Προτάσεις και προτασιακοί τύποι

Ερώτηση πολλαπλής επιλογής. Διαλέξτε τη σωστή απάντηση:

Η τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = 1 + 1$ είναι ίση με: (α) 5 (β) 7.

Από τα θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων 2013.

*Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις(;) που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση(;) τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση(;) είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση(;) είναι λανθασμένη.*

- Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $\mathrm{K}(z_0)$ και ακτίνα ρ^2, όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

Η ερώτηση πολλαπλής επιλογής που προηγήθηκε φαίνεται παράλογη. Πώς να διαλέξουμε μια απάντηση όταν καμιά από τις δύο δεν είναι σωστή; Το ίδιο παράλογο ήταν και το θέμα των πανελλαδικών εξετάσεων. Για να χαρακτηρίσουμε κάτι ως Σωστό ή Λάθος πρέπει να είναι πρόταση και αυτό που δόθηκε δεν ήταν πρόταση.

Η διαφορά ανάμεσα στην πρόταση και τον προτασιακό τύπο.

Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω «προτάσεις» (;) ως Σωστή ή Λάθος.

(α) $2 > 1$

(β) $x > 1$

(γ) $x^2 \geq 0$

Η σχέση (α) είναι πρόταση και είναι Σωστή.

Η σχέση (β) μοιάζει ως προς τη μορφή της με την (α) όμως περιέχει μια μεταβλητή οπότε **δεν είναι πρόταση αλλά προτασιακός τύπος μιας μεταβλητής**. Η μεταβλητή παίρνει τιμές από κάποιο σύνολο Ω το οποίο ονομάζεται *πεδίο ορισμού* ή *σύνολο αναφοράς* του προτασιακού τύπου και **πρέπει να δίνεται.** Όμως και η σχέση (γ) δεν είναι πρόταση αλλά προτασιακός τύπος μιας μεταβλητής.

Συμβολίζουμε με $P(x)$ τον προτασιακό τύπο $x > 1$. Για τη μεταβλητή x ας υποθέσουμε ότι είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή το πεδίο ορισμού του προτασιακού τύπου είναι το $\Omega = \mathbb{R}$.

Για $x = 3$ ο προτασιακός τύπος γίνεται $3 > 1$ που είναι αληθής πρόταση. Για $x = -1$ ο προτασιακός τύπος γίνεται $-1 > 1$ που είναι ψευδής πρόταση.

Για κάθε $x \in \mathrm{A} = (1, +\infty)$ ο προτασιακός τύπος $P(x)$: $x > 1$ γίνεται αληθής πρόταση ενώ για κάθε $x \in \mathrm{A}' = (-\infty, 1]$ γίνεται ψευδής πρόταση.

Έστω $P(x)$ ένας προτασιακός τύπος μιας μεταβλητής με πεδίο ορισμού Ω. Το σύνολο $\mathrm{A} = \{x \in \Omega \,/\, P(x) \text{ αληθής}\}$ ονομάζεται *σύνολο αλήθειας* του προτασιακού τύπου. Ισχύει $\varnothing \subseteq \mathrm{A} \subseteq \Omega$.

- Αν $\mathrm{A} = \Omega$ τότε $P(x)$ αληθής για κάθε $x \in \Omega$.

- Αν $\mathrm{A} = \varnothing$ τότε $P(x)$ ψευδής για κάθε $x \in \Omega$.
- Αν $\varnothing \subset \mathrm{A} \subset \Omega$ τότε $P(x)$ αληθής για κάποια $x \in \Omega$ και $P(x)$ ψευδής για τα υπόλοιπα $x \in \Omega$.

Ποσοδείκτες: Πως μπορούμε να μετατρέψουμε έναν προτασιακό τύπο σε πρόταση.

Έστω $P(x)$ ένας προτασιακός τύπος μιας μεταβλητής x με πεδίο ορισμού Ω και σύνολο αλήθειας Α. Χρησιμοποιώντας τους ποσοδείκτες «για κάθε» και «υπάρχει» σχηματίζουμε δύο προτάσεις:

$$p_1 : (\forall x \in \Omega)\ P(x)$$

$$p_2 : (\exists x \in \Omega)\ P(x)$$

Η πρόταση p_1 είναι αληθής όταν $\mathrm{A} = \Omega$ και ψευδής όταν $\mathrm{A} \neq \Omega$.
Η πρόταση p_2 είναι αληθής όταν $\mathrm{A} \neq \varnothing$ και ψευδής όταν $\mathrm{A} = \varnothing$.

Η σημασία του πεδίου ορισμού.

Έστω $P(x)$ ο προτασιακός τύπος $x > 1$ και p η πρόταση $(\forall x \in \Omega)\ P(x)$.
Αν $\Omega = \mathbb{R}$ τότε η p είναι ψευδής. Όμως αν Ω είναι το σύνολο των διψήφιων φυσικών αριθμών τότε η p είναι αληθής.

Έστω $P(x)$ ο προτασιακός τύπος $x^2 \geq 0$ και p η πρόταση $(\forall x \in \Omega)\ P(x)$.
Αν $\Omega = \mathbb{R}$ τότε η p είναι αληθής. Όμως αν $\Omega = \mathbb{C}$ τότε η p δεν έχει νόημα γιατί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών δεν ορίζεται η διάταξη.

Προτασιακοί τύποι δύο μεταβλητών

Θεωρούμε τον προτασιακό τύπο δύο μεταβλητών $P(x, y) : x > y$ με $x, y \in \mathbb{R}$.
Χρησιμοποιώντας τους ποσοδείκτες «για κάθε» και «υπάρχει» σε κάθε μεταβλητή αυτή τη φορά μπορούμε να σχηματίσουμε τέσσερις προτάσεις:

$$p_1 : (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ P(x, y)$$

$$p_2 : (\exists x \in \Omega)(\forall y \in \mathbb{R})\ P(x, y)$$

$$p_3 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ P(x, y)$$

$$p_4 : (\exists x \in \Omega)(\exists y \in \mathbb{R})\ P(x, y)$$

Οι προτάσεις p_1, p_2 είναι ψευδείς ενώ οι προτάσεις p_3, p_4 είναι αληθείς.

Οι ποσοδείκτες είναι τελείως απαραίτητοι για να αποδώσουμε σωστά το νόημα. Η παρουσία τους στα σχολικά βιβλία είναι εμφανής τόσο στους ορισμούς όσο και στα θεωρήματα. Για παράδειγμα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ αν και μόνο αν $(\forall x_1 \in \Delta)(\forall x_2 \in \Delta)[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$. Αν ένας μαθητής δεν γράψει που ανήκουν τα x_1, x_2 ή δεν αναφέρει το «για οποιαδήποτε» το θεωρούμε λάθος.

Όμως δεν χρησιμοποιείται μόνο ο καθολικός ποσοδείκτης αλλά και ο υπαρξιακός. Για παράδειγμα στον ορισμό του τοπικού μεγίστου λέμε ότι η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in \mathrm{A}$ αν και μόνο αν

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathrm{A})[f(x) \le f(x_0)].$$

Το θέμα των πανελλαδικών εξετάσεων που αναφέρθηκε παραπάνω είναι προτασιακός τύπος τριών μεταβλητών z, z_0, ρ που αναφέρεται το πεδίο ορισμού τους. Το σύνολο αλήθειας του προτασιακού τύπου είναι $\mathrm{A} = \left\{(z, z_0, \rho) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times (0, +\infty) / \rho = 1\right\}$.
Αν στον προτασιακό αυτό τύπο προτάξουμε «για κάθε $\rho > 0$» τότε γίνεται πρόταση που είναι λάθος ενώ αν προτάξουμε «υπάρχει $\rho > 0$» τότε γίνεται πρόταση που είναι σωστή.

Συμπεράσματα.

Στη διατύπωση των ερωτήσεων τύπου Σωστό-Λάθος θα πρέπει να αναφέρουμε το πεδίο ορισμού των μεταβλητών και να χρησιμοποιούμε τους ποσοδείκτες «για κάθε» και «υπάρχει» (όχι με τα σύμβολα $\forall, \exists$ αλλά λεκτικά). Με αυτό τον τρόπο σχηματίζουμε ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ που μπορούν να χαρακτηριστούν είτε ως Σωστές είτε ως Λάθος. Αν δεν εφαρμόσουμε τα παραπάνω τότε σχηματίζουμε έναν ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟ ΤΥΠΟ που δεν μπορεί κανείς να χαρακτηρίσει ούτε ως Σωστό ούτε ως Λάθος. Και φυσικά δεν είναι σωστό να περιμένουμε από τους μαθητές μας να μαντέψουν αν εννοούμε «για κάθε» ή «υπάρχει» και σε ποιο σύνολο φανταζόμαστε ότι ανήκουν οι μεταβλητές. Όλα αυτά πρέπει να τα αναφέρουμε ξεκάθαρα.

Υπάρχει μια τελείως εσφαλμένη θέση ότι όταν δεν αναφέρουμε τον ποσοδείκτη **εννοούμε** τον καθολικό. Δεν είναι δυνατόν να υπάρξει επικοινωνία και συνεννόηση ανάμεσα σε δύο ανθρώπους όταν ο ένας πρέπει να μαντεύει τι εννοεί ο άλλος. Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω αν ένας μαθητής γράψει

> Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

τότε το θεωρούμε λάθος. Γιατί; Γιατί δεν σκεφτόμαστε ότι ο μαθητής **εννοεί** το «για οποιαδήποτε x_1, x_2»;

Με τους μαθητές είμαστε αυστηροί. Με τους εαυτούς μας θα πρέπει να είμαστε πολύ περισσότερο.