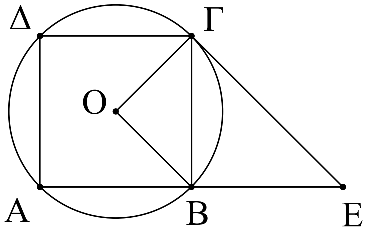
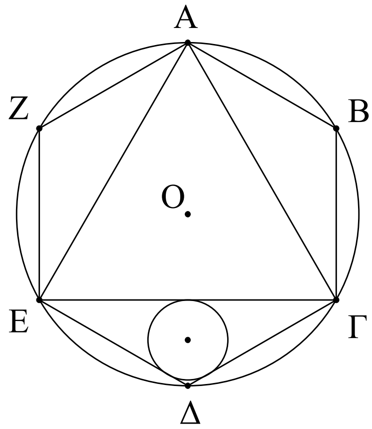
Ασκήσεις επανάληψης

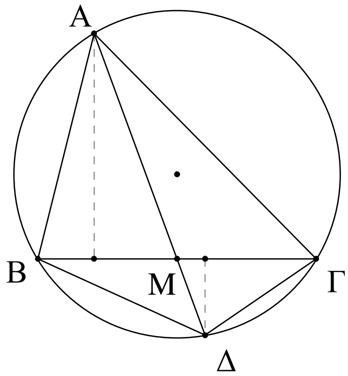
1. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α εγγεγραμμένο σε κύκλο $(\mathrm{O},4)$. Στην προέκταση της ΑΒ παίρνουμε τμήμα $\mathrm{BE}=\mathrm{AB}$. Να υπολογίσετε:
   (α) την πλευρά α του τετραγώνου.
   (β) το μήκος του τμήματος ΕΓ.
   (γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΒΕΓ.
   (δ) την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ΒΓΕ.



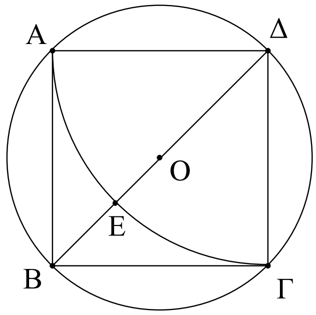
2. Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Έστω ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΓ είναι $3\sqrt{3}$.
   (α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{R}=2$.
   (β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στις χορδές ΓΑ, ΓΒ και στο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$.
   (γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τριγώνου ΔΕΓ και του εγγεγραμμένου σε αυτό κύκλου.



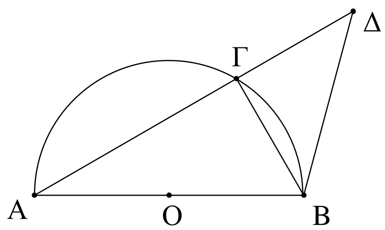
3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta^2+\gamma^2=2\alpha^2$. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι:
   (α) $\dfrac{\mu_\alpha}{\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   (β) $\mathrm{M\Delta}=\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{6}$.
   (γ) $(\mathrm{AB\Gamma})=3(\mathrm{B\Delta\Gamma})$.



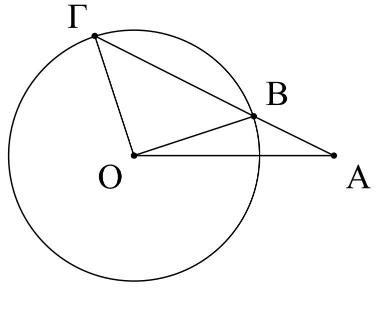
4. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$ του κύκλου $(\Delta,\Delta\mathrm{A})$. Να υπολογίσετε συναρτήσει του R
   (α) την πλευρά του τετραγώνου.
   (β) το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ και τη χορδή ΑΒ.
   (γ) το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου που ορίζεται από το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$ και τις πλευρές του τετραγώνου ΑΒ, ΒΓ.
   (δ) Αν $\mathrm{BE}\cdot\mathrm{E\Delta}=8\left(\sqrt{2}-1\right)$, να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.



5. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ κέντρου Ο και ακτίνας R δίνεται η χορδή $\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{R}\sqrt{3}$. Στην προέκταση της ΑΓ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta=\mathrm{R}$.
   (α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}=105^{\circ}$.
   (β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\mathrm{B}=\lambda_4$.
   (γ) Να βρείτε την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ΔΓΒ.
   (δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ.

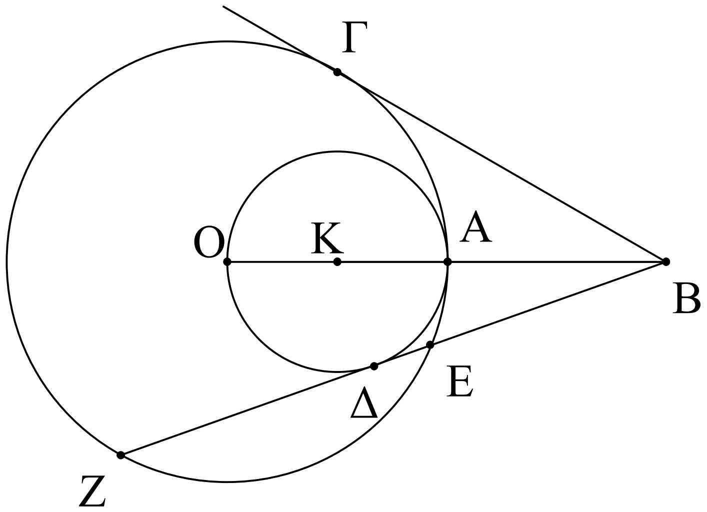


6. Δίνεται κύκλος (O,R) και σημείο Α τέτοιο, ώστε $\mathrm{OA}=\dfrac{\mathrm{R}\sqrt{10}}{2}$. Από το Α φέρουμε την τέμνουσα ΑΒΓ με $\mathrm{B\Gamma}=2\mathrm{AB}$. Να αποδείξετε ότι:
   (α) $\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{R}\sqrt{2}$.
   (β) το τρίγωνο ΟΑΒ είναι αμβλυγώνιο.
   (γ) $(\mathrm{OA\Gamma})=3(\mathrm{OAB})$.
   (δ) το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περικλείεται από τη χορδή ΒΓ και το κυρτογώνιο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$ είναι $\mathrm{E}=\dfrac{(\pi-2)\mathrm{R}^2}{4}$.

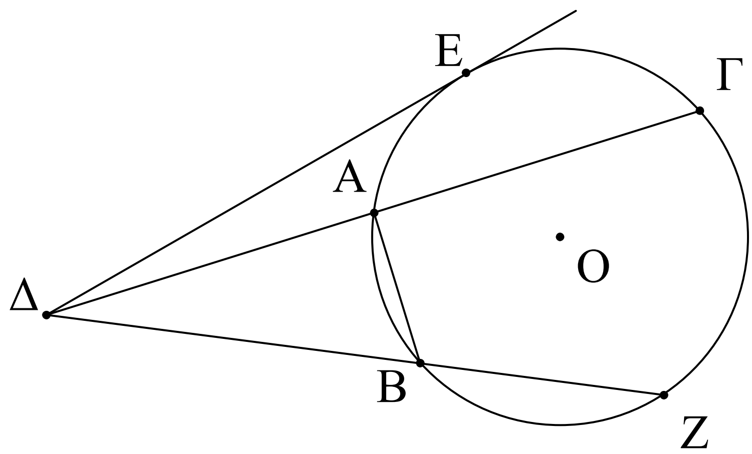


7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Αν $\text{ΒΓ}^2 = 4\text{ΑΜ}^2 - 2\sqrt{2}\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\text{Α}}$.

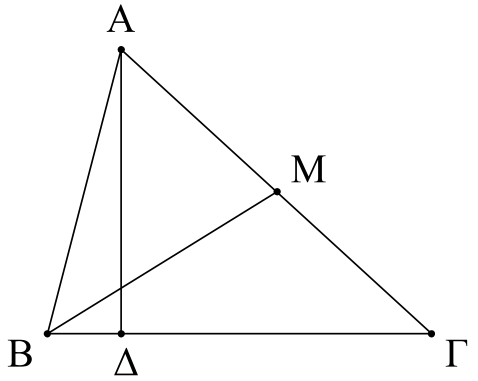
8. Δίνονται οι κύκλοι $(\text{Ο}, R)$ και $\left(\text{Κ}, \frac{R}{2}\right)$ οι οποίοι εφάπτονται εσωτερικά σε ένα σημείο Α. Στην προέκταση της ΟΑ προς το Α παίρνουμε σημείο Β τέτοιο, ώστε $\text{ΑΒ} = \text{ΟΑ}$. Η εφαπτομένη ΒΔ του κύκλου $\left(\text{Κ}, \frac{R}{2}\right)$ τέμνει τον κύκλο $(\text{Ο}, R)$ στα σημεία Ε, Ζ. Έστω ΒΓ η εφαπτομένη του κύκλου $(\text{Ο}, R)$.
(α) Να αποδείξετε ότι $\text{ΒΓ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΔ}^2$.
(β) Να αποδείξετε ότι $\text{ΑΔ}^2 = \text{ΔΕ}\cdot\text{ΔΖ}$.



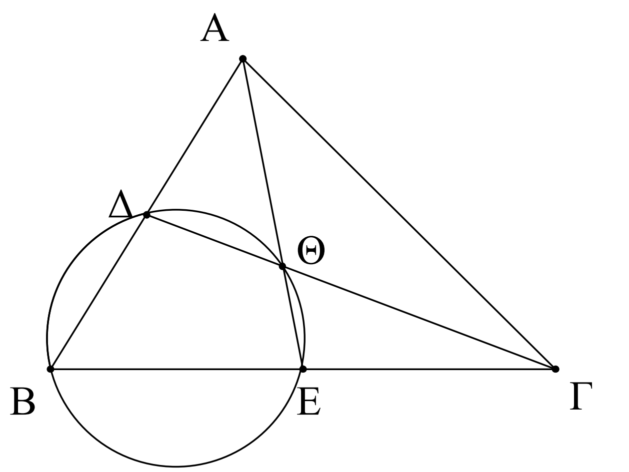
9. Σε κύκλο $(\text{Ο}, R)$ οι χορδές ΑΒ, ΑΓ τέμνονται κάθετα. Προεκτείνουμε την ΓΑ κατά τμήμα $\text{ΑΔ} = \text{ΑΓ}$. Από το Δ φέρουμε την εφαπτομένη ΔΕ και την τέμνουσα ΔΒΖ. Αν $\text{ΑΒ} = \alpha$ και $\text{ΔΕ} = 3\sqrt{2}\alpha$, να υπολογίσετε συναρτήσει του α
(α) τη χορδή ΑΓ.
(β) την ακτίνα του κύκλου.
(γ) τη χορδή ΒΖ.
(δ) το τμήμα ΔΟ.



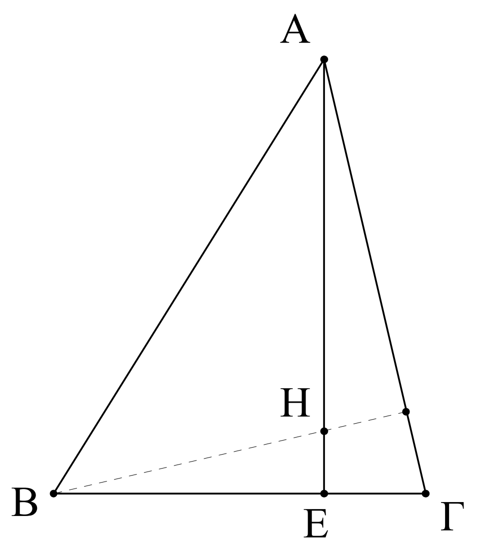
10. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{B} < 90^o$ φέρουμε τη διάμεσο ΒΜ και το ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι $BM^2 = AM^2 + B\Delta \cdot B\Gamma$.



11. Έστω Δ, Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου. Αν το τετράπλευρο ΒΔΘΕ είναι εγγράψιμο να αποδείξετε ότι:
(α) $4\mu_\alpha^2 = 3\gamma^2$ και $4\mu_\gamma^2 = 3\alpha^2$.
(β) $\gamma^2 + \alpha^2 = 2\beta^2$.



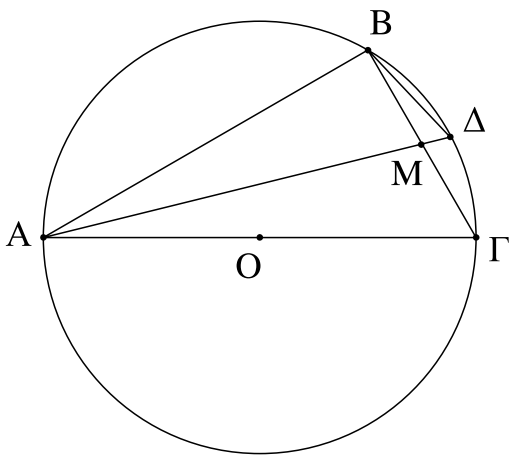
12. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 45^o$ και το ύψος του ΑΕ. Αν Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου να αποδείξετε ότι $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2AH \cdot AE$.



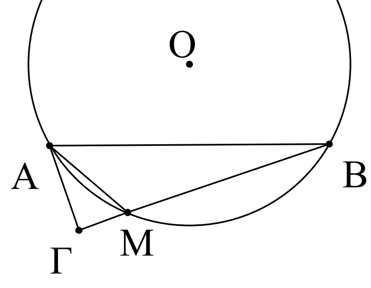
13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = 5$, $\gamma = 3$ και $\mu_\alpha = \frac{\sqrt{19}}{2}$.
(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{A}$.
(β) Αν η προέκταση του ύψους ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο Ε να υπολογίσετε το γινόμενο $A\Delta \cdot AE$.

14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 3\lambda$, $A\Gamma = 4\lambda$ και $\hat{A} = 30^0$ ($\lambda > 0$).
(α) Να υπολογίσετε την πλευρά ΒΓ.
(β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
(γ) Να υπολογίσετε το ύψος ΑΕ του τριγώνου.
(δ) Αν Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε το γινόμενο $AH \cdot AE$.

15. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και τα διαδοχικά του σημεία Α, Β, Γ ώστε $AB = \lambda_3$ και $B\Gamma = \lambda_6$. Αν η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ, τότε:
(α) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΓ.
(β) Να υπολογίσετε το ΜΔ ως συνάρτηση της ακτίνας R.
(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΜΔ.



16. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και χορδή του $AB = \lambda_3$. Έστω Μ ένα σημείο του κυρτογώνιου τόξου ΑΒ τέτοιο ώστε $AM = 2$ και $MB = 5$ και Γ η προβολή του Α πάνω στη ΜΒ, να υπολογίσετε:
(α) την ακτίνα R,
(β) το μήκος του τμήματος ΑΒ,
(γ) το μήκος του τμήματος ΜΓ,
(δ) το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων που ορίζονται από τις χορδές ΑΜ και ΜΒ.



17. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = \gamma\sqrt{7}$ και διάμεσο $AM = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2\gamma$.

(β) Αν ΒΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ:

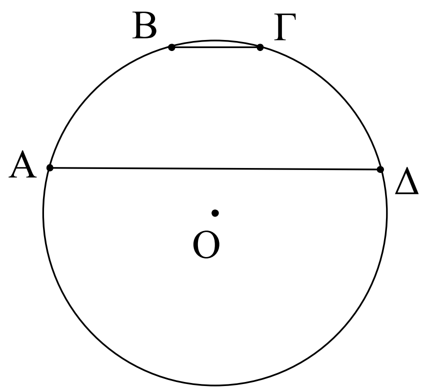
i. Να υπολογίσετε το λόγο $\dfrac{A\Delta}{A\Gamma}$.

ii. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\dfrac{(ABM)}{(A\Delta M)}$.

18. Σε κύκλο (Ο, R) θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι ώστε $AB = 60^o$, $B\Gamma = \lambda_{12}$ και $\Gamma\Delta = 60^0$. Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R:

(α) τις χορδές ΑΔ και ΒΓ,

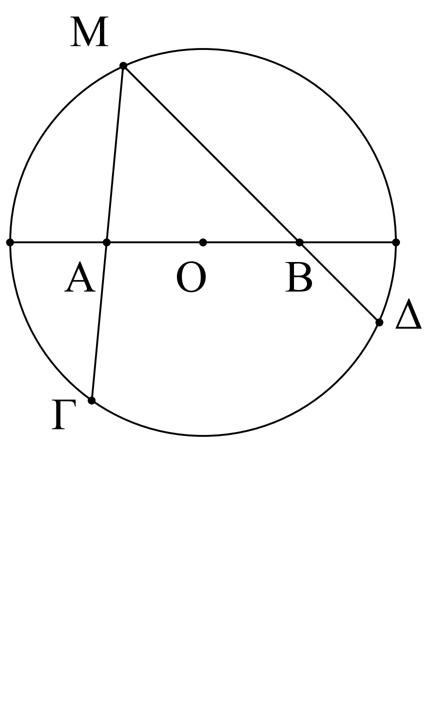
(β) την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τραπεζίου ΑΒΓΔ.



19. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και τυχαία ευθεία ε που διέρχεται από το κέντρο του, Θεωρούμε δύο σημεία Α, Β της ευθείας ε, εκατέρωθεν του Ο έτσι, ώστε $OA = OB = \alpha_3$. Αν Μ είναι τυχαίο σημείο του κύκλου και οι ευθείες ΜΑ, ΜΒ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

(α) $\dfrac{MA}{A\Gamma} = \dfrac{4MA^2}{3R^2}$ και $\dfrac{MB}{B\Delta} = \dfrac{4MB^2}{3R^2}$.

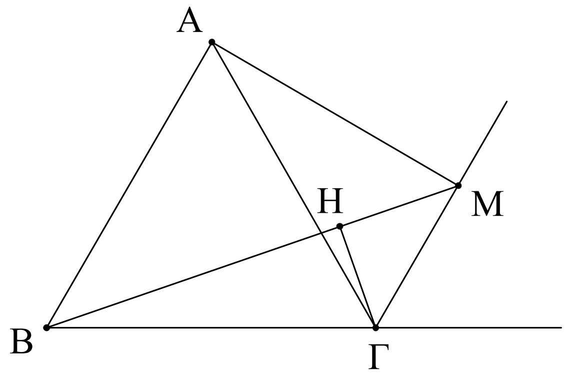
(β) $\dfrac{MA}{A\Gamma} + \dfrac{MB}{B\Delta} = \dfrac{10}{3}$.



20. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Γx και την κάθετη ΑΜ στην Γx.

(α) Να αποδείξετε ότι $(\mathrm{B\Gamma M}) = (\mathrm{A\Gamma M}) = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}$.

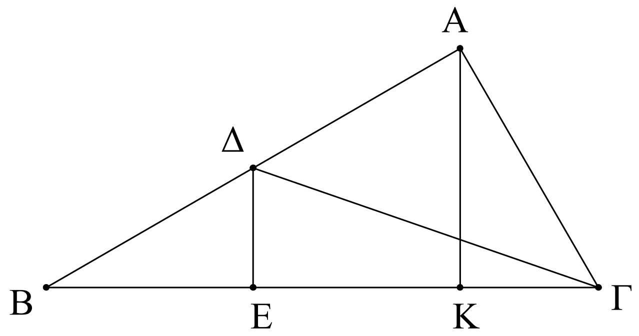
(β) Να βρείτε το ύψος ΓΗ του τριγώνου ΒΓΜ.



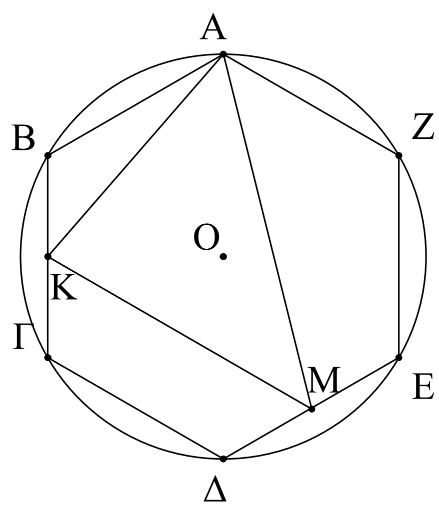
21. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{\mathrm{A}} = 90^0$) και το ύψος του ΑΚ. Από το μέσο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε την κάθετο ΔΕ στη ΒΓ. Αν $(\mathrm{B\Delta E}) = \dfrac{3}{8}(\mathrm{A\Delta\Gamma})$,

(α) να αποδείξετε ότι $\mathrm{BK} = \dfrac{3}{4}\mathrm{B\Gamma}$ και $\mathrm{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{B\Gamma}$,

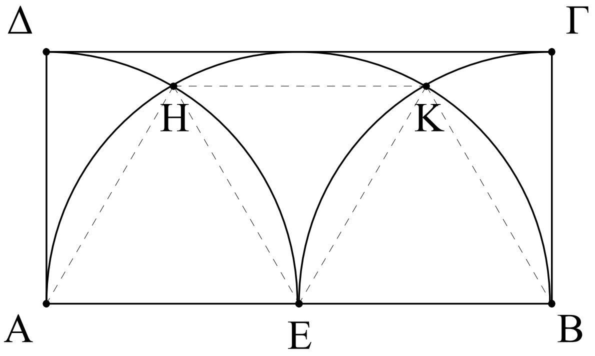
(β) να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\mathrm{B}}$.



22. Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Αν Κ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΜ.



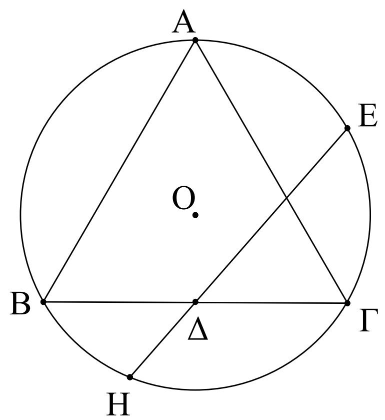
23. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2ρ και ΒΓ = ρ και Ε το μέσο του ΑΒ. Στο εσωτερικό του ορθογωνίου γράφουμε ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ και τα τεταρτοκύκλια (Α,ρ) και (Β,ρ) τα οποία τέμνουν το ημικύκλιο στα Η και Κ αντίστοιχα.
(α) Αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΗΕ, ΕΗΚ, ΕΚΒ είναι ισόπλευρα.
(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΕΗΚ.



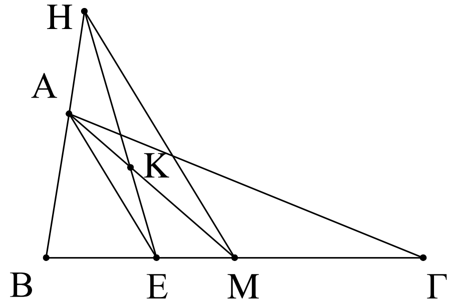
24. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Έστω Δ το μέσο της ΒΓ και Ε το μέσο του τόξου ΑΓ. Αν η ΕΔ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Η, να αποδείξετε ότι:

(α) $ΔΕ = \frac{R\sqrt{7}}{2}$.

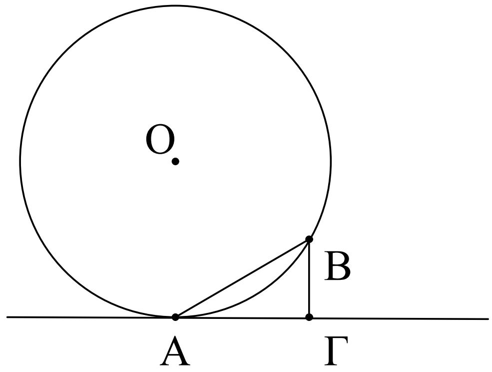
(β) $ΔΗ = \frac{3R\sqrt{7}}{14}$.



25. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσος ΑΜ και Ε τυχαίο σημείο της ΒΜ. Φέρουμε την παράλληλη από το Μ προς την ΑΕ, που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Η. Αν η ΕΗ τέμνει την ΑΜ στο Κ, να αποδείξετε ότι:
(α) τα τρίγωνα ΚΕΜ, ΑΗΚ είναι ισοδύναμα.
(β) $(ΒΕΗ)=\frac{1}{2}(ΑΒΓ)$.



26. Δίνεται κύκλος (O, R) και χορδή του AB = R. Έστω Ax η εφαπτομένη του κύκλου στο A και BΓ η κάθετη προς την Ax. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ABΓ.



27. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\frac{B\Gamma}{AB} = 2$ και $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

(α) Αν AM είναι η διάμεσος του τριγώνου να αποδείξετε ότι $AM = AB\sqrt{3}$.

(β) Να βρείτε τη γωνία $\hat{B}$.

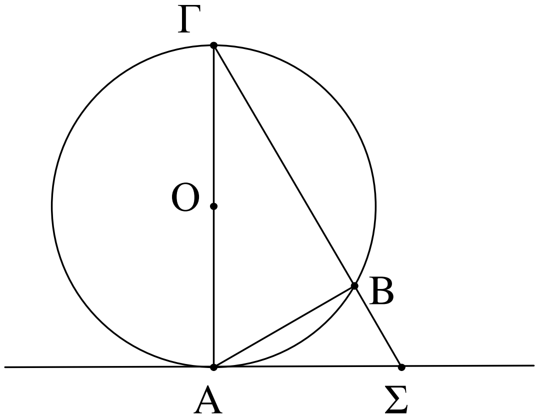
28. Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε τις χορδές $AB = \lambda_6$ και $B\Gamma = \lambda_3$. Στο σημείο A φέρουμε την εφαπτομένη η οποία τέμνει την προέκταση της ΓB στο Σ.

(α) Να αποδείξετε ότι $B\Sigma = \frac{2}{3}\alpha_3$.

(β) Να υπολογίσετε το τμήμα AΣ.

(γ) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(AB\Sigma)}{(AB\Gamma)}$.

(δ) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ABΣ.



29. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABΓ, τα ύψη του AΔ, BE και το ορθόκεντρο H.

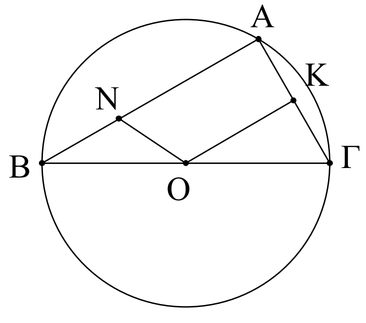
(α) Να αποδείξετε ότι $AH \cdot A\Delta = AE \cdot A\Gamma$.

(β) Αν $AH \cdot A\Delta = \frac{\alpha^2}{2}$, να δείξετε ότι:

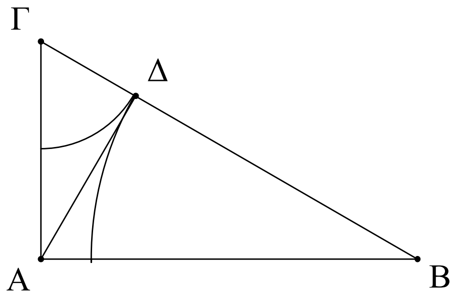
i. $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$.

ii. $\mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

30. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και το σημείο Ν της πλευράς ΑΒ τέτοιο ώστε $AN > BN$. Αν $\Delta^{N}_{(O,R)} = -3$, $A\Gamma = R$, $(AB\Gamma) = 6\sqrt{3}$ και $OK \perp A\Gamma$, να υπολογίσετε:
(α) την πλευρά ΑΒ συναρτήσει του R,
(β) την ακτίνα R του κύκλου,
(γ) τα τμήματα ΟΝ και ΟΚ,
(δ) τα τμήματα ΝΑ και ΝΒ,
(ε) το εμβαδόν (ΒΝΟ).



31. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και το ύψος του ΑΔ. Έστω ότι $AB = 2\sqrt{3}$ και $A\Gamma = 2$.
(α) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΒΓ, ΑΔ, ΒΔ, ΔΓ.
(β) Να βρείτε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που βρίσκεται εντός του τριγώνου και εκτός των κύκλων (Β, ΒΔ) και (Γ, ΓΔ).



32. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΓΔ. Αν Ε είναι σημείο της ΓΔ, έτσι ώστε $\frac{E\Gamma}{E\Delta} = 3$ και η ΑΕ τέμνει τη ΒΓ στο Η, να αποδείξετε ότι:
(α) $(B\Delta H) = \frac{1}{5}(AB\Gamma)$
(β) $(EH\Gamma) = \frac{9}{40}(AB\Gamma)$

(**Υπόδειξη:** Φέρνουμε $\Delta K \parallel AH$. Δείξτε ότι Κ μέσο του ΒΗ και $KH = \frac{1}{3}H\Gamma$)