

Ασκήσεις επανάληψης

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4\sin 3x$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Να βρείτε την μέγιστη τιμή, την ελάχιστη τιμή και την περίοδο της f .
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.
 - Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{\pi}{6}\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right) > 2$.
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a\eta\mu\omega x$ όπου a, ω θετικοί αριθμοί. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 4 και η περίοδος $T = \pi$.
 - Να βρείτε τις τιμές των a, ω και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $[0, \pi]$.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση παίρνει την τιμή $2\sqrt{3}$.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4 - 4\sin^2 2x$.
- Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \rho\sin x \sin(\pi - x) - \eta\mu x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sigma\eta\nu x$ και $g(x) = \rho\sigma\eta\nu\omega x$ με $\rho, \omega > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g είναι -6 και η περίοδος της $T = \frac{\pi}{2}$.
 - Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\eta\nu x - 1$.
 - Να αποδείξετε ότι $\rho = 6$ και $\omega = 4$.
 - Να αποδείξετε ότι $2f\left(\frac{\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$.
 - Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = 3\sqrt{2}$.
- Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda - \lambda^3)x^4 - (\lambda^2 - 1)x^3 + (\lambda - 1)x - 2\lambda + 2$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε το $P(x)$ να είναι 3^{ου} βαθμού.
 - Για $\lambda = 0$,
 - Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 2$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < -4$.
- Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = (e^a - 1)^x$ και $g(x) = \ln x$.
 - Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f ορίζεται σε όλο το \mathbb{R} .
 - Να λύσετε την εξίσωση $2g(x) + g(6) = g(1 - x)$.
 - Αν $a > 0$ να βρείτε:
 - την τιμή του a που ικανοποιεί τη σχέση $f(2) = 3f(1)$.
 - τις τιμές του x που επαληθεύουν την ανίσωση $f(\ln x) \geq 1$, όταν επιπλέον ισχύει ότι η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημιάξονα Ox .
- Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - \beta x + 2$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
 - Αν ο αριθμός -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$ είναι ίσο με 8, να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -3$.
 - Για $\alpha = 2$ και $\beta = -3$ να λύσετε:

- i. την εξίσωση $P(x) = 0$.
ii. την ανίσωση $P(x) < 0$.
7. Δίνεται η εκθετική συνάρτηση $f(x) = (1 + \alpha^2)^x$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
(α) Να βρείτε τις τιμές του α , ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
(β) Για $\alpha = 3$ να λύσετε:
i. την εξίσωση $100^x - 11f(x) + 10 = 0$.
ii. την ανίσωση $f(\log x) \leq 10$.
(γ) Να βρείτε τις τιμές του α , ώστε η γραφική παράσταση της f να είναι συμμετρική με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \log x$ ως προς την ευθεία $y = x$.
8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 + (\alpha - 2)x + \beta + 5$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
(α) Να βρείτε τα α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x - 1$ και διαιρούμενο με το $x + 2$ να αφήνει υπόλοιπο 6.
(β) Αν $\alpha = -2$ και $\beta = -3$
i. να εκτελέσετε τη διαίρεση $P(x) : (x + 2)$ με τη βοήθεια του σχήματος Horner και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης.
ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
iii. να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.
9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)\log 3 - \log(1 + 3^{x-1}) + \log(3^x - 3)$.
(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
(β) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται $f(x) = \log \frac{3^{2x} - 3^{x+1}}{3 + 3^x}$.
(γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq \log 9 - \log 2$.
10. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 20$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
(α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ είναι ίσο με -16 να υπολογίσετε τις τιμές των α, β .
(β) Αν $\alpha = 12$ και $\beta = 6$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.
(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
(β) Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) - f(1) = 0$.
12. (α) Να λύσετε τις εξισώσεις:
i. $2006^{2x-1} = 1$
ii. $\log(1+x) = 1 + \log(1-x)$.
(β) Να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 81$.

13. Το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 - x^2 + \beta x + 3$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει παράγοντα το $x-1$ και διαιρούμενο με το $x-2$ δίνει υπόλοιπο 7.
(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -4$.
(β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
14. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda - 2)x^3 - 2\lambda x^2 + (3\lambda + 2)x - \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$.
(α) Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-1)$ να είναι 3.
(β) Για $\lambda = 3$,
i. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x-1)$.
ii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 3$.
15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(2^x - 8)$.
(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
(β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες, αν υπάρχουν.
(γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
16. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2\alpha x^2 - 9x - 18\alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.
(α) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 2\alpha$
(β) Να γράψετε το $P(x)$ σαν γινόμενο τριών πρωτοβάθμιων παραγόντων.
(γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$ αν $|\alpha| < 1$.
17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + \log(\sqrt{x} + 1)$.
(α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση f .
(β) Αν $f(4) = \log(\alpha^2 - 6)$ να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.
(γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.
(δ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τον άξονα $y'y$.
18. (α) Να λύσετε τις εξισώσεις:
i. $3^{2x+1} = 1$.
ii. $\log x^{2005} = 2005$.
iii. $\log(1+x) = \log(1-x)$.
(β) Να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 16$.