Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΒΗΤΗ
(ΜΙΑ ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ)

Νίκος Α. Φωτιάδης
Δρ. Μαθηματικών
Επιμορφωτής Β΄ επιπέδου κλάδου ΠΕ 03
E-mail: nikos.fotiades@gmail.com
Website: http://users.sch.gr/nfotiades/

Περίληψη

Η παράδοση της κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων με κανόνα και διαβήτη έχει τις ρίζες της στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς. Αρκετές είναι οι κατασκευές που μπορούν να γίνουν με κανόνα και διαβήτη, όμως υπάρχουν και κατασκευές που αποδείχτηκε ότι δεν μπορούν να γίνουν μόνο με τη χρήση του κανόνα και του διαβήτη, όπως για παράδειγμα ο τετραγωνισμός του κύκλου. Στην παρούσα εργασία θα δείξουμε ότι όποια γεωμετρική κατασκευή μπορεί να γίνει με κανόνα και διαβήτη μπορεί να γίνει ***μόνο*** *με το διαβήτη. Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως θεώρημα των Mohr-Mascheroni. Έχουν δοθεί αρκετές αποδείξεις του θεωρήματος. Η απόδειξη του Hungerbühler (1994) είναι σχετικά η πιο απλή. Αυτή την απόδειξη παρουσιάζουμε εδώ και την απλοποιούμε ακόμη περισσότερο.*

Abstract

The tradition of constructing geometrical objects using exclusively the ruler and the compasses originates from the ancient Greek mathematicians. There are several constructions that can be carried out only with a ruler and the compasses, but it has been proved that there are also some constructions, such as squaring the circle, that cannot be constructed using exclusively the ruler and the compasses. In this paper we shall prove that every geometric construction that can be done with a ruler and a compasses may be done only with a compasses. This result is known as the Mohr-Mascheroni theorem. There have been given a lot of proofs of this theorem with Hungerbühler's being relatively the most simple. In this paper we exhibit an even more simplified version of Hungerbühler's proof.

Εισαγωγή

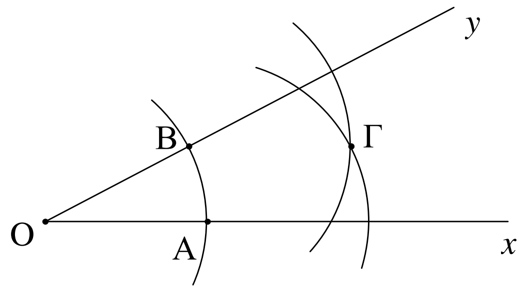
Όταν λέμε γεωμετρική κατασκευή εννοούμε ότι δίνονται ένα ή περισσότερα αρχικά γεωμετρικά αντικείμενα και ζητείται η κατασκευή ενός ή περισσότερων νέων γεωμετρικών αντικειμένων που έχουν κάποια ιδιότητα και σχετίζονται με τα αρχικά. Η κατασκευή των νέων γεωμετρικών αντικειμένων μπορεί να γίνει με τη χρήση διαφόρων μέσων, όμως η διαδικασία αποκτάει μεγαλύτερο ενδιαφέρον αν τα μέσα που επιτρέπεται να χρησιμοποιηθούν είναι περιορισμένα. Έτσι, σύμφωνα με την αρχαιοελληνική παράδοση τα μόνα επιτρεπτά μέσα για τις γεωμετρικές κατασκευές είναι ο κανόνας και ο διαβήτης.

Ας υποθέσουμε ότι δίνεται μια γωνία $x\widehat{O}y$ μικρότερη των 180^o και ζητείται η κατασκευή της διχοτόμου της γωνίας. Αυτό μπορεί να γίνει πολύ εύκολα με ένα μοιρογνωμόνιο, όμως αυτό δεν θεωρείται αποδεκτό σύμφωνα με τον περιορισμό που αναφέραμε παραπάνω. Η κατασκευή της διχοτόμου με κανόνα και διαβήτη περιγράφεται στα παρακάτω 3 βήματα. (Σχήμα 1)

Βήμα 1. Γράφουμε κύκλο (O,ρ), όπου ρ τυχαία ακτίνα, ο οποίος τέμνει τις πλευρές $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$ της γωνίας στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.

Βήμα 2. Οι κύκλοι (A,ρ) και (B,ρ) τέμνονται στην κορυφή Ο της γωνίας και σε ένα άλλο σημείο, το οποίο ονομάζουμε Γ.

Βήμα 3. Η ημιευθεία με αρχή το Ο, η οποία διέρχεται από το σημείο Γ, είναι η διχοτόμος της γωνίας $x\widehat{O}y$.



Σχήμα 1

Μια ευθεία προσδιορίζεται πλήρως αν γνωρίζουμε δύο σημεία της. Στις κατασκευές μόνο με διαβήτη δεν μπορούμε να χαράξουμε μια ευθεία, όμως θεωρούμε ότι έχουμε κατασκευάσει μια ευθεία αν προσδιορίσουμε δύο σημεία της. Έτσι, στην κατασκευή της διχοτόμου φαίνεται ότι χρησιμοποιήσαμε διαβήτη (Βήματα 1 και 2) και κανόνα (Βήμα 3). Όμως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κατασκευή ολοκληρώθηκε στο Βήμα 2 με τον προσδιορισμό του σημείου Γ. Άρα, η κατασκευή έγινε μόνο με διαβήτη.

Το θεώρημα Mohr-Mascheroni

Το 1797 ο Ιταλός μαθηματικός Lorenzo Mascheroni, καθηγητής στο πανεπιστήμιο της Pavia, δημοσίευσε ένα βιβλίο με τίτλο «Geometria del compasso» [4], στην οποία αποδείκνυε ότι κάθε γεωμετρική κατασκευή που μπορεί να γίνει με κανόνα και διαβήτη μπορεί να γίνει μόνο με διαβήτη. Αρκετά χρόνια νωρίτερα, το 1672, ο δανός μαθηματικός Georg Mohr είχε δημοσιεύσει ένα βιβλίο με τίτλο «Euclides Danicus» [5], στο οποίο αποδείκνυε το ίδιο αποτέλεσμα. Το βιβλίο όμως του Mohr έμεινε στην αφάνεια για πολλά χρόνια και έγινε ευρέως γνωστό μόλις το 1928 όταν το ανακάλυψε ο νεαρός φοιτητής των μαθηματικών Johannes Hjelmslev σε ένα παλαιοπωλείο της Κοπεγχάγης.

Δεν είναι γνωστό αν ο Mascheroni γνώριζε για τη δουλειά του Mohr. Οι αποδείξεις τους είναι διαφορετικές και αρκετά περίπλοκες. Αργότερα δόθηκαν πιο σύντομες αποδείξεις, στις οποίες όμως γινόταν χρήση του μετασχηματισμού της αντιστροφής. Παράδειγμα τέτοιας απόδειξης είναι αυτή του August Adler [1]. Μια σύντομη σχετικά απόδειξη στην οποία δεν χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός της αντιστροφής δόθηκε το 1994 από τον Norbert Hungerbühler [2].

Για να κατανοήσουμε την απόδειξη του θεωρήματος Mohr-Mascheroni πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι σε μια γεωμετρική κατασκευή (με κανόνα και διαβήτη) κάθε νέο σημείο προκύπτει ως σημείο τομής:

- Δύο ευθειών.
- Μιας ευθείας και ενός κύκλου.
- Δύο κύκλων.

Έτσι, για να αποδείξουμε το θεώρημα Mohr-Mascheroni αρκεί να αποδείξουμε τα παρακάτω δύο θεωρήματα.

Θεώρημα 1

Δίνονται τα σημεία Α, Β και ένας κύκλος κ. Έστω ε η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία Α, Β. Αν η ευθεία ε και ο κύκλος κ έχουν κοινά σημεία, τότε είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε τα σημεία τομής τους μόνο με διαβήτη.

Θεώρημα 2

Δίνονται τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ. Έστω ε_1 η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία Α, Β και ε_2 η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία Γ, Δ. Αν οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνονται, τότε είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε το σημείο τομής τους μόνο με διαβήτη.

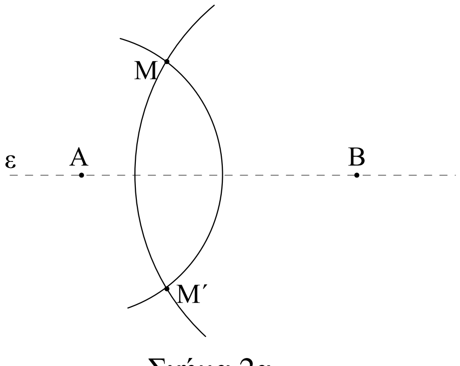
Θα παρουσιάσουμε την απόδειξη των θεωρημάτων 1 και 2 με μια σειρά κατασκευών μόνο με διαβήτη. Πρόκειται για την απόδειξη του Hungerbühler [2] με τις εξής διαφορές:
Α) Χωρίζουμε την απόδειξη σε πολλές απλές κατασκευές.
Β) Παρουσιάζουμε μια τελείως διαφορετική απόδειξη (και μάλλον πιο απλή) για την κατασκευή των σημείων τομής κύκλου και ευθείας που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

Υπενθυμίζουμε ότι στη γεωμετρία του διαβήτη μια ευθεία έχει οριστεί αν έχουμε προσδιορίσει δύο σημεία της.

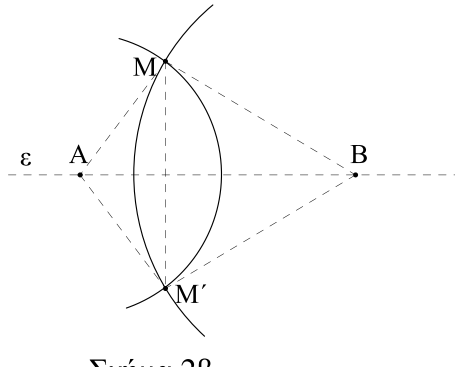
Κατασκευή 1

Δίνονται δύο σημεία Α, Β, τα οποία ορίζουν μια ευθεία ε και ένα σημείο Μ που δεν ανήκει στην ευθεία ε. Να κατασκευάσετε μόνο με διαβήτη το συμμετρικό Μ΄ του Μ ως προς την ευθεία ε.

Γράφουμε τους κύκλους (A, AM) και (B, BM). Οι δύο κύκλοι τέμνονται στο σημείο Μ και σε ένα άλλο σημείο Μ΄, το οποίο είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την ε. (Σχήμα 2α)



Σχήμα 2α



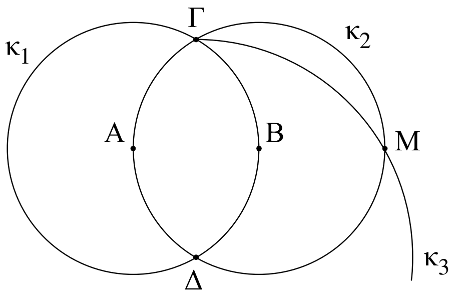
Σχήμα 2β

Δικαιολόγηση της κατασκευής. Τα σημεία Α, Β ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος ΜΜ΄, άρα η ευθεία ΑΒ είναι μεσοκάθετος του ΜΜ΄. (Σχήμα 2β)

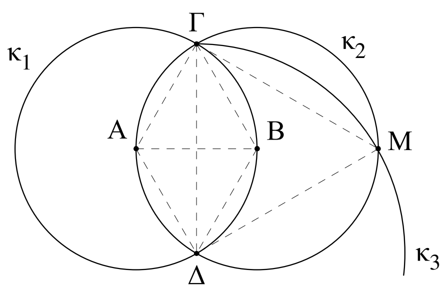
Κατασκευή 2

Δίνονται δύο σημεία Α, Β. Να κατασκευάσετε μόνο με διαβήτη ένα σημείο Μ στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο, ώστε $AB = BM$.

Έστω $\text{ΑΒ} = \rho$. Οι κύκλοι $\kappa_1 = (\text{Α}, \rho)$ και $\kappa_2 = (\text{Β}, \rho)$ τέμνονται στα σημεία Γ και Δ. Ο κύκλος $\kappa_3 = (\Delta, \Gamma\Delta)$ τέμνει τον κύκλο κ_2 εκτός από το σημείο Γ και σε ένα άλλο σημείο Μ, που είναι το ζητούμενο σημείο. (Σχήμα 3α)



Σχήμα 3α



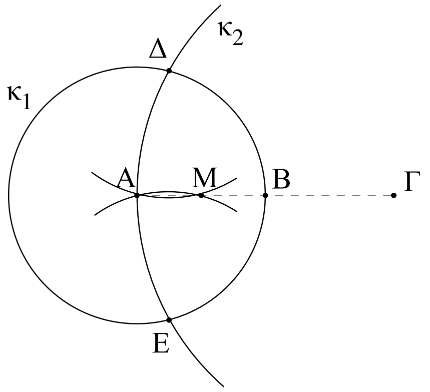
Σχήμα 3β

Δικαιολόγηση της κατασκευής. Είναι $\Gamma\widehat{\text{Μ}}\Delta = 60^{\circ}$ γιατί $\Gamma\widehat{\text{Β}}\Delta = 120^{\circ}$. Ακόμη $\Gamma\Delta = \Delta\text{Μ}$, άρα το τρίγωνο ΓΔΜ είναι ισόπλευρο. Τότε $\overset{\frown}{\text{Α}\Gamma\text{Μ}} = 180^{\circ}$, οπότε τα σημεία Α, Μ είναι αντιδιαμετρικά. (Σχήμα 3β)

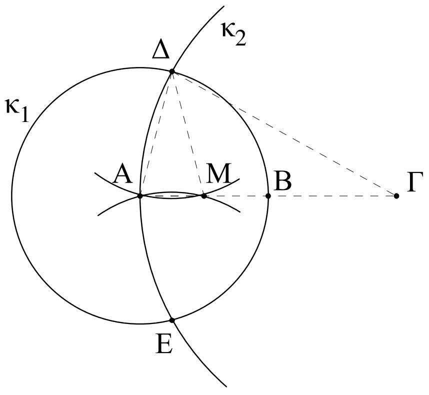
Κατασκευή 3

Δίνονται δύο σημεία Α, Β. Να κατασκευάσετε μόνο με διαβήτη το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ.

Κατασκευάζουμε ένα σημείο Γ τέτοιο, ώστε το Β να είναι το μέσο του ΑΓ (Κατασκευή 2). Οι κύκλοι $\kappa_1 = (\text{Α}, \text{ΑΒ})$ και $\kappa_2 = (\Gamma, \text{Α}\Gamma)$ τέμνονται στα σημεία Δ και Ε. Οι κύκλοι $(\Delta, \text{Α}\Delta)$ και $(\text{Ε}, \text{ΑΕ})$ τέμνονται εκτός από το σημείο Α και σε ένα άλλο σημείο Μ, που είναι το μέσο του ΑΒ. (Σχήμα 4α)



Σχήμα 4α



Σχήμα 4β

Δικαιολόγηση της κατασκευής. Τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΔΜ και ΑΓΔ είναι όμοια, γιατί έχουν κοινή τη γωνία $\Gamma\hat{A}\Delta$. Ο λόγος ομοιότητας είναι $\frac{1}{2}$, οπότε το Μ είναι το μέσο του ΑΒ. (Σχήμα 4β)

Κατασκευή 4

Δίνονται δύο σημεία Α, Β, τα οποία ορίζουν μια ευθεία ε και ένα σημείο Μ, που δεν ανήκει στην ευθεία ε. Να κατασκευάσετε μόνο με διαβήτη το ίχνος Κ του σημείου Μ πάνω στην ευθεία ε.

Έστω Μ΄ το συμμετρικό του Μ ως προς την ε (Κατασκευή 1). Το σημείο Κ προσδιορίζεται ως μέσο του τμήματος ΜΜ΄ (Κατασκευή 3).

Κατασκευή 5

Δίνονται δύο σημεία Α, Β. Να κατασκευάσετε μόνο με διαβήτη έναν κύκλο που να διέρχεται από τα σημεία Α, Β.

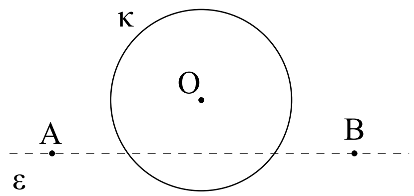
Έστω Γ ένα από τα σημεία τομής των κύκλων (A,ρ) και (B,ρ), όπου $\rho > \frac{1}{2}\mathrm{AB}$. Ο κύκλος $(\Gamma,\mathrm{A}\Gamma)$ διέρχεται και από το σημείο Β.

Παρατήρηση: Το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις αφού υπάρχουν άπειρες τιμές του ρ με $\rho > \frac{1}{2}\mathrm{AB}$.

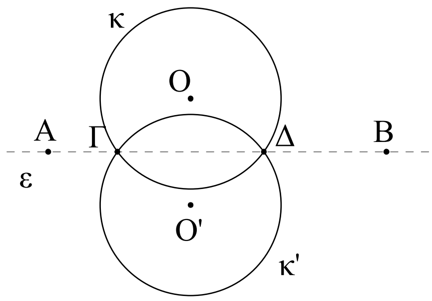
Κατασκευή 6

Δίνονται δύο σημεία Α, Β, τα οποία ορίζουν μια ευθεία ε και ένας κύκλος κ με κέντρο Ο. (Σχήμα 5α). Έστω ότι η ευθεία ε δεν διέρχεται από το σημείο Ο. Να κατασκευάσετε μόνο με διαβήτη τα σημεία τομής της ευθείας ε και του κύκλου κ. (Υποθέτουμε ότι ο κύκλος και η ευθεία έχουν κοινά σημεία).

Έστω Ο΄ το συμμετρικό του Ο ως προς την ευθεία ε (Κατασκευή 1) και κ΄ ο συμμετρικός κύκλος του κύκλου κ ως προς την ευθεία ε. Τα σημεία τομής Γ, Δ των κύκλων κ, κ΄ είναι τα σημεία τομής του κύκλου κ και της ευθείας ε. (Σχήμα 5β)



Σχήμα 5α

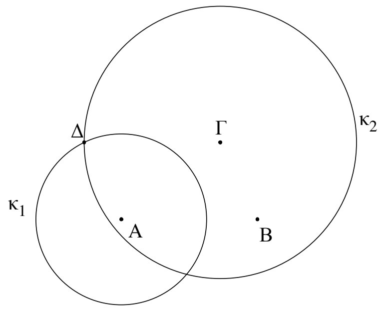


Σχήμα 5β

Κατασκευή 7

Δίνονται τρία σημεία Α, Β, Γ, τα οποία δεν είναι συνευθειακά. Να κατασκευάσετε μόνο με διαβήτη ένα σημείο Δ τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.

Η κορυφή Δ του παραλληλογράμμου είναι ένα από τα σημεία τομής των κύκλων $κ_1 = (Α, ΒΓ)$ και $κ_2 = (Γ, ΑΒ)$. (Σχήμα 6)

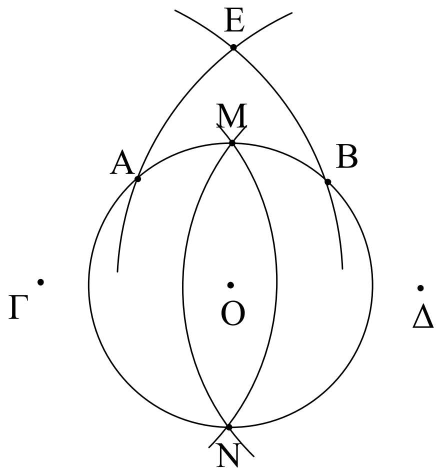


Σχήμα 6

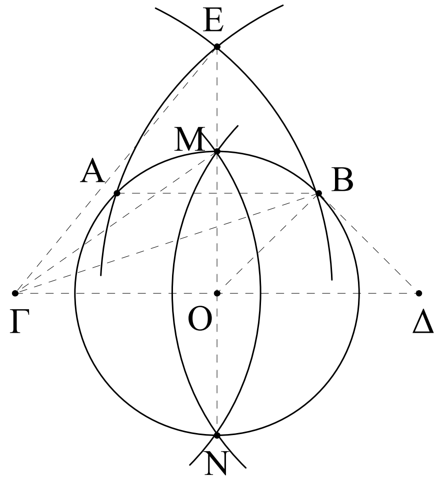
Κατασκευή 8

Δίνεται κύκλος (O,ρ) *και δύο σημεία του Α, Β, τα οποία δεν είναι αντιδιαμετρικά. Να κατασκευάσετε μόνο με διαβήτη τα μέσα των τόξων* $\overparen{AB}$.

Βρίσκουμε σημεία Γ, Δ τέτοια, ώστε τα τετράπλευρα ΑΒΟΓ και ΑΒΔΟ να είναι παραλληλόγραμμα (Κατασκευή 7). Έστω Ε ένα από τα σημεία τομής των κύκλων $(\Gamma,\text{Β}\Gamma)$ και $(\Delta,\text{Α}\Delta)$. Γράφουμε, τέλος, τους κύκλους $(\Gamma,\text{ΟΕ})$ και $(\Delta,\text{ΟΕ})$, οι οποίοι τέμνονται στα Μ, Ν. Τα σημεία Μ, Ν είναι τα μέσα των δύο τόξων $\overparen{\text{ΑΒ}}$. (Σχήμα 7α)



Σχήμα 7α



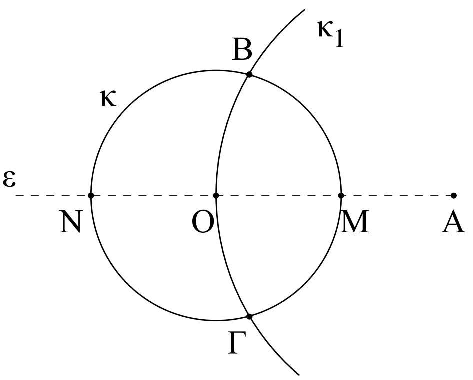
Σχήμα 7β

Δικαιολόγηση της κατασκευής. Η ΓΔ είναι μεσοκάθετος του ΜΝ, άρα το ΜΝ είναι κάθετο στη χορδή ΑΒ, γι' αυτό η ευθεία ΜΝ διέρχεται από τα μέσα των τόξων $\overparen{\text{ΑΒ}}$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\text{ΟΜ} = \rho$. Αυτό προκύπτει από το Πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα ΟΓΜ και ΟΓΕ και το πρώτο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΒΓΔ. (Σχήμα 7β)

Κατασκευή 9

Δίνεται ένας κύκλος $\kappa = (O,\rho)$ *και ένα σημείο Α διαφορετικό από το Ο. Έστω ε η ευθεία, η οποία διέρχεται από τα σημεία Ο, Α. Να κατασκευάσετε μόνο με διαβήτη τα σημεία τομής της ευθείας ε και του κύκλου κ.*

Ο κύκλος $\kappa_1 = (\mathrm{A}, \mathrm{OA})$ τέμνει τον κύκλο κ στα σημεία Β, Γ. Τα μέσα Μ, Ν των τόξων $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$ (Κατασκευή 8) είναι τα σημεία τομής της ευθείας ε και του κύκλου κ. (Σχήμα 8)

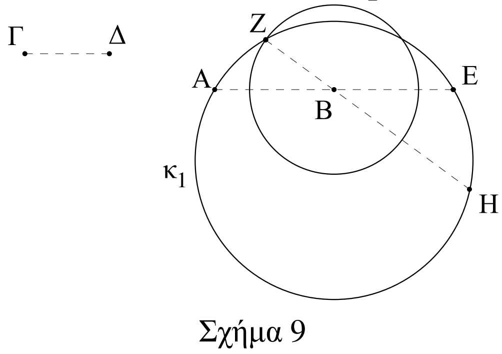


Σχήμα 8

Κατασκευή 10

Δίνονται τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ. Έστω $AB = \alpha$ *και* $\Gamma\Delta = \beta$. *Να κατασκευάσετε μόνο με διαβήτη ένα τμήμα με μήκος* x *τέτοιο, ώστε* $\alpha^2 = \beta \cdot x$.

Έστω Ε ένα σημείο τέτοιο, ώστε το Β να είναι το μέσο του ΑΕ (Κατασκευή 2). Γράφουμε κύκλο κ_1 με ακτίνα ρ ο οποίος διέρχεται από τα σημεία Α, Ε (Κατασκευή 5). Έστω Ζ ένα από τα σημεία τομής των κύκλων κ_1 και $\kappa_2 = (\mathrm{B}, \Gamma\Delta)$. Έστω Η το σημείο τομής της ευθείας ΒΖ με τον κύκλο κ_1 (Κατασκευή 6). Το ΒΗ είναι το ζητούμενο τμήμα. (Σχήμα 9)



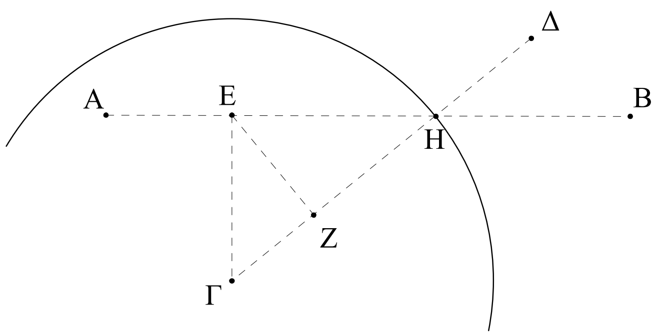
Σχήμα 9

Παρατήρηση: Αν $\rho > \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\beta}$ τότε οι κύκλοι κ_1, κ_2 έχουν δύο κοινά σημεία, οπότε η ευθεία ΒΖ δεν διέρχεται από το κέντρο του κύκλου κ_1.

Κατασκευή 11

Δίνονται τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ. Έστω ε_1 η ευθεία των Α, Β και ε_2 η ευθεία των Γ, Δ. Αν οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνονται να κατασκευάσετε μόνο με διαβήτη το σημείο τομής τους.

Έστω Ε το ίχνος της κάθετης από το Γ στην ΑΒ και Ζ το ίχνος της κάθετης από το Ε στην ΓΔ (Κατασκευή 4). Έστω $ΓΕ=\alpha$ και $ΓΖ=\beta$. Κατασκευάζουμε ένα τμήμα με μήκος x τέτοιο, ώστε $\alpha^2=\beta\cdot x$ (Κατασκευή 10). Το σημείο τομής Η των ευθειών ε_1, ε_2 είναι ένα από τα σημεία τομής του κύκλου $(Γ, x)$ και της ευθείας ΓΔ (Κατασκευή 9). (Σχήμα 10)



Σχήμα 10

Δικαιολόγηση της κατασκευής. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΗ είναι $ΓΕ^2=ΓΖ\cdot ΓΗ$.

Παρατηρήσεις

1. Οι κατασκευές 6 και 9 αποδεικνύουν το Θεώρημα 1 και η κατασκευή 11 το Θεώρημα 2.
2. Οι κατασκευές 7, 8, 9 δεν υπάρχουν στη απόδειξη του Hungerbühler.
3. Στη γεωμετρία του διαβήτη είπαμε ότι δεν μπορούμε να χαράξουμε μια ευθεία και ότι μια ευθεία ε προσδιορίζεται αν γνωρίζουμε δύο σημεία της Α, Β. Μπορούμε όμως να κατασκευάσουμε μόνο με διαβήτη

(Κατασκευές 2 και 3) όσα σημεία θέλουμε της ευθείας ΑΒ. Αυτό γίνεται επαναλαμβάνοντας πολλές φορές τις κατασκευές 2 και 3.

4. Στην κατασκευή 7 έστω $\mathrm{B\Gamma} = \rho_1$ και $\mathrm{AB} = \rho_2$. Από την τριγωνική ανισότητα είναι $|\mathrm{B\Gamma} - \mathrm{AB}| < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma} + \mathrm{AB}$, άρα $|\rho_1 - \rho_2| < \mathrm{A\Gamma} < \rho_1 + \rho_2$. Έτσι, οι κύκλοι κ_1, κ_2 τέμνονται. Ακόμη, το Δ ανήκει στο ημιεπίπεδο της ΑΓ που δεν ανήκει το σημείο Β.
5. Στην κατασκευή 8 αφού τα Α, Β δεν είναι αντιδιαμετρικά τα σημεία Ο, Α, Β δεν είναι συνευθειακά. Ακόμη, $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \rho$.
6. Στην κατασκευή 9 στο Σχήμα 8 το σημείο Α βρίσκεται έξω από τον κύκλο κ, για αυτό οι κύκλοι κ, $\kappa_1 = (\mathrm{A}, \mathrm{OA})$ τέμνονται. Οι κύκλοι τέμνονται επίσης αν το σημείο Α βρίσκεται πάνω ή μέσα στον κύκλο και ισχύει $\mathrm{OA} > \frac{\rho}{2}$. Αν όμως $\mathrm{OA} \le \frac{\rho}{2}$, τότε παίρνουμε σημείο A' στην προέκταση της ΟΑ προς το Α (Παρατήρηση 3) τέτοιο, ώστε $\mathrm{OA}' > \frac{\rho}{2}$ και κάνουμε την Κατασκευή 9 για το σημείο A' και όχι για το σημείο Α.
7. Στην κατασκευή 9 τα σημεία Β, Γ δεν είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου κ, γιατί τα σημεία Ο, Β, Γ ανήκουν στον κύκλο κ_1, οπότε δεν είναι συνευθειακά.
8. Στην κατασκευή 10 για να τέμνονται οι κύκλοι κ_1, κ_2 πρέπει: $|\rho - \beta| < \sqrt{\rho^2 - \alpha^2} < \rho + \beta$.
   Η σχέση $\sqrt{\rho^2 - \alpha^2} < \rho + \beta$ προφανώς ισχύει.
   Ακόμη, $|\rho - \beta| < \sqrt{\rho^2 - \alpha^2} \Leftrightarrow \rho > \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{2\beta}$.
9. Ένα εξαιρετικό βιβλίο που αναφέρεται στη γεωμετρία του διαβήτη είναι αυτό του A. N. Kostovskii [3]. Στο βιβλίο αυτό υπάρχουν πολλές κατασκευές μόνο με διαβήτη καθώς και αρκετά ιστορικά σχόλια σχετικά με το θέμα. Στον πρόλογό του ο συγγραφέας αναφέρει ότι το βιβλίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εκπαιδευτικό βοήθημα.

Βιβλιογραφία

1. A. Adler, *Theorie der geometrischen Konstruktionen*, Leipzig, (1906).
2. N. Hungerbühler, *A short elementary proof of the Mohr-Mascheroni theorem*, The American Mathematical Monthly, vol. 101, No. 8, (1994) 784-787.
3. A. N. Kostovskii, *Geometrical constructions using compasses only*, Blaisdell Publishing Company, (1961).
4. L. Mascheroni, *La Geometria del Composso*, Pavia (1797).
5. G. Mohr, *Euclides danicus*, Amsterdam: Van Velsen (1672) (Kobenhavn: 1928).