics.* Vol I. Princeton University Press, (1954).