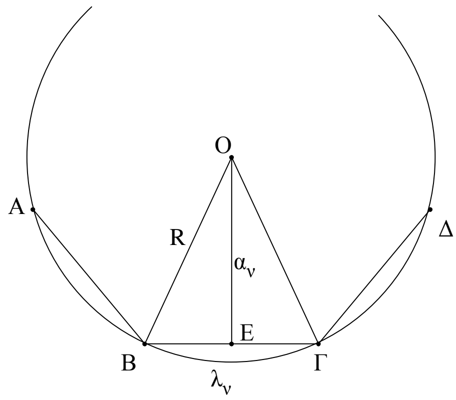
Κανονικά πολύγωνα

Ένα πολύγωνο ονομάζεται *κανονικό* όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.

Αν χωρίσουμε έναν κύκλο σε ν ίσα τόξα, τότε τα άκρα αυτών των τόξων είναι κορυφές κανονικού ν-γώνου. Όπως θα δούμε στη συνέχεια για ορισμένες τιμές του ν είναι δυνατόν, με κανόνα και διαβήτη, να εγγράψουμε κανονικό ν-γωνο σε κύκλο.



Έστω λ_ν, α_ν η πλευρά και το απόστημα ενός κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$\frac{\lambda_\nu^2}{4} + \alpha_\nu^2 = R^2 \qquad (1)$$

ή ισοδύναμα

$$2\alpha_\nu = \sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}\,. \qquad (2)$$

Ο τύπος του Αρχιμήδη

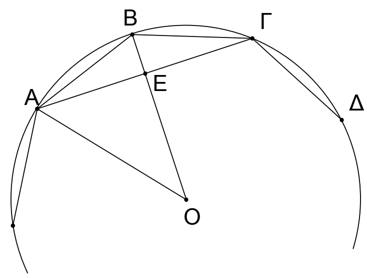
Στο παρακάτω σχήμα υποθέτουμε ότι η ΑΓ είναι πλευρά κανονικού ν-γώνου και Β το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$. Τότε η ΑΒ είναι πλευρά κανονικού 2ν-γώνου. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε ισοδύναμα

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BE}^2 + \mathrm{AE}^2 \Leftrightarrow \lambda_{2\nu}^2 = (R - \alpha_\nu)^2 + \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{2\nu}^2 = R^2 - 2R\alpha_\nu + {\alpha_\nu}^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4}$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \lambda_{2\nu}^2 = 2R^2 - 2R\alpha_\nu$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \lambda_{2\nu}^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}$$



Η τελευταία ισότητα λέγεται *τύπος του Αρχιμήδη*.

Αν προεκτείνουμε το απόστημα ενός κανονικού πολυγώνου τότε αυτό διέρχεται από το μέσο του τόξου που αντιστοιχεί στην χορδή του. Έτσι αν εγγράψουμε ένα κανονικό ν-γωνο σε κύκλο τότε μπορούμε να εγγράψουμε και ένα κανονικό 2ν-γωνο, ένα κανονικό 4ν-γωνο κλπ.

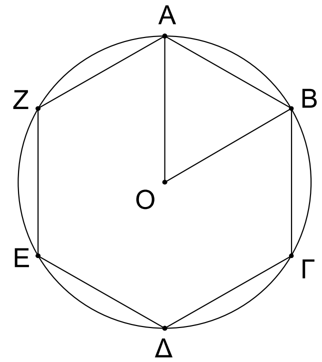
Κανονικό εξάγωνο

Έστω ΑΒΓΔΕΖ ένα κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Οι κορυφές του εξαγώνου χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα των $\frac{360^o}{6} = 60^o$.

Άρα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο, οπότε $\lambda_6 = R$.

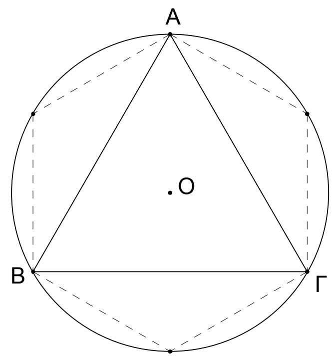
Με τον τύπο (1) βρίσκουμε $\frac{\lambda_6^2}{4} + \alpha_6^2 = R^2 \Leftrightarrow \frac{R^2}{4} + \alpha_6^2 = R^2 \Leftrightarrow \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Μπορούμε να εγγράψουμε ένα κανονικό εξάγωνο μέσα σε κύκλο με κανόνα και διαβήτη. Έστω ότι δίνεται ένας κύκλος (O, R) και ένα σημείο του Α. Με τον διαβήτη κατασκευάζουμε έξι διαδοχικά ίσα τόξα που το καθένα έχει χορδή ίση με την ακτίνα R. Τα άκρα των τόξων είναι οι κορυφές του κανονικού εξαγώνου.



Ισόπλευρο τρίγωνο

Είναι δυνατόν να εγγράψουμε σε κύκλο ένα ισόπλευρο τρίγωνο με κανόνα και διαβήτη. Αρχικά χωρίζουμε τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα και στη συνέχεια φέρουμε τις χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ, ώστε τα μη κυρτά τόξα των χορδών αυτών να είναι 120^o.



Από τον τύπο του Αρχιμήδη και την ισότητα $\lambda_6 = R$ έχουμε ισοδύναμα

$$\lambda_6^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_3^2} \Leftrightarrow R^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_3^2} \Leftrightarrow \lambda_3^2 = 3R^2 \Leftrightarrow \lambda_3 = R\sqrt{3}.$$

Με τον τύπο (1) βρίσκουμε $\frac{\lambda_3^2}{4} + \alpha_3^2 = R^2 \Leftrightarrow \frac{3R^2}{4} + \alpha_3^2 = R^2 \Leftrightarrow \alpha_3 = \frac{R}{2}$.

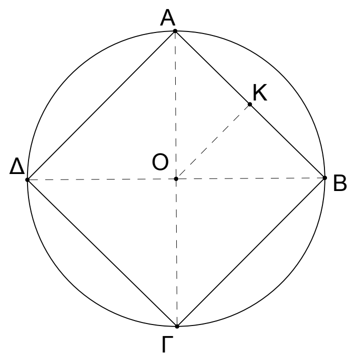
Τετράγωνο

Τα άκρα δύο κάθετων χορδών ΑΓ, ΒΔ ενός κύκλου είναι κορυφές ενός τετραγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο.

Φέρουμε το απόστημα ΟΚ της πλευράς ΑΒ. Το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΚ έχουμε:

$$OK^2 + AK^2 = R^2 \Leftrightarrow 2OK^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow OK = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$



Άρα $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ και $\lambda_4 = 2AK = R\sqrt{2}$.

Κανονικό οκτάγωνο

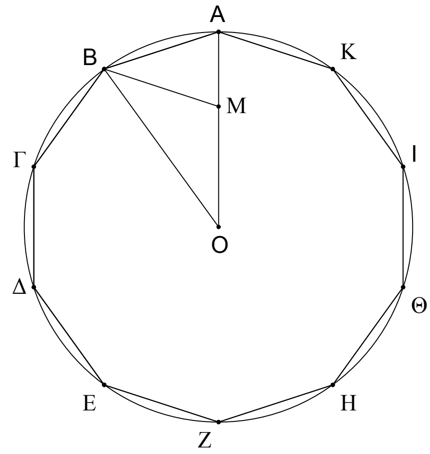
Έστω ότι ένα κανονικό οκτάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Για να εκφράσουμε την πλευρά του λ_8 συναρτήσει της ακτίνας R χρησιμοποιούμε τον τύπο του Αρχιμήδη και την ισότητα $\lambda_4 = R\sqrt{2}$.

$$\lambda_8^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_4^2} \Leftrightarrow \lambda_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}\,.$$

Για το απόστημα του κανονικού οκταγώνου από τον τύπο (1) έχουμε:

$$\frac{\lambda_8^2}{4} + \alpha_8^2 = R^2 \Leftrightarrow \alpha_8^2 = R^2 - \frac{R^2(2-\sqrt{2})}{4} \Leftrightarrow \alpha_8 = \frac{R\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,.$$

Κανονικό δεκάγωνο



Δίνεται κανονικό δεκάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ είναι $A\hat{O}B = \frac{360^o}{10} = 36^o$ και κάθε μια από τις ίσες γωνίες της βάσης είναι

$$\frac{180^o - 36^o}{2} = 72^o.$$

Αν στο τρίγωνο ΟΑΒ φέρουμε την διχοτόμο ΒΜ τότε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΟΒΜ είναι ισοσκελή, άρα

$$AB = BM = OM = \lambda_{10}\,.$$

Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΒΑΜ είναι όμοια γιατί έχουν τις γωνίες τους μια προς μία ίσες, άρα

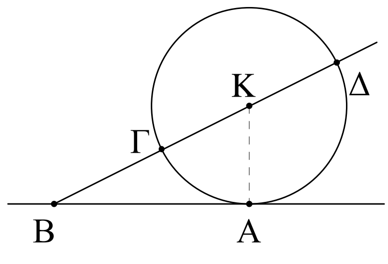
$$\frac{OA}{AB} = \frac{AB}{AM} \Leftrightarrow \frac{R}{\lambda_{10}} = \frac{\lambda_{10}}{R-\lambda_{10}} \Leftrightarrow \lambda_{10}^2 + R\lambda_{10} - R^2 = 0\,.$$

Η θετική λύση της εξίσωσης είναι

$$\lambda_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R\,.$$

Από τον τύπο (1) έχουμε ισοδύναμα

$$\frac{\lambda_{10}^2}{4} + \alpha_{10}^2 = R^2 \Leftrightarrow \alpha_{10}^2 = R^2 - \frac{3-\sqrt{5}}{8}R^2 \Leftrightarrow \alpha_{10} = \frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\,.$$



Για να εγγράψουμε ένα κανονικό δεκάγωνο σε κύκλο (O,R) αρκεί να βρούμε μια χορδή του με μήκος λ_{10}. Αυτό μπορεί να γίνει με κανόνα και διαβήτη ως εξής: Γράφουμε κύκλο $\left(K,\frac{R}{2}\right)$ και σε ένα σημείο του Α φέρουμε την εφαπτομένη. Έστω Β σημείο της εφαπτομένης τέτοιο ώστε $AB = R$.

Από το Β φέρουμε την τέμνουσα του κύκλου που διέρχεται από το κέντρο του Κ και τέμνει τον κύκλο στο σημεία Γ, Δ. Ισχύει ότι

$$\mathrm{B\Gamma}\cdot \mathrm{B\Delta} = \mathrm{AB}^2 \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma}\cdot(\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{R}) = \mathrm{R}^2 \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma}^2 + \mathrm{R}\cdot\mathrm{B\Gamma} - \mathrm{R}^2 = 0.$$

Άρα $\mathrm{B\Gamma} = \lambda_{10}$.

Κανονικό πεντάγωνο

Από τον τύπο του Αρχιμήδη και την ισότητα $\lambda_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{R}$ έχουμε ισοδύναμα:

$$\lambda_{10}^2 = 2\mathrm{R}^2 - \mathrm{R}\sqrt{4\mathrm{R}^2 - \lambda_5^2} \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}\mathrm{R}^2 = 2\mathrm{R}^2 - \mathrm{R}\sqrt{4\mathrm{R}^2-\lambda_5^2}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{R}\sqrt{4\mathrm{R}^2-\lambda_5^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\mathrm{R}^2$$

$$\Leftrightarrow 4\mathrm{R}^2 - \lambda_5^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\mathrm{R}^2$$

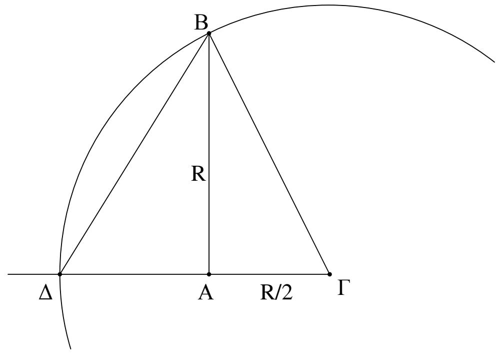
$$\Leftrightarrow \lambda_5^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}\mathrm{R}^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda_5 = \frac{\mathrm{R}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

Από τον τύπο (1) έχουμε ισοδύναμα

$$\frac{\lambda_5^2}{4} + \alpha_5^2 = \mathrm{R}^2 \Leftrightarrow \alpha_5^2 = \mathrm{R}^2 - \frac{5-\sqrt{5}}{8}\mathrm{R}^2 \Leftrightarrow \alpha_5 = \mathrm{R}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} \Leftrightarrow \alpha_5 = \frac{\mathrm{R}}{4}\left(\sqrt{5}+1\right).$$

Για να κατασκευάσουμε την πλευρά κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) σχεδιάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές $\mathrm{AB} = \mathrm{R}$ και $\mathrm{A\Gamma} = \frac{\mathrm{R}}{2}$. Ο κύκλος $(\Gamma, \mathrm{B\Gamma})$ τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο σημείο Δ. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:



$$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{R}^2 + \frac{\mathrm{R}^2}{4} \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma}^2 = \frac{5\mathrm{R}^2}{4} \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma} = \frac{\mathrm{R}\sqrt{5}}{2}.$$

Από την γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε:

$$\mathrm{B\Delta}^2 = \mathrm{B\Gamma}^2 + \Gamma\Delta^2 - 2\Gamma\Delta\cdot\mathrm{A\Gamma} \Leftrightarrow \mathrm{B\Delta}^2 = \frac{5\mathrm{R}^2}{4} + \frac{5\mathrm{R}^2}{4} - 2\frac{\mathrm{R}\sqrt{5}}{2}\frac{\mathrm{R}}{2} \Leftrightarrow \mathrm{B\Delta} = \mathrm{R}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Άρα $\mathrm{B\Delta} = \lambda_5$.

Κανονικό δωδεκάγωνο

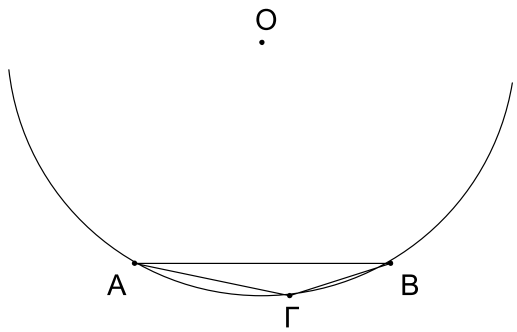
Από τον τύπο του Αρχιμήδη και την ισότητα $\lambda_6 = R$ έχουμε ισοδύναμα:

$$\lambda_{12}^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_6^2} \Leftrightarrow \lambda_{12}^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - R^2} \Leftrightarrow \lambda_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Από τον τύπο (1) έχουμε ισοδύναμα

$$\frac{\lambda_{12}^2}{4} + \alpha_{12}^2 = R^2 \Leftrightarrow \alpha_{12}^2 = R^2 - \frac{2-\sqrt{3}}{4}R^2 \Leftrightarrow \alpha_{12} = \frac{R\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Κανονικό δεκαπεντάγωνο



Το κανονικό δεκαπεντάγωνο μπορεί να σχεδιαστεί με κανόνα και διαβήτη ως εξής. Σε έναν κύκλο (O, R) σχεδιάζουμε μια χορδή $AB = \lambda_6$ και μια χορδή $A\Gamma = \lambda_{10}$. (Το σημείο Γ βρίσκεται στο κυρτό τόξο $\overset{\frown}{AB}$).

Τότε $\overset{\frown}{AB} = 60^o$ και $\overset{\frown}{A\Gamma} = 36^o$ οπότε $\overset{\frown}{B\Gamma} = 24^o$. Άρα $B\Gamma = \lambda_{15}$.

Η γωνία $A\hat{\Gamma}B$ είναι εγγεγραμμένη στο μη κυρτό τόξο $\overset{\frown}{AB}$ που είναι 300^o, άρα $A\hat{\Gamma}B = 150^o$. Σύμφωνα με τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι

$$AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2 - 2A\Gamma \cdot B\Gamma συν150^o \Rightarrow \lambda_6^2 = \lambda_{10}^2 + \lambda_{15}^2 - 2\lambda_{10}\lambda_{15}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Επειδή $\lambda_6 = R$ και $\lambda_{10} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ έχουμε $R^2 = \left(R\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + \lambda_{15}^2 + \sqrt{3}R\frac{\sqrt{5}-1}{2}\lambda_{15}$.

Ισοδύναμα παίρνουμε την εξίσωση

$$\lambda_{15}^2 + R\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{2}\lambda_{15} + R^2\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 0$$

που είναι εξίσωση 2ου βαθμού με άγνωστο το λ_{15}. Η θετική λύση της εξίσωσης είναι

$$\lambda_{15} = R\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{4}.$$

Από την ισότητα (1) παίρνουμε $\frac{\lambda_{15}^2}{4} + \alpha_{15}^2 = R^2$ και ισοδύναμα

$$\alpha_{15} = R\frac{\sqrt{36+4\sqrt{5}+2\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{8}.$$

Κανονικό δεκαεξάγωνο

Από τον τύπο του Αρχιμήδη και την ισότητα $\lambda_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ έχουμε ισοδύναμα:

$\lambda_{16}^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_8^2} \Leftrightarrow \lambda_{16}^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - 2R^2 + R^2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \lambda_{16} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Από τον τύπο (1) έχουμε ισοδύναμα

$$\frac{\lambda_{16}^2}{4} + \alpha_{16}^2 = R^2 \Leftrightarrow \alpha_{16}^2 = R^2 - \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}R^2 \Leftrightarrow \alpha_{16} = \frac{R\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}.$$

Πλήθος πλευρών ν	**Πλευρά λ_ν**	**Απόστημα α_ν**
Ισόπλευρο τρίγωνο	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$
Τετράγωνο	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$
Κανονικό πεντάγωνο	$\frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$	$\frac{R}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$
Κανονικό εξάγωνο	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$
Κανονικό οκτάγωνο	$R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{R\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
Κανονικό δεκάγωνο	$R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\frac{R\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
Κανονικό δωδεκάγωνο	$R\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\frac{R\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$
Κανονικό δεκαπεντάγωνο	$R\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{4}$	$R\frac{\sqrt{36+4\sqrt{5}+2\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{8}$
Κανονικό δεκαεξάγωνο	$R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$\frac{R\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$

Κατασκευή κανονικών πολυγώνων

Ο Gauss απέδειξε ότι η διαίρεση ενός κύκλου σε ν ίσα τόξα είναι δυνατή με κανόνα και διαβήτη αν και μόνο αν για τον αριθμό ν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

(α) Είναι δύναμη του 2.

(β) Είναι πρώτος αριθμός της μορφής $2^{2^\kappa}+1$.

(γ) Είναι γινόμενο διαφορετικών πρώτων της προηγούμενης μορφής επί μια δύναμη του 2.

Ένας πρώτος αριθμός της μορφής $2^{2^\kappa}+1$ λέγεται πρώτος αριθμός του Fermat. Για $\kappa = 0,1,2,3,4$ προκύπτουν από τον τύπο $2^{2^\kappa}+1$ οι αριθμοί 3, 5, 17, 257, 65537 που είναι όλοι πρώτοι, όμως ο αριθμός που προκύπτει για $\kappa = 5$ είναι σύνθετος αφού $2^{2^5}+1 = 2^{32}+1 = 641\cdot 6700417$.