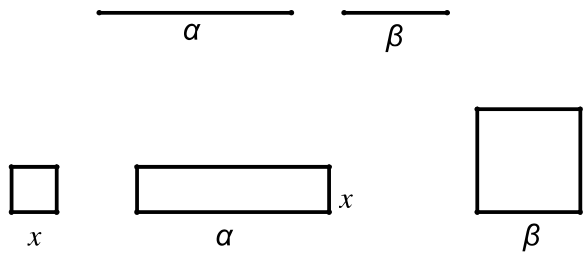
Γεωμετρική επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού

Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί καθιέρωσαν την κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων με κανόνα και διαβήτη. Τρεις τέτοιες κατασκευές θα μελετήσουμε στη συνέχεια. Κάθε μια από αυτές τις κατασκευές είναι ένα πρόβλημα που με σύγχρονο συμβολισμό είναι μια εξίσωση 2ου βαθμού.

Πρώτο πρόβλημα

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη α, β. Να κατασκευαστεί τμήμα με μήκος x τέτοιο, ώστε το άθροισμα των εμβαδών του τετραγώνου πλευράς x και του ορθογωνίου με διαστάσεις α, x να είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά β.

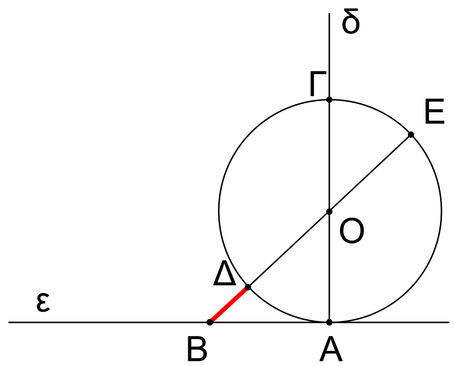


Το παραπάνω πρόβλημα περιγράφεται αλγεβρικά από την εξίσωση

$$x^2 + \alpha x = \beta^2.$$

Γεωμετρική λύση

- Πάνω σε μια ευθεία ε παίρνουμε τμήμα $\mathrm{AB} = \beta$.
- Φέρουμε την ημιευθεία δ κάθετη στην ε στο σημείο Α και πάνω σε αυτήν παίρνουμε σημείο Γ τέτοιο, ώστε $\mathrm{A\Gamma} = \alpha$.
- Γράφουμε τον κύκλο διαμέτρου ΑΓ.
- Φέρουμε την τέμνουσα ΒΔΕ του κύκλου που διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου.
- Η λύση της προβλήματος είναι το τμήμα ΒΔ.



Απόδειξη

Η ΒΔΕ είναι τέμνουσα και η ΒΑ εφαπτομένη από το σημείο Β. Σύμφωνα με το θεώρημα για τις τέμνουσες κύκλου ισχύει

$$\mathrm{B\Delta \cdot BE = BA^2}$$
$$\mathrm{B\Delta \cdot (B\Delta + \Delta E) = BA^2}$$
$$\mathrm{B\Delta} \cdot (\mathrm{B\Delta} + \alpha) = \beta^2$$
$$\mathrm{B\Delta}^2 + \alpha \cdot \mathrm{B\Delta} = \beta^2$$

Άρα το τμήμα ΒΔ είναι η λύση της εξίσωσης $x^2 + \alpha x = \beta^2$.

Όπως είδαμε το παραπάνω πρόβλημα περιγράφεται αλγεβρικά από την εξίσωση

$$x^2 + \alpha x = \beta^2.$$

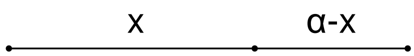
Η εξίσωση αυτή έχει θετική διακρίνουσα $\Delta = \alpha^2 + 4\beta^2$ και λύσεις

$$x = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2}}{2} \quad \text{ή} \quad x = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2}}{2}$$

Η θετική λύση της εξίσωσης είναι $x = \dfrac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2}}{2}$.

<u>Ειδική περίπτωση</u> Όταν $\alpha = \beta$. (Χρυσή τομή)

Να διαιρεθεί ένα δεδομένο τμήμα μήκους α σε δύο άνισα τμήματα, ώστε το μεγαλύτερο από αυτά να είναι η μέση ανάλογος του μικρότερου και του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος.



Έστω ότι το μεγαλύτερο τμήμα είναι x τότε το μικρότερο είναι $\alpha - x$ και ισχύει η αναλογία

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\alpha - x}.$$

Από την παραπάνω αναλογία προκύπτει $x^2 = \alpha^2 - \alpha x \Leftrightarrow x^2 + \alpha x = \alpha^2$.

Είναι προφανές ότι η τελευταία εξίσωση είναι ειδική περίπτωση του προβλήματος που μελετήσαμε για $\alpha = \beta$.

Η θετική λύση της εξίσωσης είναι

$$x = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\alpha.$$

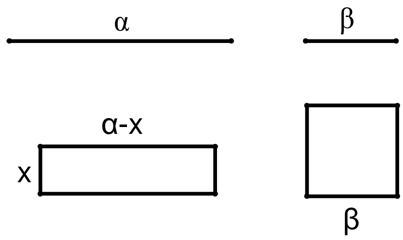
Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του λόγου $\dfrac{\alpha}{x}$.

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\alpha} = \frac{1}{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \simeq 1,618\ldots.$$

Ο αριθμός $\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$ λέγεται χρυσή τομή και συμβολίζεται με το γράμμα φ.

<u>Δεύτερο πρόβλημα</u>

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη α, β. Να κατασκευαστεί τμήμα με μήκος x τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου με πλευρές x και $\alpha - x$ να είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά β.

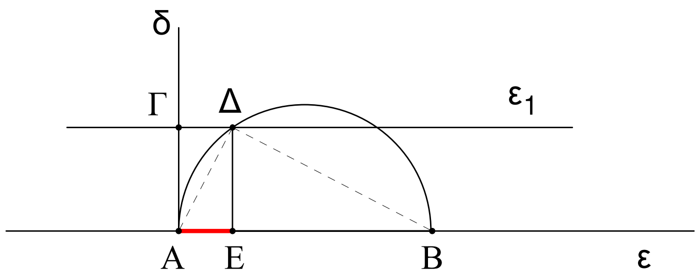


Το παραπάνω πρόβλημα περιγράφεται αλγεβρικά από την εξίσωση $x(\alpha - x) = \beta^2$ ή ισοδύναμα

$$x^2 + \beta^2 = \alpha x.$$

Γεωμετρική λύση

- Πάνω σε μια ευθεία ε παίρνουμε τμήμα $\mathrm{AB} = \alpha$.
- Γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ.
- Φέρουμε ημιευθεία δ κάθετη στην ευθεία ε στο σημείο Α. (Η ημιευθεία δ και το ημικύκλιο βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ευθείας ε).
- Πάνω στην δ παίρνουμε σημείο Γ τέτοιο ώστε $\mathrm{A\Gamma} = \beta$.
- Από το Γ φέρουμε την ευθεία ε_1 παράλληλη στην ε.
- Έστω Δ ένα από τα σημεία τομής της ε_1 και του ημικυκλίου.
- Από το Δ φέρουμε την ΔΕ κάθετη στην ευθεία ε.
- Η λύση της προβλήματος είναι το τμήμα ΑΕ. Όμως λύση είναι επίσης και το τμήμα ΒΕ.



Παρατηρούμε ότι για να ορίζεται το σημείο Δ, δηλαδή για να τέμνει η ευθεία ε_1 το ημικύκλιο πρέπει $\beta \le \dfrac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha \ge 2\beta$.

Απόδειξη

Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο γιατί η γωνία $\mathrm{A\hat{\Delta}B}$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο και το ΔΕ είναι το ύψος στην υποτείνουσα. Τότε ισχύει

$\mathrm{AE \cdot BE} = \mathrm{\Delta E}^2 \Leftrightarrow \mathrm{AE \cdot (AB - AE)} = \mathrm{\Delta E}^2 \Leftrightarrow \mathrm{AE} \cdot (\alpha - \mathrm{AE}) = \beta^2$.

Άρα το τμήμα ΑΕ είναι η λύση της εξίσωσης $x(\alpha - x) = \beta^2$.

Ομοίως μπορούμε να αποδείξουμε ότι και το τμήμα ΒΕ είναι η λύση της εξίσωσης $x(\alpha - x) = \beta^2$.

Όπως είδαμε το παραπάνω πρόβλημα περιγράφεται αλγεβρικά από την εξίσωση

$$x^2 + \beta^2 = \alpha x.$$

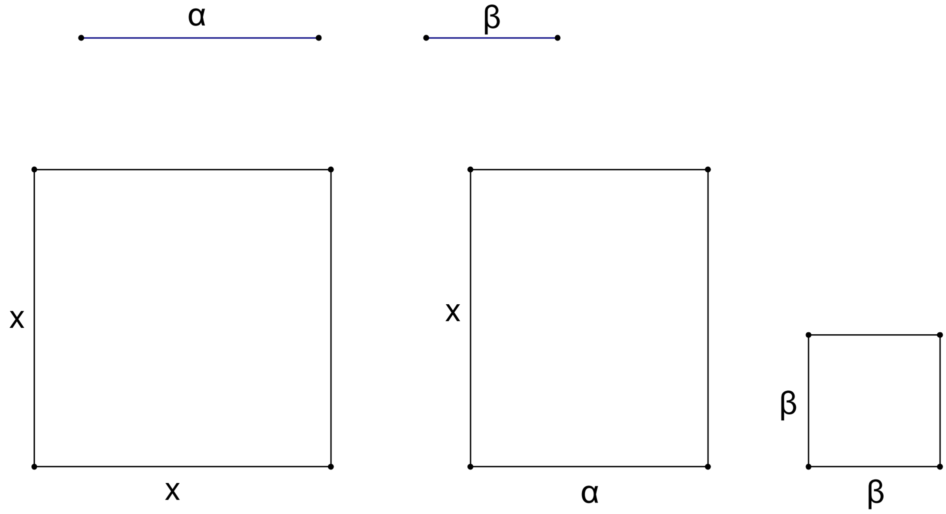
Η εξίσωση αυτή έχει διακρίνουσα $\Delta = \alpha^2 - 4\beta^2$. Ισχύει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 2\beta$. Οι λύσεις είναι

$$x = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}}{2} \quad \text{ή} \quad x = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}}{2}$$

που είναι και οι δύο θετικές.

<u>Τρίτο πρόβλημα</u>

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη α, β. Να κατασκευαστεί τμήμα με μήκος x τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά x να είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών του ορθογωνίου με διαστάσεις α, x και του τετραγώνου με πλευρά β.



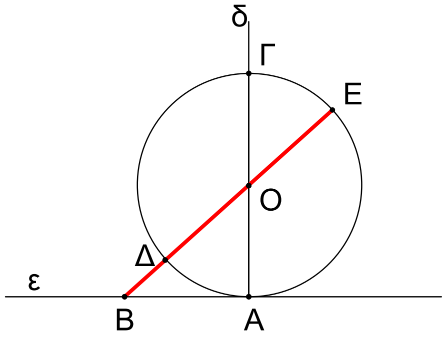
Το παραπάνω πρόβλημα περιγράφεται αλγεβρικά από την εξίσωση

$$x^2 = \alpha x + \beta^2.$$

Γεωμετρική λύση

- Πάνω σε μια ευθεία ε παίρνουμε τμήμα $\mathrm{AB} = \beta$.
- Φέρουμε την ημιευθεία δ κάθετη στην ε στο σημείο Α και πάνω σε αυτήν παίρνουμε σημείο Γ τέτοιο, ώστε $\mathrm{A\Gamma} = \alpha$.
- Γράφουμε τον κύκλο διαμέτρου ΑΓ.
- Φέρουμε την τέμνουσα ΒΔΕ του κύκλου που διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου.

- Η λύση της προβλήματος είναι το τμήμα ΒΕ.



Απόδειξη
Η ΒΔΕ είναι τέμνουσα και η ΒΑ εφαπτομένη από το σημείο Β. Σύμφωνα με το θεώρημα για της τέμνουσες κύκλου ισχύει

$$\mathrm{B\Delta}\cdot\mathrm{BE}=\mathrm{BA}^2$$

$$\mathrm{BE}\cdot(\mathrm{BE}-\Delta\mathrm{E})=\mathrm{BA}^2$$

$$\mathrm{BE}\cdot(\mathrm{BE}-\alpha)=\beta^2$$

$$\mathrm{BE}^2=\alpha\cdot\mathrm{BE}+\beta^2$$

Άρα το τμήμα ΒΕ είναι η λύση της εξίσωσης $x^2=\alpha x+\beta^2$.

Όπως είδαμε το παραπάνω πρόβλημα περιγράφεται αλγεβρικά από την εξίσωση

$$x^2=\alpha x+\beta^2.$$

Η εξίσωση αυτή έχει θετική διακρίνουσα $\Delta=\alpha^2+4\beta^2$ και λύσεις

$$x=\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta^2}}{2} \quad \text{ή} \quad x=\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta^2}}{2}$$

Η θετική λύση της εξίσωσης είναι $x=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta^2}}{2}$.