

Ασκήσεις κατανόησης στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \overline{AB} :
(α) $A(4, -1)$ $B(-2, 3)$ (β) $A(x+1, y)$ $B(x, y-5)$
2. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης και το μέτρο των παρακάτω διανυσμάτων:
 $\vec{\alpha} = (4, -3)$ $\vec{\beta} = \vec{i} - 2\vec{j}$ $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ $\vec{\delta} = (0, 1)$
3. Να βρείτε την ορίζουσα των διανυσμάτων:
(α) $\vec{\alpha} = (-2, 1)$, $\vec{\beta} = (4, 0)$ (β) $\overline{AB} = (3, -2)$, $\overline{A\Gamma} = (1, 2)$
4. Να βρείτε την τιμή του x ώστε τα διανύσματα να είναι παράλληλα:
(α) $\vec{\alpha} = (x+1, 4)$, $\vec{\beta} = (3, 2)$ (β) $\overline{AB} = (5, x)$, $\overline{A\Gamma} = (x+4, 1)$
5. Να βρείτε την τιμή του x ώστε τα σημεία A, B, Γ να είναι συνευθειακά:
(α) $A(x+1, -1)$, $B(-1, x-1)$, $\Gamma(-5, 3)$ (β) $A(x, 0)$, $B(1, 3)$, $\Gamma(3, 5)$
6. Να γράψετε το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
(α) $\vec{\alpha} = (1, -1)$, $\vec{\beta} = (2, -3)$, $\vec{\gamma} = (4, -5)$ (β) $\vec{\alpha} = (-1, 2)$, $\vec{\beta} = (2, 5)$, $\vec{\gamma} = (-7, -4)$
7. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$:
(α) $\vec{\alpha} = (1, -\sqrt{3})$ (β) $\vec{\alpha} = (-2, 2)$
8. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:
(α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ (β) $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot (3\vec{\alpha} - \vec{\beta})$
9. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων:
(α) $\vec{\alpha} = (2, 4)$, $\vec{\beta} = (-1, 3)$ (β) $\overline{AB} = (3, -5)$, $\overline{A\Gamma} = (4, 2)$
10. Να βρείτε την τιμή του x ώστε τα διανύσματα να είναι κάθετα:
(α) $\vec{\alpha} = (x-2, 4)$, $\vec{\beta} = (2, 1)$ (β) $\overline{AB} = (4, x-2)$, $\overline{A\Gamma} = (x+3, 1)$
11. Να βρείτε την προβ $_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
(α) $\vec{\alpha} = (3, 4)$, $\vec{\beta} = (2, -1)$ (β) $\vec{\alpha} = (1, 1)$, $\vec{\beta} = (4, -2)$
12. Να βρείτε το μέσο M του τμήματος AB:
(α) $A(2, 3)$ $B(-4, 5)$ (β) $A(-1, 3)$ $B(5, 0)$
13. Ποια είναι η εξίσωση και ο συντελεστής διεύθυνσης
(α) του άξονα $x'x$ (β) του άξονα $y'y$

14. Να βρείτε, αν ορίζεται, τον συντελεστή διεύθυνσης των ευθειών:
(α) $y = 4x - 3$ (β) $x + 2y - 3 = 0$
(γ) $y + 5 = 0$ (δ) $x = 2$
15. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:
(α) $A(-1, 2)$ $B(4, -3)$ (β) $A(2, 3)$ $B(2, 0)$
(γ) $A(2, 3)$ $B(4, 4)$ (δ) $A(-1, 3)$ $B(5, 3)$
16. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής των ευθειών:
(α) $y = x + 1$ και $y = -x - 3$ (β) $x + 4y - 1 = 0$ και $2x + y + 5 = 0$
(γ) $2x - y + 6 = 0$ και $y = 2x$ (δ) $3x - 5y + 1 = 0$ και $y = -1$
17. Να εξετάσετε αν οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 είναι κάθετες, παράλληλες ή τίποτα από τα δύο.
(α) $\epsilon_1 : y = x + 8, \epsilon_2 : 2x - 2y + 3 = 0$ (β) $\epsilon_1 : x + 2y + 1 = 0, \epsilon_2 : 2x + y = 0$
(γ) $\epsilon_1 : 3x - 4y + 5 = 0, \epsilon_2 : 4x + 3y = 1$ (δ) $\epsilon_1 : x = 2, \epsilon_2 : y = -1$
18. Να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την ευθεία ϵ :
(α) $M(-2, 1)$ $\epsilon : y = x - 2$ (β) $M(4, -2)$ $\epsilon : 3x - 4y - 15 = 0$
(γ) $M(2, 3)$ $\epsilon : 2x + 4 = 0$ (δ) $M(-1, 0)$ $\epsilon : y = -2$
19. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$:
(α) $A(5, 2)$ $B(1, 1)$ $\Gamma(-4, 2)$ (β) $A(2, 0)$ $B(-3, 1)$ $\Gamma(1, 4)$
20. Να βρείτε τις εξισώσεις των διαμέσων του τριγώνου $AB\Gamma$ με $A(4, 1), B(0, 5), \Gamma(-2, -1)$.
21. Να βρείτε τις εξισώσεις των υψών του τριγώνου $AB\Gamma$ με $A(3, 4), B(1, 1), \Gamma(1, 5)$.
22. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των κύκλων:
(α) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ (β) $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$
(γ) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ (δ) $2x^2 + 2y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
23. Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του A :
(α) $x^2 + y^2 = 5, A(2, -1)$ (β) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0, A(2, 0)$
(γ) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0, A(-1, 3)$ (δ) $x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0, A(1, 1)$
24. Να βρείτε την σχετική θέση της ευθείας ϵ και του κύκλου C :
(α) $\epsilon : 3x - 4y + 10 = 0$ $C : x^2 + y^2 = 10x$
(β) $\epsilon : x + 2y - 3 = 0$ $C : x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$
(γ) $\epsilon : y = 4x - 1$ $C : x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$
25. Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής:
(α) $y^2 = 12x$ (β) $x^2 = -4y$
(γ) $x = 8y^2$ (δ) $x^2 = 6ay$

26. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής η οποία έχει:
(α) εστία $E(1,0)$ (β) διευθετούσα $y = 3$
(γ) παράμετρο 8 και εστία στον $x'x$ (δ) εστία $E(0,5)$
27. Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της A:
(α) $y^2 = -8x$, $A(-2,4)$ (β) $x^2 = 3y$, $A(-6,12)$
28. Να βρείτε τις κορυφές, τις εστίες, τα μήκη των αξόνων και την εκκεντρότητα της έλλειψης:
(α) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (β) $9x^2 + 4y^2 = 36$
29. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης η οποία έχει:
(α) εστίες $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$ και μεγάλο άξονα 10.
(β) εστίες $E(0,12)$ και $E'(0,-12)$ και μικρό άξονα 10.
(γ) εκκεντρότητα $\frac{3}{5}$, εστιακή απόσταση 12 και εστίες στον άξονα $x'x$.
30. Να βρείτε την εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο της A:
(α) $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{10} = 1$, $A(3,2)$ (β) $3x^2 + 2y^2 = 11$, $A(-1,2)$
31. Να βρείτε τις κορυφές, τις εστίες, τις ασύμπτωτες και την εκκεντρότητα της υπερβολής:
(α) $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$ (β) $9x^2 - 16y^2 = 144$
32. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει:
(α) εστίες $E(0,2)$ και $E'(0,-2)$ και είναι ισοσκελής.
(β) ασύμπτωτες $y = \pm \frac{2}{5}x$ και εστίες $E(\sqrt{29},0)$ και $E'(-\sqrt{29},0)$.
(γ) εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$ και κορυφές $A(0,4)$ και $A'(0,-4)$.
33. Να βρείτε την εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο της A:
(α) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$, $A\left(\frac{5}{2},1\right)$ (β) $4y^2 - 9x^2 = 72$, $A\left(-1,\frac{9}{2}\right)$
34. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο στον οποίο κινείται το σημείο M καθώς μεταβάλλεται η τιμή του λ :
(α) $M(\lambda - 2, 3\lambda)$ (β) $M(2\lambda, \lambda^2)$
(γ) $M\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}, \lambda - \frac{1}{\lambda}\right)$ (δ) $M(\sin\lambda, \eta\mu\lambda)$

Απαντήσεις

1. (α) $\overline{AB} = (-6, 4)$, (β) $\overline{AB} = (-1, -5)$
2. $\lambda_{\vec{\alpha}} = -\frac{3}{4}$, $|\vec{\alpha}| = 5$, $\lambda_{\vec{\beta}} = -2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{5}$, $\lambda_{\vec{\gamma}} = 0$, $|\vec{\gamma}| = 5$, $\lambda_{\vec{\delta}} = -$, $|\vec{\delta}| = 1$
3. (α) $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = -4$, (β) $\det(\overline{AB}, \overline{AG}) = 8$
4. (α) $x = 5$, (β) $x = 1$ ή $x = -5$
5. (α) $x = 2$ ή $x = -4$, (β) $x = -2$
6. (α) $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, (β) $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$
7. (α) $\frac{5\pi}{3}$, (β) $\frac{3\pi}{4}$
8. (α) 3, (β) 9
9. (α) 10, (β) 2
10. (α) $x = 0$, (β) $x = -2$
11. (α) $\frac{2}{25}\vec{\alpha}$, (β) $\vec{\alpha}$
12. (α) $M(-1, 4)$, (β) $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$
13. (α) $y = 0$, $\lambda_{xx} = 0$ (β) $x = 0$, λ_{yy} δεν ορίζεται
14. (α) $\lambda = 4$, (β) $\lambda = -\frac{1}{2}$, (γ) $\lambda = 0$, (δ) $\lambda = -$
15. (α) $y = -x + 1$, (β) $x = 2$, (γ) $y = \frac{1}{2}x + 2$, (δ) $y = 3$
16. (α) $(-2, -1)$, (β) $(-3, 1)$, (γ) είναι παράλληλες, (δ) $(-2, -1)$
17. (α) είναι παράλληλες, (β) τίποτα, (γ) είναι κάθετες, (δ) είναι κάθετες
18. (α) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, (β) 1, (γ) 4, (δ) 2
19. (α) $(AB\Gamma) = \frac{9}{2}$, (β) $(AB\Gamma) = \frac{19}{2}$
20. $AM: x + 5y - 9 = 0$, $BK: y = -5x + 5$, $\Gamma\Lambda: y = x + 1$
21. $A\Delta: y = 4$, $BE: y = 2x - 1$, $\Gamma Z: 2x + 3y - 17 = 0$
22. (α) $K(2, -3)$ και $\rho = 3$ (β) $K(0, -1)$ και $\rho = 2$ (γ) $K(1, 2)$ και $\rho = \sqrt{2}$
(δ) $K\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ και $\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}$
23. (α) $2x - y = 5$, (β) $x - 2y - 2 = 0$, (γ) $x = -1$, (δ) $y = x$
24. (α) $d(K, \varepsilon) = 5 = \rho$, (β) $d(K, \varepsilon) = \frac{2\sqrt{5}}{5} < \rho = 5$, (γ) $d(K, \varepsilon) = \sqrt{17} > \rho = 3$
25. (α) $p = 6$, $E(3, 0)$, $\delta: x = -3$, (β) $p = -2$, $E(0, -1)$, $\delta: y = 1$,
(γ) $p = \frac{1}{16}$, $E\left(\frac{1}{32}, 0\right)$, $\delta: x = -\frac{1}{32}$, (δ) $p = 3\alpha$, $E\left(0, \frac{3\alpha}{2}\right)$, $\delta: y = -\frac{3\alpha}{2}$
26. (α) $y^2 = 4x$, (β) $x^2 = -12y$, (γ) $y^2 = 16x$, (δ) $x^2 = 20y$
27. (α) $y = -x + 2$, (β) $4x + y + 12 = 0$

28. (α) $A(5,0)$, $A'(-5,0)$, $B(0,3)$, $B'(0,-3)$, $E(4,0)$, $E'(-4,0)$, $\varepsilon = \frac{4}{5}$
(β) $A(0,3)$, $A'(0,-3)$, $B(2,0)$, $B'(-2,0)$, $E(0,\sqrt{5})$, $E'(0,-\sqrt{5})$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$
29. (α) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, (β) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$, (γ) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$
30. (α) $x + y = 5$, (β) $-3x + 4y = 11$
31. (α) $A(0,8)$, $A'(0,-8)$, $E(0,10)$, $E'(0,-10)$, $y = \pm \frac{4}{3}x$, $\varepsilon = \frac{5}{4}$
(β) $A(4,0)$, $A'(-4,0)$, $E(5,0)$, $E'(-5,0)$, $y = \pm \frac{3}{4}x$, $\varepsilon = \frac{5}{4}$
32. (α) $y^2 - x^2 = 2$, (β) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$, (γ) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$
33. (α) $2x - y = 4$, (β) $x + 2y = 8$
34. (α) $y = 3x + 6$, (β) $x^2 = 4y$, (γ) $x^2 - y^2 = 4$, (δ) $x^2 + y^2 = 1$