Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής

Η έννοια της πρότασης είναι μια κεντρική έννοια στην μαθηματική λογική και έχει ένα πολύ συγκεκριμένο νόημα. **Πρόταση** είναι μια απόφανση που μπορούμε να χαρακτηρίσουμε είτε ως αληθή (Α) είτε ως ψευδή (Ψ). Ας δούμε ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι προτάσεις σύμφωνα με τον ορισμό που προηγήθηκε.

(α) Ο αριθμός 4 είναι μικρότερος από τον αριθμό 10.
(β) Ο αριθμός 50 είναι περιττός.
(γ) Ο αριθμός x είναι θετικός.
(δ) Είναι ο αριθμός 4 μικρότερος από τον αριθμό 10;

Η έκφραση (α) είναι μια αληθής πρόταση, η έκφραση (β) είναι μια ψευδής πρόταση, η έκφραση (γ) δεν είναι πρόταση γιατί δεν μπορούμε να την χαρακτηρίσουμε ούτε ως αληθή ούτε ως ψευδή και η έκφραση (δ) δεν είναι πρόταση γιατί δεν είναι απόφανση.

Ο χαρακτηρισμός 'αληθής' ή 'ψευδής' μιας πρότασης λέγεται **τιμή αλήθειας** της πρότασης.

Προτασιακός τύπος μιας μεταβλητής λέγεται μια έκφραση που περιέχει μια μεταβλητή και γίνεται πρόταση αν η μεταβλητή αντικατασταθεί με έναν αριθμό. Η έκφραση (γ) που αναφέρθηκε πιο πάνω είναι ένας προτασιακός τύπος μιας μεταβλητής. Αν στη θέση του x βάλουμε τον αριθμό 2 τότε προκύπτει μια αληθής πρόταση ενώ αν στη θέση του x βάλουμε τον αριθμό -4 προκύπτει μια ψευδής πρόταση. Το σύνολο από το οποίο παίρνει τις τιμές η μεταβλητή του προτασιακού τύπου λέγεται **πεδίο ορισμού** του προτασιακού τύπου. Υπάρχουν **προτασιακοί τύποι δύο ή περισσότερων μεταβλητών**. Ένας προτασιακός τύπος δύο μεταβλητών είναι: '$x > y$' και ένας προτασιακός τύπος τριών μεταβλητών είναι: '$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$'.

Μπορούμε να συνδυάσουμε με την βοήθεια των **λογικών συνδέσμων** δύο προτάσεις (ή δύο προτασιακούς τύπους) για να σχηματίσουμε μια νέα πιο σύνθετη πρόταση (προτασιακό τύπο). Οι λογικοί σύνδεσμοι είναι:

- το '… και …' συμβολικά $\wedge$,
- το '… ή …' συμβολικά $\vee$,
- το 'αν … τότε …' συμβολικά $\Rightarrow$
- το '… αν και μόνο αν …' συμβολικά $\Leftrightarrow$

Σε κάθε λογικό σύνδεσμο υπάρχουν δύο κενά. Αν βάλουμε σε κάθε κενό μία πρόταση (ή προτασιακό τύπο) τότε προκύπτει μια νέα πρόταση (προτασιακός τύπος).

Παραδείγματα.

1. Στην παράσταση $\mathrm{A} = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ δεν μπορούμε να βάλουμε το 2 στην θέση του x γιατί τότε μηδενίζεται ο παρανομαστής του κλάσματος. Δεν μπορούμε όμως να βάλουμε ούτε το -2 για τον ίδιο λόγο. Λέμε ότι η παράσταση Α ορίζεται όταν
$$x \neq 2 \ \textit{και} \ x \neq -2 .$$
2. Ο προτασιακός τύπος '$x \geq 1$' είναι μια σύντομη γραφή της έκφρασης
$$x > 1 \ \textit{ή} \ x = 1 .$$
3. Αν δύο αριθμοί είναι ίσοι τότε τα τετράγωνα αυτών των αριθμών είναι ίσα. Δηλαδή,
$$\textit{αν} \ \alpha = \beta \ \textit{τότε} \ \alpha^2 = \beta^2 .$$

4. Δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες *αν και μόνο αν* δύο γωνίες του τριγώνου είναι ίσες.

Έστω p,q δύο προτάσεις. Αυτές μπορεί να είναι και οι δύο αληθείς ή και οι δύο ψευδείς ή η μια αληθής και η άλλη ψευδής ή αντίστροφα. Δηλαδή συνολικά υπάρχουν 4 δυνατοί συνδυασμοί οι οποίοι παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

p	q
Α	Α
Α	Ψ
Ψ	Α
Ψ	Ψ

Αν γνωρίζουμε την τιμή αλήθειας δύο προτάσεων p,q τότε τίθεται το ερώτημα ποια είναι η τιμή αλήθειας των σύνθετων προτάσεων $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ που προκύπτουν με τη χρήση των λογικών συνδέσμων. Η απάντηση δίνεται στους παρακάτω **πίνακες τιμών αλήθειας**.

Σύζευξη δύο προτάσεων.

Έστω p και q δύο προτάσεις. Η πρόταση $p \wedge q$ λέγεται σύζευξη των p, q και είναι αληθής μόνο στην περίπτωση που οι p και q είναι αληθείς.

p	q	$p \wedge q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

Η πρόταση $p \wedge q$ διαβάζεται ‘η p και η q’.

Διάζευξη δύο προτάσεων.

Έστω p και q δύο προτάσεις. Η πρόταση $p \vee q$ λέγεται διάζευξη των p, q και είναι ψευδής μόνο στην περίπτωση που οι p και q είναι ψευδείς.

p	q	$p \vee q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

Η πρόταση $p \vee q$ διαβάζεται ‘η p ή η q’.

Συνεπαγωγή.

Έστω p και q δύο προτάσεις. Η πρόταση $p \Rightarrow q$ λέγεται συνεπαγωγή των p, q και είναι ψευδής μόνο στην περίπτωση που η p είναι αληθής και η q ψευδής.

p	q	$p \Rightarrow q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

Η συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ λέγεται και **υποθετική πρόταση**. Η πρόταση p λέγεται **υπόθεση** ενώ η πρόταση q **συμπέρασμα**. Η πρόταση $p \Rightarrow q$ διαβάζεται ‘αν η p τότε η q’.

Ισοδυναμία.
Έστω p και q δύο προτάσεις. Η πρόταση $p \Leftrightarrow q$ λέγεται ισοδυναμία των p, q και είναι αληθής μόνο στις περιπτώσεις που p και q έχουν την ίδια τιμή αλήθειας.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

Η πρόταση $p \Leftrightarrow q$ διαβάζεται ‘η p αν και μόνο αν η q’.

Η **άρνηση** μιας πρότασης p είναι μια νέα πρόταση $\overline{p}$ η οποία διαβάζεται ‘όχι p’ και έχει αντίθετη τιμή αλήθειας από την p.

p	$\overline{p}$
Α	Ψ
Ψ	Α

Έστω p,q δύο προτάσεις. **Προτασιακή παράσταση** των p,q είναι μια πρόταση στην οποία υπάρχουν οι προτάσεις p,q, λογικοί σύνδεσμοι και ενδεχομένως αρνήσεις προτάσεων. Παραδείγματα προτασιακών παραστάσεων δύο προτάσεων p,q είναι:

(α) $p \vee (\overline{q} \Leftrightarrow p)$

(β) $\overline{(p \vee q)} \wedge (q \Rightarrow \overline{p})$

Μπορούμε να σχηματίσουμε τον πίνακα τιμών αλήθειας της παράστασης $p \vee (\overline{q} \Leftrightarrow p)$.

p	q	$\overline{q}$	$\overline{q} \Leftrightarrow p$	$p \vee (\overline{q} \Leftrightarrow p)$
Α	Α	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ

Ο **βραχύς αληθοπίνακας** της παράστασης $p \vee (\overline{q} \Leftrightarrow p)$ είναι

p	q	$p \vee (\overline{q} \Leftrightarrow p)$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

Ο πίνακας τιμών αλήθειας και ο βραχύς αληθοπίνακας της παράστασης $\overline{(p \vee q)} \wedge (q \Rightarrow \overline{p})$ είναι

p	q	$\overline{p}$	$p \vee q$	$\overline{(p \vee q)}$	$q \Rightarrow \overline{p}$	$\overline{(p \vee q)} \wedge (q \Rightarrow \overline{p})$
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α

p	q	$\overline{(p \vee q)} \wedge (q \Rightarrow \overline{p})$
Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

Δύο προτάσεις είναι **λογικά ισοδύναμες** αν έχουν τον ίδιο βραχύ αληθοπίνακα.

Οι προτάσεις $p \Leftrightarrow q$ και $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ είναι λογικά ισοδύναμες αφού

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

Λόγω της λογικής ισοδυναμίας των δύο παραπάνω προτάσεων η ισοδυναμία $p \Leftrightarrow q$ λέγεται και **διπλή συνεπαγωγή**.

Οι **αντίστροφες προτάσεις** $p \Rightarrow q$ και $q \Rightarrow p$ δεν είναι λογικά ισοδύναμες γιατί

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α

Οι προτάσεις $p \Rightarrow q$ και $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ είναι λογικά ισοδύναμες. Η κάθε μια λέγεται **αντιθετοαντίστροφη** της άλλης.

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

Έστω ότι η πρόταση $p \Rightarrow q$ είναι αληθής, τότε με απαγωγή σε άτοπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι η πρόταση $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ είναι αληθής. Για παράδειγμα έστω η πρόταση ‘αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha^2 = \beta^2$’ η αντιθετοαντίστροφη πρόταση είναι ‘αν $\alpha^2 \neq \beta^2$ τότε $\alpha \neq \beta$’. Η απόδειξη με άτοπο γίνεται ως εξής: Υποθέτουμε ότι ισχύει η πρόταση

$\alpha^2 \neq \beta^2$ και ότι ισχύει η πρόταση $\alpha = \beta$. Από την $\alpha = \beta$ έπεται ότι $\alpha^2 = \beta^2$ που είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $\alpha^2 \neq \beta^2$.

Έστω $p(x)$ ένας προτασιακός τύπος μιας μεταβλητής x ορισμένος σε ένα σύνολο Ω. **Σύνολο αλήθειας** του $p(x)$ ονομάζεται το σύνολο των τιμών της μεταβλητής $x \in \Omega$ για τις οποίες η πρόταση $p(x)$ είναι αληθής. Αν συμβολίσουμε με Α το σύνολο αλήθειας του $p(x)$ τότε

$$\mathrm{A} = \left\{ x \in \Omega \,/\, p(x) \text{ αληθής} \right\}.$$

Παραδείγματα.

1. Έστω $p(x)$ ο προτασιακός τύπος $x^2 + 2 > 0$ με $x \in \mathbb{R}$. Το σύνολο αλήθειας του $p(x)$ είναι $\mathrm{A} = \mathbb{R}$.
2. Έστω $p(x)$ ο προτασιακός τύπος $x^2 - 1 > 0$ με $x \in \mathbb{R}$. Το σύνολο αλήθειας του $p(x)$ είναι $\mathrm{A} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
3. Έστω $p(x)$ ο προτασιακός τύπος $x^2 + 3x - 4 = 0$ με $x \in \mathbb{R}$. Το σύνολο αλήθειας του $p(x)$ είναι $\mathrm{A} = \left\{1, -4\right\}$.
4. Έστω $p(x)$ ο προτασιακός τύπος $x^2 = -1$ με $x \in \mathbb{R}$. Το σύνολο αλήθειας του $p(x)$ είναι $\mathrm{A} = \varnothing$.

Από τα παραπάνω παραδείγματα προκύπτει ότι το σύνολο αλήθειας ενός προτασιακού τύπου με πεδίο ορισμού Ω μπορεί να είναι:

- ολόκληρο το Ω.
- ορισμένα στοιχεία του Ω.
- το κενό σύνολο.

Αν προτάξουμε σε έναν προτασιακό τύπο μιας μεταβλητής κάποιον από τους **ποσοδείκτες** ‘για κάθε’ ή ‘υπάρχει’ τότε προκύπτει μια πρόταση.

Έστω $p(x)$ ένας προτασιακός τύπος μιας μεταβλητής x ορισμένος σε ένα σύνολο Ω και έστω Α το σύνολο αλήθειας του $p(x)$.
Η πρόταση $(\forall x \in \Omega)\, p(x)$ είναι αληθής αν $\mathrm{A} = \Omega$ και ψευδής αν $\mathrm{A} \neq \Omega$.
Η πρόταση $(\exists x \in \Omega)\, p(x)$ είναι αληθής αν $\mathrm{A} \neq \varnothing$ και ψευδής αν $\mathrm{A} = \varnothing$.

Παραδείγματα.

1. Η πρόταση $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 + 2 > 0$ είναι αληθής.
2. Η πρόταση $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 - 1 > 0$ είναι ψευδής.
3. Η πρόταση $(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 - 1 > 0$ είναι αληθής.
4. Η πρόταση $(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 = -1$ είναι ψευδής.

Κανόνες άρνησης.

Αρκετές φορές στα Μαθηματικά θέλουμε να σχηματίσουμε την άρνηση μιας πρότασης. Για παράδειγμα στη μέθοδο απόδειξης με άτοπο, στον σχηματισμό της αντιθετοαντίστροφης μιας πρότασης αλλά και για να εξετάσουμε ως προς την αλήθεια μια πρόταση εξετάζοντας την αλήθεια της άρνησής της.

(α) Οι προτάσεις $\overline{p \wedge q}$ και $\overline{p} \vee \overline{q}$ είναι λογικά ισοδύναμες.

(β) Οι προτάσεις $\overline{p \vee q}$ και $\overline{p} \wedge \overline{q}$ είναι λογικά ισοδύναμες.

(γ) Οι προτάσεις $\overline{p \Rightarrow q}$ και $p \wedge \overline{q}$ είναι λογικά ισοδύναμες.

(δ) Οι προτάσεις $\overline{(\forall x \in \Omega)\, p(x)}$ και $(\exists x \in \Omega)\,\overline{p(x)}$ είναι λογικά ισοδύναμες.

(ε) Οι προτάσεις $\overline{(\exists x \in \Omega)\, p(x)}$ και $(\forall x \in \Omega)\,\overline{p(x)}$ είναι λογικά ισοδύναμες.

Παραδείγματα.

1. Η άρνηση του προτασιακού τύπου '$\alpha = 0$ ή $\beta = 0$' είναι '$\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$'.
2. Έστω p η πρόταση 'για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $x + \sqrt{x^2+1} > 0$'. Η άρνηση $\overline{p}$ της πρότασης είναι 'υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $x + \sqrt{x^2+1} \leq 0$'.
3. Έστω p η πρόταση 'υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $x^3 + x - 1 = 0$'. Η άρνηση $\overline{p}$ της πρότασης είναι 'για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^3 + x - 1 \neq 0$'.
4. Έστω p η πρόταση 'για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$'. Η άρνηση $\overline{p}$ της πρότασης είναι 'υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ ώστε $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \geq f(x_2)$'.

Παρατηρήσεις.

(α) Οι προτάσεις p στα παραδείγματα 2 και 3 είναι αληθείς άρα οι αρνήσεις $\overline{p}$ είναι ψευδείς.

(β) Η πρόταση p στο παράδειγμα 4 είναι ο ορισμός της έννοιας γνησίως αύξουσα συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ. Η πρόταση $\overline{p}$ μας λέει πότε μια συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ.

Η άρνηση της πρότασης 'ένας **το πολύ** από τους μιγαδικούς $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ είναι πραγματικός' είναι 'δύο **τουλάχιστον** από τους μιγαδικούς $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ είναι πραγματικοί'.

Η άρνηση της πρότασης 'η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις τουλάχιστον ρίζες' είναι 'η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες'.