Επίλυση εξισώσεων 3ου και 4ου βαθμού

ΕΞΙΣΩΣΗ 3ου ΒΑΘΜΟΥ

Αν στην εξίσωση $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$, $\alpha\neq 0$ κάνουμε την αντικατάσταση $x=y-\dfrac{\beta}{3\alpha}$ τότε η εξίσωση, μετά από πράξεις, παίρνει τη μορφή $y^3=py+q$, όπου

$$p=\frac{\beta^2-3\alpha\gamma}{3\alpha^2} \text{ και } q=\frac{9\alpha\beta\gamma-2\beta^3-27\alpha^2\delta}{27\alpha^3}.$$

Παράδειγμα.
Η εξίσωση $x^3+3x^2-3x-11=0$ με την αντικατάσταση $x=y-1$ γίνεται $y^3=6y+6$.

Για την λύση της εξίσωσης $x^3=px+q$ θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^3=3\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha^3+\beta^3)$. Από τη σύγκριση προκύπτει ότι αν μπορούμε να βρούμε αριθμούς α,β ώστε $3\alpha\beta=p$ και $\alpha^3+\beta^3=q$ τότε ο αριθμός $\alpha+\beta$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3=px+q$.
Όμως

$$\begin{cases}\alpha^3+\beta^3=q\\ 3\alpha\beta=p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha^3+\beta^3=q\\ \alpha^3\beta^3=\dfrac{p^3}{27}\\ \alpha\beta\in\mathbb{R}\end{cases}.$$

Άρα α^3,β^3 είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2-qx+\dfrac{p^3}{27}=0$. Οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι $\dfrac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$, $\dfrac{q}{2}-\sqrt{\Delta}$, όπου $\Delta=\left(\dfrac{q}{2}\right)^2-\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$.

Παρατήρηση.
Αν $\Delta<0$ τότε το σύμβολο $\sqrt{\Delta}$ σημαίνει $i\sqrt{-\Delta}$. (Δες την παρατήρηση στο παράδειγμα 3 που ακολουθεί).

Στη συνέχεια λύνουμε τις εξισώσεις $\alpha^3=\dfrac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$ και $\beta^3=\dfrac{q}{2}-\sqrt{\Delta}$ για να βρούμε τους αριθμούς α,β. Κάθε μια από τις παραπάνω εξισώσεις έχει τρεις μιγαδικές ρίζες. Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha^3=\dfrac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$ και β_1,β_2,β_3 οι ρίζες της εξίσωσης $\beta^3=\dfrac{q}{2}-\sqrt{\Delta}$. Αν α_i και β_j είναι δύο ρίζες τέτοιες ώστε $\alpha_i\beta_j\in\mathbb{R}$ τότε ο αριθμός $x=\alpha_i+\beta_j$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης $x^3=px+q$. Με αυτή την διαδικασία μπορούμε να βρούμε τις τρεις ρίζες της εξίσωσης $x^3=px+q$.

Συμβολικά μπορούμε να γράψουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης $x^3 = px + q$ δίνονται από τον τύπο

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} .$$

Παραδείγματα.

1. $x^3 = 9x + 28$
   $p = 9$, $q = 28$, $\Delta = 169$
   $x = \sqrt[3]{14 + \sqrt{169}} + \sqrt[3]{14 - \sqrt{169}} = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{1} = 3 + 1 = 4$

2. $x^3 = 6x + 6$
   $p = 6$, $q = 6$, $\Delta = 1$
   $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{1}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{1}} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$

3. $x^3 = 15x + 4$
   $p = 15$, $q = 4$, $\Delta = -121$
   $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$
   Οι ρίζες της εξίσωσης $x^3 = 15x + 4$ είναι $x = 4$ ή $x = -2 + \sqrt{3}$ ή $x = -2 - \sqrt{3}$.

   Παρατήρηση
   Η παράσταση $2 + \sqrt{-121}$ μπορεί να γραφεί ως $2 + i\sqrt{121} = 2 + 11i$. Ομοίως $2 - \sqrt{-121} = 2 - 11i$.
   Μια ρίζα της εξίσωσης $\alpha^3 = 2 + 11i$ είναι ο αριθμός $2 + i$ αφού $(2+i)^3 = 2 + 11i$ και μια ρίζα της εξίσωσης $\beta^3 = 2 - 11i$ είναι ο αριθμός $2 - i$ αφού $(2-i)^3 = 2 - 11i$.
   Άρα στον τύπο $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ μπορούμε να κάνουμε τις αντικαταστάσεις $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + i$ και $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - i$ οπότε παίρνουμε $x = (2+i) + (2-i) = 4$.

Άσκηση.
Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. $x^3 + 3x^2 - 6x + 4 = 0$
2. $x^3 + 4x^2 + 2x + 8 = 0$
3. $x^3 - 6x^2 + 9x + 6 = 0$
4. $2x^3 + 3x^2 + 2x + 8 = 0$
5. $x^3 + 6x^2 + 3x + 5 = 0$
6. $x^3 - 4x^2 - x - 5 = 0$
7. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
8. $x^3 + 3x^2 - 6x + 2 = 0$

ΕΞΙΣΩΣΗ 4ου ΒΑΘΜΟΥ

Αν στην εξίσωση $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon=0$, $\alpha\neq 0$ κάνουμε την αντικατάσταση $x=y-\dfrac{\beta}{4\alpha}$ τότε η εξίσωση, μετά από πράξεις, παίρνει τη μορφή $y^4+py^2+qy+r=0$, όπου $p=\dfrac{8\alpha\gamma-3\beta^2}{8\alpha^2}$, $q=\dfrac{\beta^3-4\alpha\beta\gamma+8\alpha^2\delta}{8\alpha^3}$ και $r=\dfrac{256\alpha^3\varepsilon-3\beta^4+16\alpha\beta^2\gamma-64\alpha^2\beta\delta}{256\alpha^4}$.

Η εξίσωση $y^4+py^2+qy+r=0$ γράφεται αρχικά $y^4+py^2=-qy-r$. Στη συνέχεια προσθέτουμε και στα δύο μέλη τους όρους $p^2, py^2, \omega^2, 2\omega p, 2\omega y^2$, όπου ω είναι ένας αριθμός που διαλέγεται με έναν τρόπο που περιγράφεται παρακάτω. Έτσι η εξίσωση γίνεται $(y^2+p+\omega)^2=(2\omega+p)y^2-qy+(\omega^2+2p\omega+p^2-r)$.

Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης είναι τριώνυμο ως προς y. Αν η διακρίνουσά του είναι μηδέν τότε το τριώνυμο είναι τέλειο τετράγωνο και η εξίσωση γίνεται ισότητα δύο τετραγώνων.
Η διακρίνουσα του τριωνύμου $(2\omega+p)y^2-qy+(\omega^2+2p\omega+p^2-r)$ είναι

$$\Delta=q^2-4(2\omega+p)(\omega^2+2p\omega+p^2-r)$$

Έτσι αναζητούμε έναν αριθμό ω ώστε $\Delta=0\Leftrightarrow 4(2\omega+p)(\omega^2+2p\omega+p^2-r)=q^2$.
Η τελευταία είναι εξίσωση 3ου βαθμού με άγνωστο το ω.

Παράδειγμα.
Να λύσετε την εξίσωση $x^4+x^2+12x-8=0$.

$$x^4+x^2+12x-8=0\Leftrightarrow x^4+x^2=-12x+8$$
$$\Leftrightarrow (x^2+1+\omega)^2=(2\omega+1)x^2-12x+(\omega^2+2\omega+9)$$

Αναζητούμε έναν αριθμό ω ώστε η διακρίνουσα του τριωνύμου

$$(2\omega+1)x^2-12x+(\omega^2+2\omega+9)$$

να είναι μηδέν.

$$\Delta=0\Leftrightarrow 2\omega^3+5\omega^2+20\omega-27=0.$$

Μια λύση της εξίσωσης τρίτου βαθμού είναι $\omega=1$. Έτσι η εξίσωση γίνεται

$$(x^2+1+1)^2=(2\cdot1+1)x^2-12x+(1^2+2\cdot1+9)\Leftrightarrow(x^2+2)^2=[\sqrt{3}(x-2)]^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+2=\sqrt{3}(x-2) \quad ή \quad x^2+2=-\sqrt{3}(x-2)$$

Στη συνέχεια λύνουμε τις δύο εξισώσεις 2ου βαθμού.

$$x^2+2=\sqrt{3}(x-2)\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}\pm i\sqrt{8\sqrt{3}+5}}{2}.$$
$$x^2+2=-\sqrt{3}(x-2)\Leftrightarrow x=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{8\sqrt{3}-5}}{2}.$$

Άσκηση.

Να λύσετε τις εξισώσεις:

9. $x^4+10x^2+16x+4=0$
10. $x^4+2x^2+8x+5=0$
11. $x^4+3x^2+20x-4=0$
12. $x^4-3x^2-6x+8=0$

Λύσεις των ασκήσεων

1. Για να λύσουμε την εξίσωση $x^3+3x^2-6x+4=0$ κάνουμε την αντικατάσταση $x=y-1$. Η εξίσωση γίνεται $y^3=9y-12$, άρα $p=9$ και $q=-12$.

   $\Delta=9$ και μια λύση της εξίσωσης $y^3=9y-12$ είναι $y=-\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}$.

   Έτσι μια λύση της αρχικής εξίσωσης είναι $x=-\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}-1$.

2. Για να λύσουμε την εξίσωση $x^3+4x^2+2x+8=0$ κάνουμε την αντικατάσταση $x=y-\frac{4}{3}$. Η εξίσωση γίνεται $y^3=\frac{10}{3}y-\frac{272}{27}$, άρα $p=\frac{10}{3}$ και $q=-\frac{272}{27}$.

   $\Delta=24$ και μια λύση της εξίσωσης $y^3=\frac{10}{3}y-\frac{272}{27}$ είναι

   $$y=-\sqrt[3]{\frac{136}{27}+2\sqrt{6}}-\sqrt[3]{\frac{136}{27}-2\sqrt{6}}.$$

   Μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\sqrt[3]{\frac{136}{27}+2\sqrt{6}}+\sqrt[3]{\frac{136}{27}-2\sqrt{6}}=\frac{8}{3}$ ή ισοδύναμα ότι $\sqrt[3]{136+54\sqrt{6}}+\sqrt[3]{136-54\sqrt{6}}=8$.

   Έστω $\sqrt[3]{136+54\sqrt{6}}+\sqrt[3]{136-54\sqrt{6}}=x$. Υψώνουμε τα δύο μέλη στην τρίτη και έχουμε $x^3=30x+272$. Από την τελευταία προκύπτει ότι $x=8$.

   Έτσι μια λύση της αρχικής εξίσωσης είναι $x=-\frac{8}{3}-\frac{4}{3}=-4$.

   Παρατήρηση: Η εξίσωση λύνεται πιο εύκολα με παραγοντοποίηση αφού $x^3+4x^2+2x+8=0 \Leftrightarrow (x+4)(x^2+2)=0$.

3. Για να λύσουμε την εξίσωση $x^3-6x^2+9x+6=0$ κάνουμε την αντικατάσταση $x=y+2$. Η εξίσωση γίνεται $y^3=3y-8$, άρα $p=3$ και $q=-8$.

   $\Delta=15$ και μια λύση της εξίσωσης $y^3=3y-8$ είναι $y=-\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}-\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}$.

   Έτσι μια λύση της αρχικής εξίσωσης είναι $x=2-\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}-\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}$.

4. Για να λύσουμε την εξίσωση $2x^3+3x^2+2x+8=0$ κάνουμε την αντικατάσταση $x=y-\frac{1}{2}$. Η εξίσωση γίνεται $y^3=-\frac{1}{4}y-\frac{15}{4}$, άρα $p=-\frac{1}{4}$ και $q=-\frac{15}{4}$.

$\Delta=\frac{1519}{432}$ και μια λύση της εξίσωσης $y^3=-\frac{1}{4}y-\frac{15}{4}$ είναι

$y=\sqrt[3]{-\frac{15}{8}+\sqrt{\frac{1519}{432}}}-\sqrt[3]{\frac{15}{8}+\sqrt{\frac{1519}{432}}}$.

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\sqrt[3]{-\frac{15}{8}+\sqrt{\frac{1519}{432}}}-\sqrt[3]{\frac{15}{8}+\sqrt{\frac{1519}{432}}}=-\frac{3}{2}$ ή ισοδύναμα ότι $\sqrt[3]{15+2\sqrt{\frac{1519}{27}}}-\sqrt[3]{-15+2\sqrt{\frac{1519}{27}}}=3$.

Έστω $\sqrt[3]{15+2\sqrt{\frac{1519}{27}}}-\sqrt[3]{-15+2\sqrt{\frac{1519}{27}}}=x$. Υψώνουμε τα δύο μέλη στην τρίτη και έχουμε $x^3+x=30$. Από την τελευταία προκύπτει ότι $x=3$.
Έτσι μια λύση της αρχικής εξίσωσης είναι $x=-2$.
Παρατήρηση: Η εξίσωση έχει ακέραια ρίζα άρα μπορεί να λυθεί με το σχήμα Horner. Έτσι έχουμε $2x^3+3x^2+2x+8=0 \Leftrightarrow (x+2)(2x^2-x+4)=0$.

5. Για να λύσουμε την εξίσωση $x^3+6x^2+3x+5=0$ κάνουμε την αντικατάσταση $x=y-2$. Η εξίσωση γίνεται $y^3=9y-15$, άρα $p=9$ και $q=-15$.

   $\Delta=\frac{117}{4}$ και μια λύση της εξίσωσης $y^3=9y-15$ είναι

   $y=-\sqrt[3]{\frac{15+\sqrt{117}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{15-\sqrt{117}}{2}}$.

   Έτσι μια λύση της αρχικής εξίσωσης είναι $x=-\sqrt[3]{\frac{15+\sqrt{117}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{15-\sqrt{117}}{2}}-2$.

6. Για να λύσουμε την εξίσωση $x^3-4x^2-x-5=0$ κάνουμε την αντικατάσταση $x=y+\frac{4}{3}$. Η εξίσωση γίνεται $y^3=\frac{19}{3}y+\frac{299}{27}$, άρα $p=\frac{19}{3}$ και $q=\frac{299}{27}$.

   $\Delta=\frac{85}{4}$ και μια λύση της εξίσωσης $y^3=\frac{19}{3}y+\frac{299}{27}$ είναι

   $y=\sqrt[3]{\frac{299}{54}+\frac{\sqrt{85}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{299}{54}-\frac{\sqrt{85}}{2}}$.

   Έτσι μια λύση της αρχικής εξίσωσης είναι $x=\sqrt[3]{\frac{299}{54}+\frac{\sqrt{85}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{299}{54}-\frac{\sqrt{85}}{2}}+\frac{4}{3}$.

7. Για να λύσουμε την εξίσωση $x^3+2x^2-x-2=0$ κάνουμε την αντικατάσταση $x=y-\frac{2}{3}$. Η εξίσωση γίνεται $y^3=\frac{7}{3}y+\frac{20}{27}$, άρα $p=\frac{7}{3}$ και $q=\frac{20}{27}$.

   $\Delta=-\frac{1}{3}$ και μια λύση της εξίσωσης $y^3=\frac{7}{3}y+\frac{20}{27}$ είναι

   $y=\sqrt[3]{\frac{10}{27}+\sqrt{-\frac{1}{3}}}+\sqrt[3]{\frac{10}{27}-\sqrt{-\frac{1}{3}}}=\sqrt[3]{\frac{10}{27}+i\frac{\sqrt{3}}{3}}+\sqrt[3]{\frac{10}{27}-i\frac{\sqrt{3}}{3}}$.

Όμως $\left(\frac{5}{6}+i\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^3=\frac{10}{27}+i\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\left(\frac{5}{6}-i\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^3=\frac{10}{27}-i\frac{\sqrt{3}}{3}$. Άρα

$y=\left(\frac{5}{6}+i\frac{\sqrt{3}}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}-i\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{5}{3}$.

Έτσι μια λύση της αρχικής εξίσωσης είναι $x=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=1$.

Παρατήρηση: Η εξίσωση λύνεται πιο εύκολα με παραγοντοποίηση $x^3+2x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-1)=0$.

8. Για να λύσουμε την εξίσωση $x^3+3x^2-6x+2=0$ κάνουμε την αντικατάσταση $x=y-1$. Η εξίσωση γίνεται $y^3=9y-10$, άρα $p=9$ και $q=-10$.

   $\Delta=-2$ και μια λύση της εξίσωσης $y^3=9y-10$ είναι

   $y=\sqrt[3]{-5+\sqrt{-2}}+\sqrt[3]{-5-\sqrt{-2}}=\sqrt[3]{-5+i\sqrt{2}}+\sqrt[3]{-5-i\sqrt{2}}$.

   Όμως $\left(1+i\sqrt{2}\right)^3=-5+i\sqrt{2}$ και $\left(1-i\sqrt{2}\right)^3=-5-i\sqrt{2}$. Άρα

   $y=(1+i\sqrt{2})+(1-i\sqrt{2})=2$.

   Έτσι μια λύση της αρχικής εξίσωσης είναι $x=2-1=1$.

9. Ισοδύναμα έχουμε

   $x^4+10x^2+16x+4=0 \Leftrightarrow x^4+10x^2=-16x-4$

   $\Leftrightarrow (x^2+10+\omega)^2=(2\omega+10)x^2-16x+(\omega^2+20\omega+96)$

   Αναζητούμε έναν αριθμό ω ώστε η διακρίνουσα του τριωνύμου

   $$(2\omega+10)x^2-16x+(\omega^2+20\omega+96)$$

   να είναι μηδέν.

   $$\Delta=0 \Leftrightarrow \omega^3+25\omega^2+196\omega+448=0.$$

   Μια λύση της εξίσωσης τρίτου βαθμού είναι $\omega=-4$. Έτσι η εξίσωση γίνεται

   $(x^2+10-4)^2=(2\cdot(-4)+10)x^2-16x+((-4)^2+20\cdot(-4)+96) \Leftrightarrow (x^2+6)^2=[\sqrt{2}(x-4)]^2$

   $\Leftrightarrow x^2+6=\sqrt{2}(x-4)$ ή $x^2+6=-\sqrt{2}(x-4)$

   Στη συνέχεια λύνουμε τις δύο εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού.

   $x^2+6=\sqrt{2}(x-4) \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{16\sqrt{2}+22}}{2}$.

   $x^2+6=-\sqrt{2}(x-4) \Leftrightarrow x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{16\sqrt{2}-22}}{2}$.

10. Ισοδύναμα έχουμε

    $x^4+2x^2+8x+5=0 \Leftrightarrow x^4+2x^2=-8x-5$

    $\Leftrightarrow (x^2+2+\omega)^2=(2\omega+2)x^2-8x+(\omega^2+4\omega-1)$

    Αναζητούμε έναν αριθμό ω ώστε η διακρίνουσα του τριωνύμου

    $$(2\omega+2)x^2-8x+(\omega^2+4\omega-1)$$

    να είναι μηδέν.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \omega^3 + 5\omega^2 + 3\omega - 9 = 0 .$$

Μια λύση της εξίσωσης τρίτου βαθμού είναι $\omega = 1$. Έτσι η εξίσωση γίνεται

$$(x^2 + 2 + 1)^2 = (2\cdot 1 + 2)x^2 - 8x + (1^2 + 4\cdot 1 - 1) \Leftrightarrow (x^2 + 3)^2 = [2(x-1)]^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3 = 2(x-1) \quad \text{ή} \quad x^2 + 3 = -2(x-1)$$

Στη συνέχεια λύνουμε τις δύο εξισώσεις 2ου βαθμού.

$x^2 + 3 = 2(x-1) \Leftrightarrow x = 1 \pm 2i$.

$x^2 + 3 = -2(x-1) \Leftrightarrow x = -1$.

11. Ισοδύναμα έχουμε

$$x^4 + 3x^2 + 20x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 3x^2 = -20x + 4$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 3 + \omega)^2 = (2\omega + 3)x^2 - 20x + (\omega^2 + 6\omega + 13)$$

Αναζητούμε έναν αριθμό ω ώστε η διακρίνουσα του τριωνύμου

$$(2\omega + 3)x^2 - 20x + (\omega^2 + 6\omega + 13)$$

να είναι μηδέν.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 2\omega^3 + 15\omega^2 + 44\omega - 61 = 0 .$$

Μια λύση της εξίσωσης τρίτου βαθμού είναι $\omega = 1$. Έτσι η εξίσωση γίνεται

$$(x^2 + 3 + 1)^2 = (2\cdot 1 + 3)x^2 - 20x + (1^2 + 6\cdot 1 + 13) \Leftrightarrow (x^2 + 4)^2 = [\sqrt{5}(x-2)]^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4 = \sqrt{5}(x-2) \quad \text{ή} \quad x^2 + 4 = -\sqrt{5}(x-2)$$

Στη συνέχεια λύνουμε τις δύο εξισώσεις 2ου βαθμού.

$x^2 + 4 = \sqrt{5}(x-2) \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{5} \pm i\sqrt{8\sqrt{5} + 11}}{2}$.

$x^2 + 4 = -\sqrt{5}(x-2) \Leftrightarrow x = \dfrac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{8\sqrt{5} - 11}}{2}$.

12. Ισοδύναμα έχουμε

$$x^4 - 3x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 = 6x - 8$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3 + \omega)^2 = (2\omega - 3)x^2 + 6x + (\omega^2 - 6\omega + 1)$$

Αναζητούμε έναν αριθμό ω ώστε η διακρίνουσα του τριωνύμου

$$(2\omega - 3)x^2 + 6x + (\omega^2 - 6\omega + 1)$$

να είναι μηδέν.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 2\omega^3 - 15\omega^2 + 20\omega - 12 = 0 .$$

Μια λύση της εξίσωσης τρίτου βαθμού είναι $\omega = 6$. Έτσι η εξίσωση γίνεται

$$(x^2 - 3 + 6)^2 = (2\cdot 6 - 3)x^2 + 6x + (6^2 - 6\cdot 6 + 1) \Leftrightarrow (x^2 + 3)^2 = (3x + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3 = 3x + 1 \quad \text{ή} \quad x^2 + 3 = -3x - 1$$

Στη συνέχεια λύνουμε τις δύο εξισώσεις 2ου βαθμού.

$x^2 + 3 = 3x + 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$.

$x^2 + 3 = -3x - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2}$.