Δυναμικά συστήματα και Χάος

Είναι γνωστό ότι μια ακολουθία x_n με $n \geq 0$ μπορεί να οριστεί με αναδρομικό τύπο. Για παράδειγμα

$$x_0 = 12$$
$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}$$

Η ισότητα $x_0 = 12$ είναι η αρχική τιμή και η ισότητα $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ ο αναδρομικός τύπος ο οποίος λειτουργεί ως εξής:
Για $n = 0$ γίνεται $x_1 = \sqrt{x_0}$ και επειδή $x_0 = 12$ έχουμε $x_1 = \sqrt{12} = 3,4641$.
Για $n = 1$ γίνεται $x_2 = \sqrt{x_1}$ και επειδή $x_1 = 3,4641$ έχουμε $x_2 = 1,8612$.
Υπολογίζοντας περισσότερους όρους της ακολουθίας x_n παρατηρούμε ότι τείνουν στο 1. Αυτό μπορούμε να το επαληθεύσουμε με ένα κομπιουτεράκι. Γράφουμε τον αριθμό 12 και πατάμε διαδοχικά το πλήκτρο για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας. Μετά από ορισμένα πατήματα καταλήγουμε στον αριθμό 1.

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να παρουσιαστεί με τη σύνθεση μιας συνάρτησης f με τον εαυτό της. Έστω $f(x) = \sqrt{x}$. Τότε ο αναδρομικός τύπος $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ γράφεται $x_{n+1} = f(x_n)$.

Για $n = 0$ έχουμε $x_1 = f(x_0)$.
Για $n = 1$ έχουμε $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$.
Για $n = 2$ έχουμε $x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0)))$.

Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : \Delta \to \Delta$, όπου Δ είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ορίζει ένα **δυναμικό σύστημα**. Αν επιλέξουμε μια αρχική τιμή $x_0 \in \Delta$ τότε ορίζεται η ακολουθία

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \ldots$$

και για κάθε διαφορετική επιλογή της αρχικής τιμής x_0 προκύπτει μια διαφορετική ακολουθία. Για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό γράφουμε

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$$
$$f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x)))$$

κλπ. όπου ο αριθμός στον εκθέτη δεν δηλώνει δύναμη αλλά πόσες φορές συνθέτουμε την f με τον εαυτό της.

Αντικείμενο της θεωρίας των δυναμικών συστημάτων είναι η μελέτη των ακολουθιών $x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \ldots$ που προκύπτουν για διάφορες τιμές του x_0. Η ακολουθία αυτή λέγεται **τροχιά** του x_0 μέσω της συνάρτησης f. Το δυναμικό σύστημα που ορίζεται από μια συνάρτηση f είναι ένα **διακριτό δυναμικό σύστημα**. Εκτός από τα διακριτά δυναμικά συστήματα υπάρχουν και τα συνεχή δυναμικά συστήματα που προκύπτουν από τις λύσεις των διαφορικών εξισώσεων.

Στον ορισμό του δυναμικού συστήματος είπαμε ότι για τη συνάρτηση f πρέπει να ισχύει $f : \Delta \to \Delta$, δηλαδή το σύνολο τιμών της f να είναι υποσύνολο του πεδίο ορισμού της. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ δεν έχει αυτή την ιδιότητα γιατί έχει πεδίο ορισμού $\Delta = (0, +\infty)$ και σύνολο τιμών $f(\Delta) = \mathbb{R}$. Για αυτή τη συνάρτηση δεν μπορούμε να ορίσουμε την ακολουθία $x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \ldots$. Πράγματι αν πάρουμε $x_0 = 10$ τότε

$$x_1 = f(x_0) = \ln x_0 = \ln 10 = 2,30259$$
$$x_2 = f(x_1) = \ln x_1 = 0,83403$$
$$x_3 = f(x_2) = \ln x_2 = -0,18148$$

Επειδή $x_3 < 0$ δεν ορίζεται ο όρος x_4.

Ορισμοί

Έστω μια συνάρτηση $f : \Delta \to \Delta$, όπου Δ είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$.

1. Το σημείο $x_0 \in \Delta$ λέγεται **σταθερό σημείο** της f αν $f(x_0) = x_0$.
2. Το σημείο $x_0 \in \Delta$ λέγεται **περιοδικό σημείο** της f περιόδου n αν $f^n(x_0) = x_0$.
3. Το σημείο $x_0 \in \Delta$ λέγεται **τελικά σταθερό σημείο** της f αν υπάρχει φυσικός αριθμός k τέτοιος ώστε το $f^k(x_0)$ να είναι σταθερό σημείο της f.
4. Το σημείο $x_0 \in \Delta$ λέγεται **τελικά περιοδικό σημείο** της f περιόδου n αν υπάρχει φυσικός αριθμός k τέτοιος ώστε το $f^k(x_0)$ να είναι περιοδικό σημείο της f περιόδου n.

Παράδειγμα 1^o

Στην περίπτωση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ το δυναμικό σύστημα που ορίζεται έχει πολύ απλή συμπεριφορά. Το 0 και το 1 είναι σταθερά σημεία της συνάρτησης αφού $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Έτσι η ακολουθία που ορίζεται για $x_0 = 0$ είναι $0, 0, 0, \ldots$ και για $x_0 = 1$ είναι $1, 1, 1, \ldots$. Ακόμη για οποιαδήποτε επιλογή της αρχικής τιμής x_0 με $x_0 > 0$ η ακολουθία $x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \ldots$ τείνει πάντα στον αριθμό 1. Υπάρχουν όμως δυναμικά συστήματα με πολύ πιο σύνθετη συμπεριφορά όπως θα δούμε παρακάτω.

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τους πρώτους όρους από τις ακολουθίες που προκύπτουν για διάφορες τιμές του x_0 μέσω της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$.

$x_0 = 0$	$x_0 = 1$	$x_0 = 15$	$x_0 = 120$	$x_0 = 0,02$
0	1	15	120	0,02
0	1	3,87298	10,9545	0,14142
0	1	1,96799	3,30975	0,37606
0	1	1,40285	1,81927	0,61323
0	1	1,18442	1,34880	0,78309
0	1	1,08831	1,16138	0,88492
0	1	1,04322	1,07767	0,94070
0	1	1,02138	1,03811	0,96990
0	1	1,01063	1,01888	0,98483
0	1	1,00530	1,00939	0,99238

Παράδειγμα 2ο

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2-1$. Υπάρχουν δύο σταθερά σημεία τα $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ και $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, δηλαδή ισχύει $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ και $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ακόμη ισχύει $f(0)=-1$ και $f(-1)=0$, άρα τα σημεία 0 και 1 είναι περιοδικά περιόδου 2 αφού $f^2(0)=f(f(0))=f(-1)=0$ και $f^2(-1)=f(f(-1))=f(0)=-1$. Το σημείο $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ είναι τελικά σταθερό αφού $f\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και το σημείο $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ είναι τελικά περιοδικό αφού $f(\sqrt{1+\sqrt{2}})=\sqrt{2}$, $f(\sqrt{2})=1$, $f(1)=0$.

$x_0=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$x_0=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$x_0=0$	$x_0=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$x_0=\sqrt{1+\sqrt{2}}$
$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	0	$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\sqrt{1+\sqrt{2}}$
$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1
$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	0
$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	-1
$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	0

Έστω $\Delta_1=\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ και $\Delta_2=\left(-\infty,-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

Αν $x_0\in\Delta_1$ με $x_0\neq\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ τότε η ακολουθία που προκύπτει μέσω της συνάρτησης $f(x)=x^2-1$ τείνει στην περιοδική τροχιά $0,-1,0,-1,0,-1,\ldots$. Σε αυτήν την περίπτωση η περιοδική τροχιά λέγεται **περιοδικός ελκυστής** γιατί υπάρχει ένα διάστημα Δ τέτοιο ώστε η ακολουθία $x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0),\ldots$ να τείνει στην περιοδική τροχιά για κάθε $x_0\in\Delta$.

Αν $x_0\in\Delta_2$ τότε η ακολουθία που προκύπτει μέσω της συνάρτησης $f(x)=x^2-1$ τείνει στο $+\infty$.

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τους πρώτους όρους από τις ακολουθίες που προκύπτουν για διάφορες τιμές του x_0 μέσω της συνάρτησης $f(x)=x^2-1$.

$x_0=1,5$	$x_0=-0,5$	$x_0=0,8$	$x_0=1,9$	$x_0=-2$
1,5	−1,5	0,8	1,9	−2
1,25	−0,75	−0,36	2,61	3
0,5625	−0,4375	−0,8704	5,8121	8
−0,68359	−0,80859	−0,24240	32,7805	63
−0,53270	−0,34617	−0,94124	1073,56	3968
−0,71623	−0,88016	−0,11406	$1,1525\cdot10^{6}$	$1,5745\cdot10^{7}$
−0,48701	−0,22531	−0,98698	$1,3283\cdot10^{12}$	$2,4790\cdot10^{14}$
−0,76281	−0,94923	−0,02585		
−0,41810	−0,09895	−0,99932	$1,7644\cdot10^{24}$	$6,1457\cdot10^{28}$
−0,82518	−0,99020	−0,00133	$3,1133\cdot10^{48}$	$3,7769\cdot10^{57}$
−0,31906	−0,00075	−0,99997	$9,6929\cdot10^{96}$	$1,4265\cdot10^{115}$
−0,89819	−0,99998	−0,00003		
−0,19324	−0,00001	−0,99999	$9,3953\cdot10^{193}$	$2,0351\cdot10^{230}$
−0,96265	−0,99999	−0,00001	$8,8273\cdot10^{387}$	$4,1416\cdot10^{460}$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι είναι δυνατόν από πολύ κοντινές αρχικές τιμές να προκύψουν ακολουθίες με τελείως διαφορετική συμπεριφορά.

Είναι $1,61803<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<1,61804$.

Αν πάρουμε $x_0=1,61803$ η ακολουθία $x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0),\dots$ τείνει στην περιοδική τροχιά.

Αν πάρουμε $x_0=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ η ακολουθία $x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0),\dots$ είναι σταθερή.

Αν πάρουμε $x_0=1,61804$ η ακολουθία $x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0),\dots$ τείνει στο $+\infty$.

Στα δύο παραδείγματα που μελετήσαμε είδαμε δυναμικά συστήματα τα οποία είναι απολύτως προβλέψιμα με την έννοια ότι γνωρίζουμε την συμπεριφορά της ακολουθίας $x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0),\dots$ για τις διάφορες τιμές της αρχικής τιμής x_0. Δηλαδή τα δυναμικά συστήματα που μελετήσαμε δεν παρουσιάζουν χαοτική συμπεριφορά. Όμως πότε ένα δυναμικό σύστημα λέγεται χαοτικό; Υπάρχουν αρκετοί ορισμοί οι οποίοι περιγράφουν πότε ένα δυναμικό σύστημα λέγεται χαοτικό. Ορισμένοι είναι τοπολογικοί ενώ άλλοι προέρχονται από τον χώρο της θεωρίας μέτρου. Ο παρακάτω ορισμός είναι τοπολογικός και υπάρχει στο βιβλίο του Robert Devaney “An Introduction to Chaotic Dynamical Systems”.

Ορισμός

Έστω V ένα σύνολο πραγματικών αριθμών. (Το σύνολο $V\subset\mathbb{R}$ δεν είναι απαραίτητα διάστημα). Η συνάρτηση $f:V\to V$ λέγεται **χαοτική** αν ισχύουν οι παρακάτω τρεις συνθήκες:

i. Η f έχει ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες.
ii. Η f είναι τοπολογικά μεταβατική.
iii. Τα περιοδικά σημεία της f είναι πυκνά στο V.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε αναλυτικά τις τρεις συνθήκες του παραπάνω ορισμού.

Λέμε ότι η συνάρτηση $f:V \to V$ έχει **ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες** αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in V$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap V$ και $n \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $\left| f^n(x) - f^n(y) \right| > \delta$.

Έτσι αν μια συνάρτηση f έχει ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες τότε για κάθε x υπάρχουν σημεία y οσοδήποτε κοντά στο x τέτοια ώστε οι όροι $f^n(x), f^n(y)$ να απέχουν τουλάχιστον κατά δ για κάποια τιμή του n.

Αν μια συνάρτηση έχει ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες τότε οι στρογγυλοποιήσεις που γίνονται από τον υπολογιστή κατά τον υπολογισμό μιας τροχιάς $x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \ldots$ είναι δυνατόν από κάποιον όρο $f^n(x_0)$ και έπειτα να δώσουν αποτελέσματα που δεν έχουν καμία σχέση με τις πραγματικές τιμές.

Λέμε ότι η συνάρτηση $f:V \to V$ είναι **τοπολογικά μεταβατική** αν και μόνο αν για οποιαδήποτε διαστήματα Δ_1, Δ_2 υπάρχουν $x \in \Delta_1 \cap V$ και $k \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $f^k(x) \in \Delta_2$. Δηλαδή όσο μικρά και αν είναι τα διαστήματα Δ_1, Δ_2 και όπου και αν βρίσκονται πάντα υπάρχει κάποιος αριθμός $x \in \Delta_1 \cap V$ τέτοιος ώστε η τροχιά του να επισκέπτεται το διάστημα Δ_2. Από οπουδήποτε μπορούμε να βρεθούμε οπουδήποτε. Αν το σύνολο V είναι κλειστό διάστημα τότε η συνάρτηση $f:V \to V$ είναι τοπολογικά μεταβατική αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 \in V$ με την παρακάτω ιδιότητα:

Για κάθε $x \in V$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $f^n(x_0) \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

Σε αυτή την περίπτωση η τροχιά του x_0 βρίσκεται σχεδόν παντού στο διάστημα V.

Λέμε ότι τα περιοδικά σημεία της συνάρτησης $f:V \to V$ είναι **πυκνά** στο V αν και μόνο αν για κάθε $x \in V$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x_0 \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap V$ τέτοιος ώστε το σημείο x_0 να είναι περιοδικό σημείο της f. Δηλαδή τα περιοδικά σημεία της f βρίσκονται σχεδόν παντού μέσα στο V.

Η ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες και η τοπολογική μεταβατικότητα είναι χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης τα οποία δηλώνουν αταξία. Αρχικές τιμές που διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους μπορεί να έχουν τελείως διαφορετικές τροχιές. Ακόμη υπάρχουν τροχιές που καλύπτουν σχεδόν όλο τον χώρο. Από την άλλη μεριά οι περιοδικές τροχιές δηλώνουν την επανάληψη μιας κατάστασης, την προβλεψιμότητα. Έτσι είναι μια ένδειξη τάξης. Σε μια χαοτική συνάρτηση λοιπόν συνυπάρχουν η αταξία (συνθήκες i. και ii. του ορισμού) και η τάξη (συνθήκη iii. του ορισμού).

Παράδειγμα 3^{o}
Η συνάρτηση $f(x) = 4x(1-x)$ έχει την ιδιότητα να απεικονίζει το διάστημα $V = [0,1]$ στον εαυτό του. Δηλαδή για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $f(x) \in [0,1]$. Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση αυτή είναι χαοτική στο σύνολο $V = [0,1]$.

Παράδειγμα 4ο

Άλλο ένα παράδειγμα χαοτικής συνάρτησης είναι η

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & \text{αν } 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 2x-1, & \text{αν } \frac{1}{2}< x\le 1 \end{cases}$$

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι πρώτοι όροι από τις τροχιές της f με αρχικές τιμές $x_0=\frac{1}{31}\simeq 0,032258\ldots$ και $x_0'=0,0322$.

Επανάληψη	$x_0=\frac{1}{31}\simeq 0,032258\ldots$	$x_0'=0,0322$
$n=1$	$\frac{2}{31}\simeq 0,064516\ldots$	$0,0644$
$n=2$	$\frac{4}{31}\simeq 0,129032\ldots$	$0,1288$
$n=3$	$\frac{8}{31}\simeq 0,258064\ldots$	$0,2576$
$n=4$	$\frac{16}{31}\simeq 0,516129\ldots$	$0,5152$
$n=5$	$\frac{1}{31}\simeq 0,032258\ldots$	$0,0304$
$n=6$	$\frac{2}{31}\simeq 0,064516\ldots$	$0,0608$
$n=7$	$\frac{4}{31}\simeq 0,129032\ldots$	$0,1216$
$n=8$	$\frac{8}{31}\simeq 0,258064\ldots$	$0,2432$
$n=9$	$\frac{16}{31}\simeq 0,516129\ldots$	$0,4864$
$n=10$	$\frac{1}{31}\simeq 0,032258\ldots$	$0,9728$
$n=11$	$\frac{2}{31}\simeq 0,064516\ldots$	$0,9456$
$n=12$	$\frac{4}{31}\simeq 0,129032\ldots$	$0,8912$
$n=13$	$\frac{8}{31}\simeq 0,258064\ldots$	$0,7824$

Παρόλο που οι αρχικές τιμές x_0, x_0' διαφέρουν πολύ λίγο οι τροχιές τους είναι αρκετά διαφορετικές. Για τις πρώτες 9 επαναλήψεις οι δύο τροχιές είναι αρκετά κοντά όμως από εκεί και μετά οι τροχιές διαφέρουν σημαντικά.

Από τα παραδείγματα 3 και 4 είναι φανερό ότι συναρτήσεις με πολύ απλό τύπο είναι δυνατόν να παρουσιάζουν πολύπλοκη δυναμική συμπεριφορά.

Θεώρημα

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.

α) Αν $|f'(x)|>1$ για κάθε $x\in\Delta$ τότε για κάθε $\alpha,\beta\in\Delta$ με $\alpha\neq\beta$ ισχύει

$$|f(\beta)-f(\alpha)|>|\beta-\alpha|.$$

β) Αν $|f'(x)|<1$ για κάθε $x\in\Delta$ τότε για κάθε $\alpha,\beta\in\Delta$ με $\alpha\neq\beta$ ισχύει

$$|f(\beta)-f(\alpha)|<|\beta-\alpha|.$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ξ μεταξύ των α,β τέτοιος ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Από την παραπάνω ισότητα προκύπτει ότι:

- Αν $|f'(\xi)|>1$ τότε $|f(\beta)-f(\alpha)|>|\beta-\alpha|$.
- Αν $|f'(\xi)|<1$ τότε $|f(\beta)-f(\alpha)|<|\beta-\alpha|$.

Έτσι το θεώρημα αποδείχτηκε.

Παρατήρηση

Αν $|f'(x)|>1$ τότε οι εικόνες δύο σημείων α,β μέσω της f απομακρύνονται, ενώ αν $|f'(x)|<1$ τότε οι εικόνες δύο σημείων α,β μέσω της f πλησιάζουν. Έτσι η συνθήκη $|f'(x)|>1$ είναι συνθήκη αταξίας (τα σημεία απομακρύνονται) ενώ η συνθήκη $|f'(x)|<1$ είναι συνθήκη τάξης (τα σημεία πλησιάζουν).