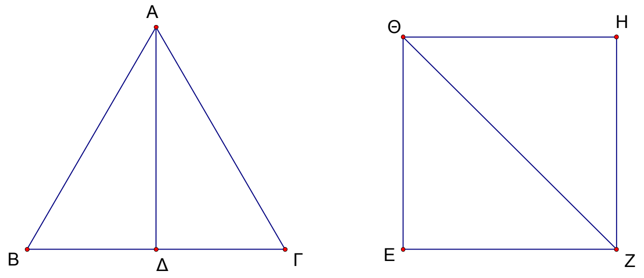
1. Διανύσματα

1. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο με ύψος ΑΔ και το ΕΖΗΘ τετράγωνο. Να υπολογίσετε τις γωνίες:

(α) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)$ (β) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}\right)$ (γ) $\left(\overrightarrow{\Delta A},\overrightarrow{\Gamma B}\right)$

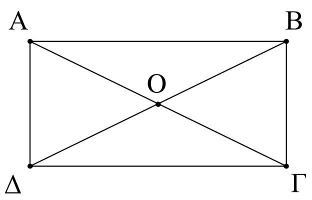
(δ) $\left(\overrightarrow{A\Gamma},\overrightarrow{\Delta A}\right)$ (ε) $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{\Delta A}\right)$ (στ) $\left(\overrightarrow{\Theta H},\overrightarrow{Z\Theta}\right)$

(ζ) $\left(\overrightarrow{HZ},\overrightarrow{E\Theta}\right)$ (η) $\left(\overrightarrow{Z\Theta},\overrightarrow{ZE}\right)$ (θ) $\left(\overrightarrow{\Theta H},\overrightarrow{EZ}\right)$



2. Οι διαγώνιοι ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ο. Να κατασκευάσετε ένα διάνυσμα, το οποίο να έχει αρχή στο Α και να είναι ίσο με το

(α) $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (β) $\overrightarrow{O\Delta}$ (γ) $\overrightarrow{O\Gamma}$ (δ) $\overrightarrow{\Gamma O}$



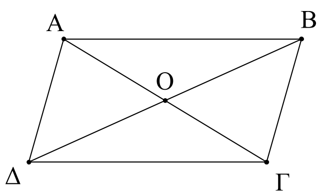
3. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ο.

(α) Να βρείτε ένα σημείο Ε τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{\Delta B}$.

(β) Να βρείτε ένα σημείο Ζ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{BZ}=\overrightarrow{AO}$.

(γ) Να βρείτε ένα σημείο Η τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{\Gamma H}=\overrightarrow{AB}$.

(δ) Να βρείτε ένα σημείο Θ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{\Delta\Theta}=\overrightarrow{OB}$.



4. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{A\Gamma}$.

5. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο αν και μόνο αν $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Delta}$.

6. Αν ισχύει ότι $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{\Gamma A}-\overrightarrow{\Delta B}$ να αποδείξετε ότι το σημείο Μ συμπίπτει με το σημείο Α.

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Μ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}$.

8. Δίνονται δύο σημεία Α, Β. Να βρείτε ένα σημείο Μ τέτοιο, ώστε
(α) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, (β) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, (γ) $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$, (δ) $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,
(ε) $4\overrightarrow{AM}=5\overrightarrow{AB}$, (στ) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$, (ζ) $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{BM}$, (η) $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.
Να κάνετε ένα σχήμα για κάθε περίπτωση.

9. Να γράψετε το διάνυσμα $5\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{A\Gamma}+2\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}$.

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AK},\overrightarrow{B\Lambda},\overrightarrow{\Gamma M}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}$.

11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Μ της ΒΓ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{M\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{A\Gamma}\right)$.

12. Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ένα σημείο Ρ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{PB}=-2\overrightarrow{PA}$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{P\Gamma}+\overrightarrow{P\Delta}=2\overrightarrow{B\Gamma}$.

13. Στην πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημείο Ρ τέτοιο, ώστε $5\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{P\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{A\Gamma}=8\overrightarrow{AP}$.

14. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Μ, Ν των πλευρών ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{A\Delta}\right)$.

15. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Σ. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $2\overrightarrow{\Sigma A}-6\overrightarrow{\Sigma B}+4\overrightarrow{\Sigma\Gamma}$ είναι ανεξάρτητο του σημείου Σ.

16. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Μ, Ρ. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $3\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{PM}+2\overrightarrow{M\Gamma}-10\overrightarrow{PB}$ είναι σταθερό, ανεξάρτητο των Μ, Ρ.

17. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ένα σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{M\Gamma}-2\overrightarrow{M\Delta}$ είναι σταθερό (ανεξάρτητο του Μ).

18. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι πραγματικοί αριθμοί κ,λ,μ τέτοιοι, ώστε $\kappa+\lambda+\mu=0$. Να αποδείξετε ότι για τυχαίο σημείο Μ το διάνυσμα $\kappa\overrightarrow{MA}+\lambda\overrightarrow{MB}+\mu\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

19. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε τέτοια, ώστε $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{\Gamma E}=\overrightarrow{AB}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Β, Ε είναι συνευθειακά.

20. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Μ της πλευράς ΑΒ. Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{M\Delta}}=\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{ME}}=\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Γ, Ε είναι συνευθειακά.

21. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ με $\alpha+\beta=1$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά.

22. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και τα σημεία Ο, Α, Β, Γ. Αν ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=5\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=11\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

23. Έστω κ,λ,μ μη μηδενικοί αριθμοί με $\kappa+\lambda+\mu=0$. Αν $\kappa\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\lambda\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\mu\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=\vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

24. Αν για τα σημεία Α, Β, Γ, Δ ισχύει η σχέση $5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=8\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά.

25. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε ένα σημείο Μ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}=\vec{0}$.

26. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε ένα σημείο Ρ τέτοιο, ώστε
$2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+4\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{\Gamma P}}-2\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

27. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να προσδιορίσετε ένα σημείο Μ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}}+\overrightarrow{\mathrm{M\Delta}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}$.

28. Έστω Ε το μέσο της πλευράς ΓΔ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και Ζ σημείο της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{\mathrm{BZ}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AZ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{\Delta Z}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{EZ}}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$.

29. Δίνονται τα σημεία Α, Β. Να βρείτε σημείο Μ τέτοιο, ώστε $2\overrightarrow{\mathrm{MA}}+3\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

30. Δίνονται τα σημεία Α, Β. Να βρείτε ένα σημείο Μ, ώστε $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=2\overrightarrow{\mathrm{BM}}$.

31. Δίνονται τα σημεία Α, Β. Να βρείτε ένα σημείο Μ, ώστε $\overrightarrow{\mathrm{MA}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.