

## 10. Υπερβολή

1. Δίνεται η υπερβολή  $9y^2 - 16x^2 = 144$ . Να βρεθούν οι εστίες, οι κορυφές, η εκκεντρότητα και οι ασύμπτωτες της υπερβολής.
2. Δίνονται το σημείο  $E(5,0)$  και η ευθεία  $\delta: 5x - 16 = 0$ . Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τύπος των σημείων  $M$  για τα οποία ισχύει  $\frac{(ME)}{d(M, \delta)} = \frac{5}{4}$  είναι υπερβολή. Να βρείτε τις εστίες, τις κορυφές, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της υπερβολής.
3. Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής της υπερβολής  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  η οποία έχει μέσο το σημείο  $M(4,1)$ .
4. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της υπερβολής  $x^2 - 3y^2 = 6$  οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία  $y = x + 5$ .
5. Έστω  $P$  η προβολή της εστίας  $E(\gamma, 0)$  της υπερβολής  $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  πάνω στην ασύμπτωτη  $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ . Να αποδείξετε ότι:  
(α)  $(EP) = \beta$ .  
(β)  $(OP) = \alpha$ .
6. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων τυχαίου σημείου  $M$  της υπερβολής  $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  από τις ασύμπτωτες της είναι σταθερό και ίσο με  $\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)^2$ .
7. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή  $x^2 - y^2 = \alpha^2$  και η εφαπτομένη  $\varepsilon$  σε τυχαίο σημείο της  $M$ . Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών της υπερβολής από την  $\varepsilon$  είναι ίσο με  $\alpha^2$ .
8. Έστω  $M$  τυχαίο σημείο της υπερβολής  $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ . Η εφαπτομένη  $\varepsilon$  της υπερβολής στο  $M$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $\Gamma$  και τον άξονα  $y'y$  στο  $\Delta$ . Η κάθετη στην  $\varepsilon$  στο σημείο  $M$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο  $Z$ . Έστω  $H$  η προβολή του  $M$  στον άξονα  $x'x$ . Να αποδείξετε ότι:  
(α)  $OG \cdot OH = \alpha^2$ .  
(β)  $OD \cdot MH = \beta^2$ .  
(γ)  $OG \cdot OZ = \gamma^2$ .
9. Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

10. Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 8px$  με εστία το σημείο E. Έστω A το μέσο του OE όπου O η αρχή των αξόνων.  
(α) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που η μια εστία της είναι το σημείο E και μια κορυφή της το σημείο A.  
(β) Να βρείτε τα σημεία τομής της παραβολής και της υπερβολής του προηγούμενου ερωτήματος.
11. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή  $x^2 - y^2 = a^2$  με κορυφές A και A'. Η ευθεία  $y = k$  με  $k \neq 0$  τέμνει την υπερβολή στα σημεία B και B'. Να αποδείξετε ότι  $\widehat{BAB'} = \widehat{BA'B'} = 90^\circ$ .
12. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζουν οι ασύμπτωτες της υπερβολής  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  και η ευθεία  $2x + 3y - 6 = 0$ .
13. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής της οποίας η εστιακή απόσταση είναι διπλάσια από την απόσταση των κορυφών και οι εστίες της συμπίπτουν με τις εστίες της έλλειψης  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .
14. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  που άγονται από το σημείο M(3,4).
15. Δίνεται η υπερβολή  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  και ένα σημείο M της υπερβολής. Η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο M τέμνει τις ασύμπτωτες στα σημεία A, B.  
(α) Να αποδείξετε ότι το M είναι το μέσο του AB.  
(β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι  $(OAB) = \alpha\beta$ .